2

2020

Filozofski vestnik

Filozofski vestnik

THINKING THE INFINITE
PENSER L'INFINI

Edited by | Sous la direction de
David Rabouin, Jana Ndiaye Berankova, Jelica Šumič Riha

ISSN 0353 4510
Letnik/*Volume* XLI
Številka/*Number* 2
Ljubljana 2020

ZALOŽBA ZRC

Filozofski vestnik

ISSN 0353-4510

Naslov uredništva
Filozofski vestnik
p. p. 306, 1001 Ljubljana
Tel.: (01) 470 64 70

Editorial Office Address
Filozofski vestnik
P.O. Box 306, SI-1001 Ljubljana, Slovenia
Phone: +386 (1) 470 64 70

fi@zrc-sazu.si | http://fi2.zrc-sazu.si/sl/publikacije/filozofski-vestnik#v

Korespondenco, rokopise in recenzentske izvode pošiljajte na naslov uredništva.
Editorial correspondence, enquiries and books for review should be sent to the Editorial Office.
Revija izhaja trikrat letno. | *The journal is published three times annually.*

Letna naročnina: 21 €. Letna naročnina za študente in dijake: 12,50 €. Cena posamezne številke: 10 €. | *Annual subscription: €21 for individuals, €40 for institutions. Single issues: €10 for individuals, €20 for institutions. Back issues are available.*

Naročila sprejema
Založba ZRC
p. p. 306, 1001 Ljubljana
Tel.: (01) 470 64 65
E-pošta: narocanje@zrc-sazu.si

Orders should be sent to
Založba ZRC
P.O. Box 306, SI-1001 Ljubljana, Slovenia
Phone: +386 (1) 470 64 65
E-mail: narocanje@zrc-sazu.si

Oblikovanje | *Design*: Barbara Predan
Tisk | *Printed by*: Cicero Begunje
Naklada | *Print run*: 500

Filozofski vestnik

Thinking the Infinite
Penser l'infini

Edited by | Sous la direction de
David Rabouin, Jana Ndiaye Berankova, Jelica Šumič Riha

XLI | 2/2020

Izdaja | Issued by

ZRC SAZU, Filozofski inštitut
Institute of Philosophy

Založnik | Published by

Založba ZRC

Ljubljana 2020

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

125:51(082)

THINKING the infinite = Penser l'infini / edited by David Rabouin, Jana Berankova, Jelica Šumič Riha ; izdaja ZRC SAZU, Filozofski inštitut = issued by Institute of Philosophy. - Ljubljana : Založba ZRC, 2020. - (Filozofski vestnik, ISSN 0353-4510 ; 2020, 2)

ISBN 978-961-05-0509-9
1. Rabouin, David
COBISS.SI-ID 45168387

Les éditeurs de ce recueil remercient les organisateurs du colloque « Alain Badiou : Penser l'Infini », qui eut lieu les 11 et 12 avril 2018 à la Galerie Nationale de Prague, pour avoir initié les débats qui sont à l'origine de ce recueil. Ce colloque fut organisé par le Cercle axiomatique de Prague et les éditions Suture avec l'Institut philosophique de l'Académie des sciences de la République Tchèque, l'Université Princeton, l'Institut français de Prague et l'Université Charles et la Galerie nationale de Prague. Plus de renseignements peuvent être trouvés sur le site des éditions Suture : https://suturepress.com

The editors of this volume would like to thank to the organizers of the conference "Alain Badiou: Thinking the Infinite", which took place on the 11th and 12th April 2018 in the National Gallery in Prague. This conference initiated many of the debates that are at the origin of this volume. It was organized by the Prague Axiomatic Circle and Suture Press along with the Institute of Philosophy of the Czech Academy of Sciences, Princeton University, the French Institute in Prague, Charles University and the National Gallery in Prague. More information can be found on the website of Suture Press: https://suturepress.com

Contents/Sommaire

Filozofski vestnik | Volume XLI | Number/Numéro 2 | 2020

7 **Jana Ndiaye Berankova, David Rabouin, Jelica Šumič Riha**
Préface

15 **Alain Badiou**
Ontologie et mathématiques : Théorie des Ensembles, théorie des Catégories, et théorie des Infinis, dans *L'Être et l'événement*, *Logiques des mondes* et *L'Immanence des vérités*

Le Triangle philosophie – mathématiques – psychanalyse
The Triangle of Philosophy – Mathematics – Psychoanalysis

37 **Oliver Feltham**
"One or Many Ontologies? Badiou's Arguments for His Thesis 'Mathematics is Ontology'"

57 **Nick Nesbitt**
Bolzano's Badiou

69 **Jelica Šumič Riha**
La place de la mathématique : Badiou avec Lacan

Le Modèle ensembliste en discussion
The Set-theoretical Model under Discussion

105 **Michael Hauser**
Badiou and the Ontological Limits of Mathematics

119 **Ronald Bolz**
Mathematics is Ontology? A Critique of Badiou's Ontological Framing of Set Theory

143 **Tzuchien Tho**
Sets, Set Sizes, and Infinity in Badiou's *Being and Event*

Le « Voir » et le « dire »: théorie des ensembles / théorie des categories
"Seeing" and "Saying": Set Theory / Category Theory

181 **Charles Alunni**
Relation-objet et onto-logie, ensembles ou categories. Identité, objet, relation

199 **René Guitart**
L'infini entre deux bouts. Dualités, univers algébriques, esquisses, diagrammes

249 **David Rabouin**
Espace et nombre : deux voies dans l'ontologie ?

285 **Norman Madarasz**
Beyond Recognition: Badiou's Mathematics of Bodily Incorporation

Grands Cardinaux et attributs de l'absolu
Large Cardinals and the Attributes of the Absolute

311 **Frank Ruda**
To the End: Exposing the Absolute

341 **Jana Ndiaye Berankova**
The Immanence of Truths and the Absolutely Infinite in Spinoza, Cantor, and Badiou

361 **Norma M. Hussey**
A New Hope for the Symbolic, for the Subject

397 **Fernando Zalamea**
An Elementary Peircean and Category-Theoretic Reading of *Being and Event*, *Logics of Worlds*, and *The Immanence of Truths*

411 **Notes on Contributors / Notes sur les auteurs**
415 **Abstracts / Résumés**

Kazalo

Filozofski vestnik | Letnik XLI | Številka 2 | 2020

7 **Jana Ndiaye Berankova, David Rabouin, Jelica Šumič Riha**
Predgovor

15 **Alain Badiou**
Ontologija in matematika: teorija množic, teorija kategorij in teorija neskončnosti v *Biti in dogodku*, *Logikah svetov* in *Imanenci resnic*

Trikotnik filozofija – matematika – psihoanaliza

37 **Oliver Feltham**
»Ena ali mnoge ontologije? Badioujevi argumenti za njegovo tezo 'Matematika je ontologija'.«

57 **Nick Nesbitt**
Bolzanov Badiou

69 **Jelica Šumič Riha**
Mesto matematike: Badiou z Lacanom

Model teorije množic v razpravi

105 **Michael Hauser**
Badiou in ontološke meje matematike

119 **Ronald Bolz**
Je matematika ontologija? Kritika Badioujeve ontološke razlage teorije množic

143 **Tzuchien Tho**
Množice, velikosti množice in neskončno v Badioujevi *Biti in dogodku*

»Videti« in »reči«: teorija množic/teorija kategorij

181 **Charles Alunni**
Razmerje-objekt in onto-logija, množice ali kategorije. Identite, objekt, razmerje

199 **René Guitart**
Neskončnost med dvema koncema: Dvojnosti, algebrski univerzumi, skice, diagrami

249 **David Rabouin**
Prostor in število: dve poti v ontologiji?

285 **Norman Madarasz**
Onstran pripoznanja: Badioujeva matematika telesne inkorporacije

Veliki kardinali in atributi absoluta

311 **Frank Ruda**
Do konca: razkrivanje absoluta

341 **Jana Ndiaye Berankova**
Imanenca resnic in absolutno neskončno pri Spinozi, Cantorju in Badiouju

361 **Norma M. Hussey**
Novo upanje za simbolno, za subjekt

397 **Fernando Zalamea**
Elementarno peirceovsko in kategorijsko teoretsko branje
Biti in dogodka, *Logik svetov* in *Imanence resnic*

411 **Podatki o avtorjih**

415 **Povzetki**

Filozofski vestnik | Volume XLI | Number 2 | 2020 | 7–14

Jana Ndiaye Berankova, David Rabouin, Jelica Šumič Riha

Préface

Le rapport que la philosophie d'Alain Badiou entretient aux mathématiques est à la fois intime, simple dans sa formulation et complexe dans ses attendus. Intime, il l'est de nécessité, par la nature même de ce qu'est à ses yeux la philosophie. Pour Badiou, le discours philosophique n'est pas par lui-même producteur de vérités. Il se trouve, et s'est toujours trouvé, dans une situation de questionnement et de réflexion par rapport à d'autres discours où ces vérités se produisent et que Badiou nomme ses « conditions » : l'art, la politique, l'amour et les mathématiques.

À l'époque de *L'Être et l'événement*, le rapport à cette dernière condition se laissait résumer dans une formule simple et restée célèbre : « les mathématiques sont l'ontologie » (formule dont on verra qu'elle fut justement questionnée par son créateur au congrès de Prague dont ce recueil est issu). Les mathématiques nous livrent la structure ultime de ce qui est : « l'être en tant qu'être ». En conséquence, la philosophie doit accompagner cette doctrine de l'être dans ses évolutions. Elle doit notamment prendre acte de la forme radicalement nouvelle qu'elle a prise avec l'émergence de la théorie des ensembles et le retour de « l'infini actuel » dans l'œuvre de Georg Cantor. C'est vers cette théorie que s'est donc d'abord tourné Badiou, convaincu que la philosophie devait penser cette ontologie débarrassée de la figure séculaire du « Un » et donner libre cours à une pensée du « pur multiple » ou « multiple sans un ».

Cette nouvelle articulation du rapport entre mathématiques et philosophie conduisait également à un rapport nouveau à la question de la vérité. De fait, l'axiomatique complexifie le rapport interne des mathématiques à la vérité en montrant non seulement que plusieurs modèles de la théorie des ensembles sont possibles, mais qu'il n'y a pas moyen de décider lequel est le « bon ». Tel fut l'apport décisif de Paul Cohen inventant dans les années 1960 la technique du « forçage » (*forcing*) qui permettait ainsi de créer des modèles ensemblistes en forçant littéralement certains énoncés à être vrais. Pour Badiou, cela montrait que l'être est toujours débordé par des « événements » qui viennent trouer le savoir et où le Sujet se constitue dans une posture de fidélité à ces trouées événementielles. Ainsi, Badiou rejette l'idée que le concept de « vérité » désigne la correspondance entre un certain discours et une « réalité ». Pour lui, la « vérité » est nécessairement attachée à la production même de ce réel que recèle l'idée d'indécidable.

Il s'agit là du socle fondamental des thèses exposées dans *L'Être et l'événement*. Elles ouvraient à deux questions naturelles : ne pouvait-on envisager que les mathématiques continuent à se transformer d'une manière comparable au changement radical qui était advenu avec l'émergence de la théorie des ensembles ? C'est ce que semblait indiquer le développement de la théorie des catégories, née après-guerre, mais advenue surtout à partir des années 1960 dans les travaux de William Lawvere et Alexandre Grothendieck. Tel était d'ailleurs le ressort d'une possible objection contre le rêve d'une « ontologie intrinsèque » des mathématiques que fit valoir immédiatement Jean-Toussaint Desanti.[1] Les mathématiques changent et si le philosophe y indexe l'ontologie, il devrait réviser son système à chacun de ces changements. L'autre question naturelle portait sur la théorie des ensembles elle-même. Certes, les mécanismes de forcing inventés par Paul Cohen montraient que certains énoncés comme l'Hypothèse du continu ne sont pas décidables dans la théorie axiomatisée par Zermelo et Fraenkel (dite « ZFC » quand on y adjoint l'axiome du choix). Il semble donc vain de considérer que cette théorie a un modèle attendu et la vérité ne peut donc être de l'ordre d'une naïve correspondance. Mais ne pourrait-on envisager que ce phénomène ne soit pas intrinsèque, mais provienne d'un défaut de cette axiomatique particulière ? Une autre axiomatique ne pourrait-elle pas régler, au moins pour une part, cette indécidabilité ? Après tout, certaines théories mathématiques puissantes comme la géométrie analytique cartésienne sont, ainsi que l'a démontré Alfred Tarski, décidables. Même si nous savons depuis Gödel qu'une théorie au moins aussi puissante que l'arithmétique de Peano devra toujours être incomplète, on peut se poser la même question avec l'arithmétique de Peano et se demander si d'autres axiomatisations ne sont pas préférables ? Ceci donna lieu à tout un programme de recherche qui entendait compléter ZFC par

1 Jean-Toussaint Desanti, « Quelques remarques à propos de l'ontologie intrinsèque d'Alain Badiou », *Les Temps Modernes* 45 (526/1990), pp. 61–71.

l'ajout de nouveaux axiomes, revenant à la position de cardinaux très « grands » (*large cardinals*), sur l'existence desquels ZFC ne peut pas statuer par elle-même. Tel fut, sans surprise, le ressort des deux tomes suivants de l'entreprise de *L'Être et l'événement* : une confrontation serrée avec la théorie des catégories, sous l'égide de la notion de Topos, que Badiou proposa d'interpréter comme une phénoménologie appuyée sur le socle ontologique fourni par les ensembles (*Logiques des mondes*) ; puis une analyse fine des grands cardinaux et de la structure progressivement mise au jour grâce à eux de l'univers ensembliste, qui lui permit de repenser l'idée d'absolu (*V*, horizon inaccessible d'un « ensemble de tous les ensembles ») et de ses attributs (*L'Immanence des vérités*).

Au terme de ce parcours, il apparaît qu'un des fils directeurs de l'œuvre est indéniablement la question de l'infini – ou peut-être plus précisément *des* différentes formes de l'infini. C'est ce thème qui servit de motif au grand colloque organisé à Prague en avril 2018, dont ce recueil est issu. Réunis dans la majestueuse Galerie Nationale, à l'invitation du *Cercle Axiomatique de Prague* en 2018, mathématiciens, philosophes et historiens des mathématiques furent amenés à se prononcer sur la pensée de l'infini que propose Alain Badiou et, plus généralement, le rapport que sa philosophie entretient aux mathématiques.[2] À cette époque, rappelons-le, le troisième tome, *L'Immanence des vérités*, n'était pas encore paru, et seules quelques personnes avaient pu en parcourir le texte. Mais c'est une autre annonce qui électrisa la salle ce jour-là : prenant la parole pour conclure le colloque, Badiou expliqua en effet que la thèse qui avait agité tant de commentateurs, selon laquelle les mathématiques sont l'ontologie, était en fait de l'ordre du slogan et devait être finalement entendue *cum grano salis*. Nous reprenons le texte d'Alain Badiou en ouverture de ce volume, car il retrace précisément les différentes étapes de son parcours en clarifiant la manière dont philosophie et mathématiques y ont été articulés. Même si le slogan « les mathématiques sont l'ontologie » avait le mérite de frapper les esprits, il avait l'inconvénient, précise

[2] Le colloque « Alain Badiou : Penser l'infini » eut lieu du 11 au 12 avril 2018 à la Galerie Nationale de Prague (Veletržní Palác). Les intervenants furent : Charles Alunni, Alain Badiou, Burhanuddin Baki, Evelyne Barbin, Roland Bolz, Pierre Cartier, Oliver Feltham, René Guitart, Michael Hauser, Norma Hussey, Norman Madarasz, Jana Ndiaye Berankova, Nick Nesbitt, David Rabouin, Frank Ruda, Jelica Šumič Riha, Tzuchien Tho et Fernando Zalamea. Cet événement fut organisé en collaboration avec l'Institut philosophique de l'Académie des Sciences à Prague, l'Université Princeton, les éditions Suture, l'Institut français de Prague et l'Université Charles. Pour plus d'information : https://suturepress.com

Badiou, de laisser croire qu'un choix nécessairement philosophique, relatif à l'ontologie, pouvait émerger de la mathématique elle-même. Il entreprend donc de clarifier ce choix dans ses attendus et ses conséquences philosophiques, tout en le revendiquant comme tel (notamment par rapport à un autre modèle, offert par la théorie des catégories).

C'est de cette question du choix que part également l'article d'Oliver Feltham dans la section initiale de notre volume dont l'objectif est de placer l'œuvre de Badiou dans un contexte intellectuel plus général. Feltham se concentre sur une décision cruciale : celle d'une ontologie unique, plutôt que d'une pluralité d'ontologies. Il répond aux remarques critiques concernant le projet de Badiou soulignant les risques de la circularité dans le raisonnement qui élit la théorie de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix comme modèle pour l'ontologie. La modélisation de l'ontologie par ZFC, implique-t-elle de nier la pluralité des modèles ? La réponse de Feltham à cette question est un tour de force théâtral évoquant l'utilité d'une certaine « anatomie de l'échec ». Nick Nesbitt, dans sa contribution « Le Bolzano de Badiou » propose de combler une lacune importante dans la réception de l'œuvre de ce dernier : le lien entre l'ontologie mathématique et la pensée du mathématicien, logicien et philosophe pragois Bernard Bolzano. Nesbitt lit Bolzano comme un précurseur lointain de Badiou. Il trace les similarités et les divergences entre ces deux penseurs : la critique de l'idéalisme post-Kantien de Bolzano, sa défense de l'infini actuel contre l'infini qualitatif hégélien, sa conception des mathématiques comme langage adéquat de l'ontologie, son réalisme rationaliste et platonicien, son intérêt pour l'axiomatisation. Nesbitt remarque également qu'une étude attentive de la pensée de Bolzano pourrait ouvrir la voie à une véritable analyse structuraliste de ce que Marx décrivit comme « forme sociale ». Jelica Šumič Riha conclut cette série d'articles en comparant les recours d'Alain Badiou et de Jacques Lacan aux mathématiques et analysant la triangulation de la philosophie, de la psychanalyse et des mathématiques dans leurs œuvres. Pour Lacan, le mathème est situé à la jonction de la vérité et du savoir. Si les mathématiques représentent pour lui un modèle d'accès au réel de la structure, ce réel est saisi au sens de la rencontre d'un point d'impossible à écrire dans les termes de cette structure. Badiou remarque qu'un tel d'impossible – un réel non-mathématisable – est représentatif d'une position « archi-scientifique » que cherche le psychanalyste. Le philosophe, lui, préfère plutôt rester sous condition des vérités qui surgissent dans le domaine des mathématiques.

Une autre série d'articles s'attachent ensuite à questionner les décisions philosophiques qui sous-tendent au choix de la théorie des ensembles comme candidat pour exprimer l'ontologie. Deux stratégies sont proposées. La première, positive, que met en œuvre Michael Hauser, consiste à préciser la manière dont fonctionne la « condition » mathématique en spécifiant trois niveaux : celui de la philosophie proprement dite, qui opère à titre de méta-structure ou de méta-ontologie ; celui des mathématiques en tant que le philosophe y opère certains choix ; celui enfin de l'état donné des mathématiques dans leur ensemble. Hauser entreprend alors de montrer que cette structuration est reflétée dans l'ontologie ensembliste à partir du théorème d'Easton (qui établit en substance que, pour un cardinal infini donné, le cardinal du nombre de ses parties peut être choisi, sous certaines conditions minimales, parmi n'importe lequel de ses successeurs). L'espace du choix est donc ouvert de l'intérieur du second niveau (la théorie mathématique choisie par le philosophe comme socle ontologique) et commande une forme de circulation entre les trois niveaux. Une seconde stratégie d'approche, plus critique, consiste à questionner le choix de la théorie des ensembles comme modèle à partir d'autres théories du multiple concurrentes. Une première alternative est fournie par la méréologie (c'est-à-dire la théorie des touts et des parties). Roland Bolz argumente que c'est dans cette dernière que Badiou aurait dû chercher la théorie du « multiple pur », s'il voulait rester cohérent avec sa relecture de l'histoire de la philosophie. De fait, il est clair que les conceptions de « l'un et du multiple » qui se sont succédées depuis Platon et par rapport auxquelles se situe explicitement Badiou, se sont faites dans le cadre privilégié des rapports tout/partie. Bolz entend alors montrer que l'exigence d'une pensée du pur multiple « sans un » est parfaitement réalisée par certaines axiomatisations méréologiques contemporaines. Tzuchien Tho suit une stratégie similaire mais en questionnant plus directement la conceptualisation du comptage et de la mesure des infinis. Dans le cadre de la théorie des ensembles, en effet, un ensemble infini est défini par la propriété d'être équipotent à une de ses parties propres. En cela, la théorie de Cantor et Dedekind fait rupture avec les conceptions précédentes qui considéraient qu'il s'agissait là d'un paradoxe empêchant la possibilité même d'un infini actuel. Or des théories récentes, dites des « numérosités », ont montré qu'il est tout à fait possible de construire une théorie ensembliste de l'infini dans laquelle on préserve l'ancien axiome euclidien selon lequel « le tout est toujours plus grand que la partie ». Tho entreprend d'explorer les conséquences d'une telle possibilité au regard du choix fait par Badiou.

La troisième section de notre volume explore également une alternative au modèle ensembliste, mais fournie cette fois par une orientation que Badiou lui-même a thématisé comme telle dans *Logiques des mondes* : la théorie des catégories. Comme le rappelle Charles Alunni, la question porte ici sur l'articulation entre la lettre et le diagramme – ou, selon les termes qui guident l'exploration de René Guitart, entre le « dire » et le « voir ». Reprenant le parcours qui a conduit Badiou à faire de la théorie des catégories, et plus particulièrement de la théorie des topos, le ressort d'une phénoménologie, Alunni met en avant la dimension profondément géométrique et spatialisante qui gouverne cette orientation de pensée. Il y trouve le ressort d'un questionnement sur la manière dont une chose peut se trouver soustraite au réseau de relations qui la caractérise dans un monde. René Guitart s'installe également au lieu de la tension entre le « voir » et le « dire » pour indiquer comme on peut la faire jouer de l'intérieur de la théorie des catégories (plutôt qu'entre théorie des topos et théories des ensembles). Il propose pour cela sa propre construction à partir de la notion d'*intégrateur*, qui permet de retrouver les structures ensemblistes (notamment les cardinaux infinis) de l'intérieur du dispositif catégorique et de déployer sur cette base une pensée intrinsèque du déploiement de l'infini « en personne ». Poursuivant la question de l'articulation du « voir » et du « dire », David Rabouin revisite l'histoire de la théorie des ensembles elle-même à partir de la tension entre thématisation du nombre et thématisation de l'espace. On y voit, en effet, opérer un double rôle des ensembles selon qu'on les considère comme langage ou comme théorie. Ceci permet de poser la question de l'articulation entre langage et ontologie, mais aussi d'indiquer comment le couple ensemble/catégories peut être reproblématisé dans ce cadre. Finalement, Noman Madarasz revient sur le dispositif de *Logiques des mondes* et l'évolution qui fait passer du générique à ce que Badiou définit en termes catégoriques comme « corps » d'un sujet de vérité. Retraçant la construction de l'ouvrage, il s'interroge alors sur la manière dont elle entend se déployer comme « phénoménologie », là où semble mis en avant un programme d'inspiration plutôt « structuraliste ».

La dernière série d'articles de ce recueil porte sur les grands cardinaux et la théorie de l'absolu. Elle reprend les éléments nouveaux présentés par Badiou dans *L'Immanence des vérités*. Frank Ruda inaugure cette section en démontrant que la question à laquelle Badiou essaie de répondre dans cet ouvrage pourrait être reformulée ainsi : qu'est-ce qui rend une vérité vraiment vraie ? Réponse : son absoluité. *L'Immanence des vérités* déploie une stratégie argumentative dans laquelle, comme chez Hegel peut-être, l'absolu est auprès de nous dès le début. La catégorie de l'absolu se trouve au centre du nœud borroméen qui noue l'être, l'apparaître et les vérités – elle comble des lacunes qui apparaissent comme des effets de la construction conceptuelle de *L'Être et l'événement* et de *Logiques des mondes*. *L'Immanence des vérités* est donc avant tout une affirmation d'une liberté de la pensée, d'un choix entre le constructible et le générique.

Le choix et la liberté du mathématicien sont également au centre de l'attention de Jana Ndiaye Berankova qui remarque que le lien entre la philosophie et les mathématiques doit être pensé selon le raisonnement inductif et non pas déductif – à l'origine de ce lien se trouve la décision philosophique qui doit être ensuite vérifiée par la richesse de ses conséquences (mathématiques ou autres). Ndiaye Berankova présente la hiérarchie des infinis proosée dans *L'Immanence des vérités* et analyse ce livre à travers la perspective des écrits de Georg Cantor – notamment à travers la notion de « infinitum absolutum » et la distinction entre infini consistant et inconsistant présente dans sa correspondance avec Dedekind. Elle remarque que le fait de décrire l'univers V de toutes les multiplicités pensables comme un « lieu intelligible » est une manière de contourner le risque que cet absolu retombe dans le domaine de l'infini potentiel. *L'Immanence des vérités* est avant tout une tentative ambitieuse du renouvellement de la notion spinoziste des attributs de l'absolu.

Norma Hussey supplémente cette présentation de *L'Immanence des vérités* en évoquant les développements les plus récents dans les mathématiques des grands cardinaux, notamment les hypothèses présentées par le mathématicien Hugh W. Woodin. Elle évoque la perspective de l'univers et du multivers en mathématiques et remarque que la conjecture « V = L-ultime » de Hugh Woodin n'a pas forcément les mêmes conséquences que l'hypothèse traditionnelle de constructibilité « V = L ». Les concepts mathématiques présentés dans cet article vont certes au-delà de l'appareil mathématique utilisé par Badiou dans *L'Immanence des vérités*, mais Hussey reste convaincue qu'ils peuvent être intégrés dans le projet philosophique badiousien. Enfin, pour conclure, Fernando Zalamea récapitule la trajectoire conceptuelle des trois principales œuvres d'Alain Badiou. Il fait une remarque provocatrice en imaginant un quatrième volume fictif de *L'Être et l'événement* dédié à la notion des universaux dans la théorie des topoi de Grothendieck et la théorie homotopique des types. Par ailleurs, Zalamea retrace les perspectives et les points d'interrogations en comparant son projet aux catégories de Charles Sanders Peirce.

Au terme de ce parcours, ce volume offre ainsi un cheminement à travers l'ensemble de l'œuvre de Badiou, suivant le guide, parfois discrètement présent, parfois au tout devant de la scène, de l'infini. Nous espérons qu'il donnera au lecteur l'envie de s'y plonger, ou de s'y replonger. Mais surtout, d'en prolonger le geste dans d'autres pensées vives.

Filozofski vestnik | Volume XLI | Number 2 | 2020 | 15–34 | DOI: 10.3986/FV.41.2.01

Alain Badiou*

Ontologie et mathématiques

Théorie des Ensembles, théorie des Catégories, et théorie des Infinis, dans *L'Être et l'événement*, *Logiques des mondes* et *L'Immanence des vérités*

I

Comme nombre d'entre vous le savent, pour moi, la philosophie n'existe qu'autant qu'existent des procédures de vérité, et elle est sous condition de l'état historique de ces procédures. J'ai rangé les vérités dont l'espèce humaine s'est, au fil des millénaires de son existence, montré productrice, sous quatre grands genres : les sciences, les arts, la politique et l'amour.

La question est alors de savoir comment on interroge, tout au long de l'histoire de la philosophie, le lien entre la philosophie et ses conditions. La difficulté, que je voudrais ici résumer, est qu'il faut s'occuper, dans l'investigation du corpus historique de la philosophie tel que nous en héritons, de trois processus distincts.

Le premier est de prendre en compte, à tout moment de l'histoire de la philosophie, *l'état des quatre conditions et de leur impact sur la philosophie dans un lieu déterminé*. C'est la vue panoramique, essentiellement historienne. Elle autorise qu'on distingue, plus ou moins efficacement, des époques ou des territoires philosophiques. Ainsi, quand on parle de « philosophie antique », ou de « philosophie médiévale », ou encore de « philosophie continentale », opposée à la « philosophie analytique », principalement américaine.

Le second processus s'attache au *repérage d'un problème, interne à une condition, et qui modifie tout le rapport antérieur de la philosophie au dispositif complet des conditions*. C'est évidemment le cas de la mutation mathématique entraînée vers le Ve siècle A.C. par la découverte des longueurs « incommensurables », qui fait basculer les mathématiques grecques, de l'arithmétique pythagoricienne vers la géométrie d'Eudoxe et Euclide, et la philosophie, de la recherche de l'Harmonie à une théorie des ruptures. On pourrait aussi bien évoquer les effets politiques de la Révolution française, qui contraint la philoso-

* Professeur émérite à l'Ecole Normale Supérieure

phie allemande, à partir de Fichte, à des remaniements dialectiques fondamentaux, faisant venir au jour la force créatrice de la négativité.

Le troisième processus réside dans la possibilité qu'une philosophie – donc, d'abord, un philosophe – intervienne du point de la philosophie elle-même, dans la dynamique d'au moins une des quatre conditions. C'est *le processus rétroactif, de la philosophie vers ses conditions*. Il n'est pas douteux par exemple que le platonisme ait, à longue portée, influencé la vision sociale de l'amour dans l'époque de sa spiritualisation courtoise, ou que la dialectique hégélienne ait eu une importance constituante pour la politique communiste telle que fondée par Marx. Ou encore, on peut suivre à la trace l'influence de la philosophie matérialiste et libertine, dérivée d'Epicure, dans l'œuvre théâtrale de Molière et de quelques autres.

Tout ça pour rappeler que le mot « condition » est distinct du mot « cause ». Il s'agit finalement, avec les arts, les sciences, les politiques, l'amour et la philosophie, de cinq processus enchevêtrés, si même il doit rester clair que la philosophie occupe la position singulière de ne pouvoir exister qu'avec les quatre autres, lesquels, eux, peuvent exister par eux-mêmes.

II

Quand j'ai diffusé, il y a trente ans, comme on fait en politique d'un mot d'ordre, la formule « l'ontologie, c'est les mathématiques », je ne doutais pas de son succès, mais je n'anticipais pas correctement ses inconvénients. Car, à tout prendre, cette formule a l'avantage d'être frappante, mais l'inconvénient d'être approximative. Rapportant de façon en quelque sorte identitaire et brutale un concept typiquement philosophique, celui d'ontologie, à la disposition d'une science particulière, les mathématiques, la formule ne tient pas assez compte du caractère complexe des relations entre la philosophie et ses conditions. Je vais donc revenir sur la relation entre mathématiques et philosophie à partir de mes considérations introductives.

Partons du premier des trois processus que j'ai définis dans mon premier point, à savoir l'histoire globale du quatuor des conditions. Comment ces quatre conditions telles qu'elles se présentaient à moi, en France, il y a mettons cinquante ans, dans le dernier tiers du XXe siècle, deviennent opératoires dans le champ philosophique ? Quelles inventions, quelles créations, quels problèmes, attirent alors mon attention ?

1. Dans le devenir des mathématiques, c'est l'œuvre de Paul Cohen, qui, avec *la théorie du forcing et le concept d'ensemble générique* remanie la théorie des ensembles, même par rapport aux inventions géniales de Gödel dans les années trente et quarante. C'est aussi la véritable percée de *la théorie des catégories*, qui tend à remplacer dans le champ mathématique la notion d'objet par celle de relation.

2. En politique, nous avons le bilan contrasté des *vastes mouvements de masse* qui ont animé la jeunesse universitaire et la classe ouvrière, presque dans le monde entier, pendant les années soixante et soixante-dix, notamment Mai 68 en France et la Grande Révolution Culturelle Prolétarienne en Chine, bilan que domine finalement *l'échec global de ces mouvements, échec qui accompagne et commande la faillite des Etats socialistes, Russie et Chine comprises, ainsi que les leçons que les communistes doivent tirer de cette faillite.*

3. Dans les arts, la plus consistante et durable nouveauté est repérable dans les arts plastiques, avec les *performances*, qui font du corps de l'artiste un élément décisif de son œuvre, et les *installations*, qui enregistrent la dimension provisoire et locale des structurations spatiales. Dans les deux cas, il s'agit de rendre provisoire tout agencement esthétique, de relativiser l'œuvre d'art dans le temps et dans l'espace, et de mettre ainsi fin à l'idée selon laquelle ladite œuvre aurait une valeur objective et éternelle.

4. En amour, la nouvelle liberté sociale dans le champ de la sexualité, la crise des autorités familiales, l'émancipation des femmes, la légalisation des procédés anticonceptionnels, la promotion d'une vision festive de l'existence, l'autonomisation du simple désir comme un droit revendiqué : tout cela converge vers une précarisation du lien amoureux, voire – avec les « sites de rencontre » – vers une sorte de calcul commercial quant à sa valeur et à son éventuelle mise en œuvre. Cependant, travaille autrement le remaniement par Lacan du point de vue psychanalytique sur l'amour, avec la fameuse formule : « l'être, c'est l'amour qui vient à y aborder dans la rencontre », laquelle fait de l'amour le lieu possible d'une ontologie du sujet.

Regardés dans leur détail, ces matériaux conditionnants conduisent assez naturellement, dans l'ordre de ce qui se présente comme « philosophie », à deux types de conséquences. D'une part, on trouve un relativisme culturel qui ne laisse plus de place à la notion de vérité universelle, tenue pour impériale et fictive, et qui privilégie la multiplicité des langues et des coutumes, le bariolage planétaire, et aussi les identités multiformes, préférées systématiquement aux grandes constructions à prétention globale. D'autre part, se développent des doctrines qui affirment la supériorité des actions sur les pensées, du mouvement pur sur l'organisation, de l'intuition sur l'Idée, de la vie sur les structures, de l'approche locale sur la valeur globale, des multiplicités complexes sur le dualisme dialectique, de l'affirmation sur la négativité, bref, qui reviennent, contre Platon, Descartes, ou Hegel, vers les stoïciens, Hume ou Nietzsche, ce qu'accomplit parfaitement Deleuze.

Cependant, c'est à partir des mêmes matériaux « en situation » que mon désir proprement philosophique discerne, lui, comme tâche essentielle, de reconstruire, contre les deux tendances naturellement dominantes et du reste largement complices, une discursivité spéculative capable d'organiser de façon neuve les questions que les courants dominants écartent de leur devenir, nommément celle de l'être, celle de la vérité, et celle du sujet. Et puisque c'est de l'ontologie que nous sommes partis, commençons par elle.

III

Si je considère mon travail de pensée sur l'être en tant qu'être dans le contexte de l'histoire de cette question, je vois qu'on peut distinguer rien de moins que six possibilités quant à ce qui a finalement été nommé « ontologie ».

D'abord deux positions finalement négatives :

1. Le concept d'être est vide, il n'a aucune signification. C'est le point de vue dominant aujourd'hui, pour les raisons que j'ai dites. C'est depuis toujours la position sceptique ; c'est la position positiviste aussi bien, comme on le voit chez Auguste Comte ; c'est la position explicite des vitalistes, et d'abord de Nietzsche ; mais c'est aussi la position de Wittgenstein et de tout le courant analytique américain. Pour tous ces penseurs, le mot « être » est en fait

une substantivisation illégitime du verbe « être ceci ou cela », substantivisation qui produit un pur non-sens.

2. Le concept d'être a un sens, il a une valeur positive. Mais nous ne pouvons pas avoir une connaissance effective de son contenu. La « chose en soi » est située au-delà de nos facultés cognitives. C'est comme on sait la position de Kant, mais finalement c'est la position « historiale » de Heidegger : le nihilisme contemporain, lié à la souveraine violence de la technique, fait que nous avons non seulement (comme l'a fait la métaphysique depuis Platon) oublié le vrai sens de l'être, sa destination, mais que nous avons oublié cet oubli même. Nous sommes donc devenus totalement étrangers non seulement au sens de l'être, mais même à la question de ce sens, qui cependant nous constitue historialement.

Ensuite quatre positions positives :

Elles affirment toutes que le mot « être » a un sens réel, et que nous pouvons avoir une connaissance vraie, fondée, de ce sens. Mais cette affirmation première se distribue ensuite en orientations essentiellement distinctes, et même radicalement opposées.

3. La troisième position ouvre la voie aux différentes formes du monothéisme : l'être se donne, de façon explicite et concentrée, sous la forme de l'Un, le Grand Un, ou l'Un comme Infini. C'est largement la position de la métaphysique classique, que Heidegger n'a pas tort de définir comme « l'arraisonnement de l'Être par l'Un ». En fait, c'est déjà la position d'Aristote, pour qui l'être est exhibé comme « acte pur » dans la transcendance d'un Dieu. Et le chemin de la donation du sens de l'être prend chez lui la forme philosophique, qui sera longtemps dominante, d'une *preuve* de l'existence de l'Un-de-l'être comme tel. Cependant, il y aura aussi le courant mystique, pour lequel l'accès à la transcendance de l'être est une expérience vitale et non une preuve. Expérience dont le récit est poétique plutôt que logico-mathématique : il relève de la condition artistique, comme on le voit chez Saint-Jean de la Croix, et non de la condition scientifique, comme on le voit par exemple chez Malebranche. Mais dans les deux cas, la pensée-vie n'accède à l'être que dans la forme d'une ascension vers l'Un-infini, forme moderne de l'Un-acte-pur d'Aristote.

4. Dans cette quatrième orientation, l'être se donne, non comme transcendance de l'Un-Dieu, rationnelle ou extatique, mais comme totalité de soi-même, incorporant des expressions multiples de soi, toutes immanentes à sa propre unicité. L'envoi de cette orientation est donné par Parménide, qui conclut de l'inexistence du non-être à l'absoluité-une de l'être dont tous les existants apparents sont comme des facettes irréelles. L'apogée spéculative de cette vision est évidemment réalisée dans le système de Spinoza, où l'on démontre l'unicité de la Substance (ou Nature), laquelle prodigue à l'intérieur d'elle-même des modes multiples dont tout l'être dérive de l'Un substantiel. Hegel propose une version dynamique de l'orientation immanente : l'être, en tant qu'absolu, est identique à son propre devenir multiforme. L'être est le devenir dialectique de soi-même, et le Savoir absolu procède à une récapitulation circulaire de ce devenir.

5. Dans cette cinquième orientation, l'être n'est donné comme pensable qu'en faisant l'économie de toute transcendance de l'Un, comme de toute totalisation unifiante. L'être, en effet est pure dispersion multiple, sur fond de vide. Autrement dit : l'Un (le vide) est du côté du non-être, cependant que l'être est dissémination atomique de soi-même. C'est, depuis Démocrite, l'orientation qu'on peut dire matérialiste, en ce qu'elle fait l'économie de tout sens général de l'être, au profit de la matérialité des atomes et de leurs combinaisons dans le vide. Epicure et Lucrèce s'en réclament.

6. La sixième orientation, enfin, affirme que la vraie pensée de l'être ne réside ni dans l'Un transcendant, ni dans l'Un immanent, ni dans la dispersion atomique, parce que l'être n'a pas d'autre être que la relation et les mouvements qui transforment et lient entre elles les relations. Autrement dit l'être se compose de relations entre relations. C'est la position d'Héraclite, et plus près de nous de Nietzsche, de Bergson ou de Deleuze. Elle est irriguée aujourd'hui par la mathématique des catégories. En particulier, la catégorie des catégories propose une pensée diagrammatique de l'être comme Relation des relations entre relations. Telle est l'orientation que résume le concept fondamental de foncteur, et son organisation systémique en faisceaux.

C'est au regard de cette complexité de l'héritage philosophique quant à ce que peut être une ontologie que, armé de ma vision de l'état contemporain des conditions, j'ai dû choisir mon orientation propre. Bien entendu, « choisir » n'est ici que métaphorique : l'orientation s'impose à un sujet-philosophe plus qu'elle n'est tranquillement choisie parmi les six possibilités. Et elle s'est imposée à raison de ma conviction, venue plus de la politique que des mathématiques, qu'il fallait proposer une ontologie « matérialiste », c'est-à-dire étrangère à toute transcendance, et qui cependant fasse l'économie du concept inconsistant de « matière », lequel ne désigne jamais que l'Un caché, et en vérité finalement impensable, de la multiplicité évidente de ce qui est. Et c'est alors, comme déjà l'avait fait le jeune Marx, vers la cinquième orientation que je me suis tourné : l'affirmation que l'être n'est que multiplicité pure, sans Un, et sans attribut spécifique, de type « matière » ou « esprit ».

Et voici qui est important : C'est seulement de l'intérieur de ce mouvement de pensée que je suis revenu vers la condition mathématique, pour chercher s'il s'y trouvait une structuration, aussi rigoureuse que possible, de ma décision spéculative. Et je l'ai trouvée dans la théorie des ensembles, parce que j'ai interprété cette théorie, singulièrement dans son axiomatisation de type ZFC, comme n'étant rien d'autre que l'étude systématique de toutes les formes possibles de multiplicités, sans Un ni qualité particulière. Je suis alors retourné vers la philosophie, muni d'une possible fondation formelle de ma décision ontologique primordiale.

Nous avons donc une sorte de cheminement circulaire, impliquant l'histoire de la philosophie quant à la question ontologique, mon être de sujet-en-philosophie, l'état actuel de la condition mathématique, et derechef mon être-philosophe, lequel va s'incorporer à l'histoire de la philosophie quant à la question ontologique. Cette circularité peut aussi se dire : état des possibles ontologiques ; prise (par moi) d'une décision philosophique en rapport avec ces possibles ; mouvement rétroactif vers la condition mathématique ; décision philosophico-mathématique d'y trouver une forme adéquate à la décision ontologique ; investissement de cette deuxième décision dans la première, par la formalisation mathématique du concept de multiples-sans-Un et de ses variantes ; incorporation à l'histoire de la philosophie d'une proposition ontologique supposée nouvelle (le livre *L'Être et l'événement*).

Dans ce mouvement circulaire, il est certes impossible d'examiner séparément mon usage des mathématiques et ma décision philosophique. Mais tout autant d'en tirer l'équation « ontologie = mathématiques ». Parce que l'énoncé de la décision initiale, à savoir « l'être est multiplicité-sans-Un » n'est d'aucune façon un énoncé mathématique. Et le détour par la théorie moderne des ensembles ne vaut pas preuve de la validité de cet énoncé initial. L'alliance organisée entre mathématiques et philosophie n'est forte que quand on observe ses conséquences. Et ce n'est qu'assez loin dans ces conséquences qu'on peut réellement apprécier cette portée. Dans les mathématiques, il faut aller au moins à la hauteur des théorèmes de Cohen concernant les sous-ensembles génériques. Et en philosophie, l'ampleur spéculative de mon propos ne se déchiffre que dans la dialectique entre être et événement, ce qui veut en réalité dire : entre détermination axiomatique et généricité, ou encore : entre les multiples singularisés par des propriétés précises, et les multiples universalisés par leur soustraction à toutes ces propriétés

Ce long préambule me permet de revenir, dans des conditions nouvelles, à une question centrale, encore aujourd'hui très disputée, très critiquée : quelle est en fin de compte la fonction exacte de la théorie des ensembles dans le discours philosophique qui est le mien ?

On peut répondre ainsi à cette question : Le système mathématique ZFC propose au philosophe une connaissance scientifique claire et rigoureuse de toutes les formes possibles de la multiplicité pure (sans Un et sans prédicat empirique de type « matière », « esprit », « atomes », « flux », etc.). Ces formes sont exclusivement définies par des éléments anonymes (des « ensembles ») à l'exclusion de quoi que ce soit d'autre, puisque les éléments d'un ensemble sont également des ensembles. Il n'y a pas de définition de ce que c'est qu'un ensemble, ce qui est cohérent avec leur fonction de pures formes de l'être, constituées de rien d'autre que d'autres formes. La « donation » des formes se fait seulement par des axiomes qui spécifient certaines propriétés relationnelles, nécessaires pour qu'on puisse identifier ce que c'est qu'une telle forme. La relation de base, appelée « appartenance », et notée $\in$, sert, en écrivant par exemple $x \in y$, à inscrire que l'ensemble x est un élément de l'ensemble y. La relation $\in$ peut être considérée comme unique : toute autre relation dans ZFC doit en effet être définie à partir d'elle, dans le contexte formel de la logique classique. Finalement, l'axiomatique fixe les propriétés de la relation $\in$ dans un contexte logique déterminé, et permet à partir de là de définir toutes sortes d'autres propriétés des formes ensemblistes du multiple pur, du genre « être transitif », « être infini », « être bien fondé », « être un ordinal », « être l'ensemble des parties d'un autre ensemble », « être une fonction », « être générique », « être un cardinal inaccessible », etc. Toutes ces propriétés donnent au philosophe les moyens de se mouvoir conceptuellement, avec une grande souplesse, dans ce qu'il en est des ressources propres de l'être en tant qu'être ainsi activé dans l'arène philosophique par le stimulant mathématique.

On demandera pourquoi il est nécessaire que cette exploration spéculative des ressources ontologiques se meuve – comme Aristote le dit déjà dans le livre Gamma de sa *Métaphysique* – dans le contexte de la logique classique, contexte défini essentiellement par le principe de non-contradiction (on ne peut affirmer à la fois la proposition p et la proposition non-p) et par le principe du tiers exclu (étant donnée une proposition p qui est bien formée, ou bien p est vraie, ou bien il est vrai que non-p, il n'y a pas de troisième position). La réponse philosophique réside en ceci : la plupart des propositions de l'ontologie exigent, comme le dit majestueusement Parménide, d'en passer par le raisonnement par l'absurde. Parménide commence en effet son parcours spéculatif en affirmant qu'il est impossible de montrer directement que seul l'être est, mais qu'on peut établir cette proposition en démontrant que le non-être n'est pas. A son école, on constate en effet souvent, en théorie des ensembles, qu'on ne peut démontrer directement l'existence de telle ou telle forme du multiple pur. Nombre de formes ne peuvent pas avoir de preuve de leur existence qui soit constructive et si possible intuitive. En revanche, on peut parvenir à des résultats de ce genre : « si je nie l'existence de cette forme du multiple, cela entraîne que je dois aussi nier la validité d'une proposition dont j'ai précédemment démontré qu'elle est vraie ». Le raisonnement par l'absurde permet alors de conclure que la forme considérée du multiple existe. On peut – on doit – aussi admettre une règle de tolérance maximale, qu'on peut formuler ainsi : « si cette forme du multiple, par exemple un certain type de multiplicité infinie, peut être définie clairement dans le langage formel, tant que je n'ai aucune preuve de la négation de son existence, je peux – en fait, je dois – admettre cette existence ». Tout le point est que la relation fondamentale d'appartenance, soit $\in$, est marquée ontologiquement du sceau de la logique classique. En effet, étant donné un ensemble x et un ensemble y, ou bien $x \in y$, ou bien non-$(x \in y)$. Il n'y a pas de troisième hypothèse, et on est donc sous la loi du tiers exclu, caractéristique de la logique classique. Mon énoncé spéculatif sera donc : l'ontologie est classique.

Maintenant, je dois aussi montrer que les axiomes de la théorie classique des ensembles, le théorie ZFC, peuvent se prévaloir d'une légitimité philosophique. Je l'ai fait je crois consciencieusement pour la totalité des axiomes du système ZFC. Je prendrai ici seulement trois exemples, portant sur les axiomes les plus contestés, y compris par certains philosophes.

Premier exemple : je valide, pour des raisons proprement ontologiques, le redoutable, contre-intuitif et souvent décrié « axiome du choix », qui est une des importantes caractéristiques du système ZFC. Cet axiome dit qu'étant donné un ensemble d'ensembles – ce qu'est, rappelons-le, tout ensemble –, il existe toujours une fonction qui m'autorise à exhiber un et un seul élément de chacun de ces ensembles, et ce sans exception. Autrement dit, étant donné un ensemble A, avec ses éléments x_1, x_2, x_3.....x_n, x_{n+1}...., il existe une fonction F, appelée fonction de choix, qui « extrait » de chacun des éléments x_1, x_2, x_3.....$x_{n,}$ x_{n+1}..., un et un seul élément de cet élément. On a en somme F(A) tel que pour tout x_n de A, on a un $y_n \in$ F(A), tel que cet y_n est le seul élément de F(A) qui soit un élément de x_n. La fonction F « choisit » *un* élément de chacun des éléments de A. Si bien que F(A) est comme une assemblée nationale de représentants des éléments (depuis Macron, on dit des « territoires ») de A, un élu par élément, F étant en quelque sorte la procédure électorale de désignation de ces représentants.

L'axiome du choix ne pose pas de problème électoral tant qu'on manipule des ensembles finis. Mais dans l'infini, comment définir une fonction qui associe un représentant à chaque élément de l'infinité des éléments de l'ensemble initial ? Le plus souvent, on ne peut pas prouver l'existence d'une procédure bien définie capable d'extraire d'un ensemble infini une telle infinité de représentants. L'axiome du choix a été contesté, parce qu'il affirme l'existence d'une procédure qu'on ne parvient pas à construire. En réalité, l'axiome du choix, dans le cas des ensembles infinis, affirme l'existence d'un infini particulier, qui est le résultat du choix simultané d'un élément de chacun des éléments, en nombre infini, de l'ensemble initial. Mais l'existence de cet ensemble ne peut pas, en général, être prouvée ou construite, et son existence n'est alors garantie, par l'axiome du choix, que comme un principe *a priori*.

J'admets cependant cet axiome pour trois raisons philosophiques :

La première est ce que j'appelle le principe de maximalité : l'ontologie matérialiste pose que toute forme du multiple clairement définie doit être acceptée en tant que possiblement réelle dans un monde, sauf preuve du contraire. Toute restriction de l'existence des formes du multiple est ontologiquement inacceptable, si ses raisons concernent uniquement la capacité de nos esprits finis à en construire effectivement les éléments. Ce serait là retomber dans l'empirisme relativiste. Notre impuissance à construire une forme de l'être multiple ne saurait être une bonne raison d'en refuser l'existence. Faute de contre-exemple, l'axiome du choix doit être tenu pour valide. Il nous présente une multiplicité clairement définie comme « représentative » d'une autre multiplicité, ce qui est en soit intéressant, et s'est avéré pratiquement nécessaire en Analyse moderne.

La seconde raison est logique. Par le beau théorème de Diaconescu, lequel opère dans le contexte de la théorie des catégories, l'axiome du choix impose, comme nous le désirons, que le contexte logique soit classique. La négation de l'axiome du choix ouvrirait donc la possibilité que la logique soit non classique, ce qui est ontologiquement inacceptable.

La troisième raison est plus proche des méta-mathématiques : Gödel a prouvé que si la théorie ZF (sans axiome du choix) est cohérente (sans contradiction interne), alors la théorie ZFC (avec axiome du choix) l'est aussi. L'admission de l'axiome n'introduit donc par elle-même aucun risque particulier.

Exemple du principe de maximalité, garantie du classicisme logique, conformité à la cohérence du contexte, l'axiome du choix est un précieux principe de l'ontologie spéculative.

Mon deuxième exemple est le suivant : J'accepte pour une raison philosophique majeure, l'axiome de fondation. Cet axiome dit que tout ensemble possède au moins un élément (ou plusieurs) qui n'a (ou n'ont) aucun élément commun avec l'ensemble initial. Pour ceux qui trouvent les formules plus claires que les discours, on peut ainsi écrire l'axiome de fondation :

Pour tout ensemble x : $\forall x$
Il existe au moins un ensemble y : $\exists y$
Tel qu'il est élément de l'ensemble initial : $y \in x$
Et tel que si z est un élément de y : $z \in y$

Alors z n'est pas élément de l'ensemble initial : $z \notin x$
Après quoi, vous pouvez ponctuer tout ça de façon lisible en une seule formule, dont vous notez qu'elle est infiniment plus courte que le même énoncé en langue maternelle

$$(\forall x)\ (\exists y)\ [(y \in x) \text{ et } [(z \in y) \rightarrow (z \notin x)]]$$

L'importance exceptionnelle de cet axiome dans le champ philosophique, et déjà à vrai dire dans les conditions de vérité politique ou amoureuse, tient à ce qu'il affirme ceci : *ontologiquement, l'Autre est présent dans toute Identité*. Toute forme multiple, en effet, admet *en elle-même* un élément dont la composition propre, l'être-multiple, lui sont étrangers. On peut aussi dire que l'axiome de fondation affirme *l'immanence de la négativité* : un point d'être existe *dans* toute forme multiple qui n'est pas du domaine de cette forme elle-même. Il en résulte, dans ma philosophie des vérités, que *rien de vrai ne peut être strictement identitaire*. Autrement dit, « vérité » et « universalité » sont inséparables.

De l'axiome de fondation, résulte qu'on ne peut jamais avoir l'énoncé réflexif pur $x \in x$. On le démontre sans trop de mal. Cela signifie, philosophiquement, *qu'aucune forme multiple ne peut être élément de la forme multiple qu'elle est*. Ce qui est en somme assez évident : la forme, ontologiquement, est un combat contre l'in-forme en tant que non-être, et ne peut, dans ce combat, s'affirmer comme étant déjà elle-même par et en elle-même. On peut aussi interpréter l'impossibilité absolue de l'énoncé $(x \in x)$ du côté de la théorie du Sujet. Cette impossibilité se dira alors : il n'existe aucune réflexivité qui soit intégrale. Ou encore : tout Cogito est partiel.

J'accepte enfin sans aucune restriction l'axiome de l'infini, lequel affirme l'existence d'un ensemble infini (et, par l'effet des autres axiomes, l'existence d'une suite infinie de types d'infinité). Cet axiome revient à dire qu'il existe des formes du multiple qui sont infinies, mais il ne le peut qu'en définissant avec précision un concept de l'infini. Il existe plusieurs façons de proposer une telle définition. Elles sont toutes opératoires et évitent des approches vagues et para-intuitives, du genre « l'infini, c'est ce qui est très grand ». Les plus communes de ces définitions consistent à définir une opération sur les ensembles, et à indiquer que cette opération peut être réitérée sans point d'arrêt.

Par exemple, soit un ensemble x, absolument quelconque, et soit l'ensemble dont le seul élément est x, qu'on appelle le singleton de x, et qu'on note {x}. Remarquez au passage que x est nécessairement différent du singleton {x}, pour la raison suivante : si l'on a x = {x}, il s'ensuit que l'ensemble {x} n'obéit pas à l'axiome de fondation. En effet, d'après cet axiome, il devrait y avoir un élément du singleton qui n'a aucun élément commun avec le singleton lui-même. Mais le seul élément du singleton est x. Donc il devrait y avoir un élément de x qui n'est pas un élément du singleton. Si le singleton est égal à x, on aboutit à l'absurdité selon laquelle il existe un élément de x qui n'est pas un élément de x. On a donc toujours, puisque nous assumons l'axiome de fondation : $\{x\} \neq x$.

Affirmons dans ces conditions l'existence d'un ensemble Inf tel que, si l'on a $x \in$ Inf, alors on a toujours aussi $\{x\} \in$ Inf. Il est clair que ce faisant, on ouvre une réitération sans point d'arrêt du type : x, {x}, {{x}},…,… réitération sans point d'arrêt qui est « toute entière » contenue dans Inf. On conviendra alors que Inf est une forme infinie du multiple.

Une propriété absolument fondamentale des ensembles infinis est qu'une partie stricte de ces ensembles peut être aussi grande que l'ensemble lui-même. L'axiome de la mathématique grecque, « le tout est plus grand que la partie », n'est pas valable pour les formes infinies du multiple. Il est en fait très simple de voir, sur l'exemple le plus intuitif d'ensemble infini, à savoir l'ensemble des nombres entiers positifs, nos bons vieux nombres « naturels », un, deux, trois, et la suite, que le prétendu axiome « le tout est plus grand que la partie » est faux dans l'infini, comme l'a remarqué avec force Galilée. En effet, il existe par exemple autant de nombres pairs que de nombres tout court. Vous faites tout simplement correspondre à tout nombre son double. A 1 correspond 2, à 2 correspond 4, et ainsi de suite, si bien qu'au total infini des nombres entiers, 1, 2,,3,…n, n+1… correspond exactement le total des nombres pairs, 2, 4, 6,…2n, 2(n+1). Et ceci, bien que les nombres pairs soient une partie stricte des nombres entiers. Eh bien, cette partie est aussi grande que le tout.

C'est du reste, à mon avis, une raison majeure d'admettre l'axiome de l'infini, que de s'engager dans une étude des formes du multiple qui excède nos intuitions, généralement limitées au fini. Là aussi, en somme, doit valoir le principe de maximalité : de tout ce qui est, sans contradiction formelle, clairement défini, on doit affirmer l'existence, car nos intuitions élémentaires n'ont aucune raison d'être la mesure de l'être en tant qu'être.

Cependant, définie sous la condition de cette part des mathématiques qui étudie les différentes formes du multiple pur, l'ontologie ne crée nullement à elle seule la possibilité d'une connaissance de ce que c'est que la création d'une vérité particulière dans un monde particulier. Certes, la pensée de ce que sont les formes du multiple, soit de ce que peut être l'être de tout ce qui est, est nécessaire. De fait, toute science est mathématisée peu ou prou. Même Lacan conclut que la psychanalyse a le mathème comme idéal. Cependant, toute théorie des vérités, et du sujet des vérités, armée d'une pensée de l'être comme tel, doit également inscrire son propos dans la singularité d'un monde et de ce qu'il propose comme matériaux à la pensée créatrice.

La philosophie doit donc tirer de ses conditions, et transformer en concepts, une théorie générale de ce que peut être, dans un monde singulier, un processus subjectivé à valeur universelle. Mais d'abord, qu'est-ce qu'un monde ? Bien entendu, un monde est ontologiquement composé d'une multiplicité, dotée d'une forme définissable, elle-même composée de multiplicités dont la mathématique peut parvenir à penser les formes. Mais quelle est la nature exacte, singulière, de cette « composition » ?

IV

Proposer une réponse à cette question est le but de mon livre *Logiques des mondes,* et je considère qu'il est désormais impossible de séparer *L'Être et l'événement* de *Logiques des mondes*, comme depuis il est devenu impossible de le séparer de *L'immanence des vérités*. Car on ne peut séparer l'universalité des vérités, établie par *L'Être et l'événement,* de leur singularité, pensée dans *Logiques des mondes*, et de leur absoluité, réfléchie dans *l'immanence des vérités*.

Je ne présente ici que quelques caractéristiques très générales de *Logiques des mondes*, dans le but de faire comprendre quels sont, dans ce livre, les usages de la condition mathématique.

— Le concept central de tout le livre est celui *d'identité dans un monde donné (ou aussi bien, dialectiquement, de différence dans un monde donné).* Le concept ontologique d'identité est strictement extensionnel : deux formes du multiple sont différentes si, et seulement si, il existe au moins un élément qui appartient à l'une des formes et pas à l'autre. Si ce n'est pas le cas, elles sont identiques. Le concept « mondain » d'identité, et donc de différence, est au contraire intensionnel, qualitatif, et relatif au monde considéré. Un ensemble x et un ensemble y appartenant au même monde sont affectés, en tant que paire, d'un *degré d'identité* variant entre un minimum μ (les deux objets sont, dans ce monde, totalement différents) et un maximum M (les deux objets sont, dans ce monde, pratiquement identiques). Les différentes valeurs possibles des degrés d'identité sont tirées d'un objet du monde affecté d'une structure d'ordre, qui est le *transcendantal* du monde en question.

— Un ensemble appartenant à un monde, vu sous l'angle de ses degrés d'identité avec tous les autres éléments du même monde, est un *objet* de ce monde. On voit donc qu'être un ensemble qui est élément de la totalité du monde – monde qui est lui aussi, dans son être, un ensemble – n'est pas une définition suffisante de ce que c'est qu'un objet, pour la raison qu'appartenir à un ensemble est une détermination seulement ontologique. Il faut, pour définir l'objectivité, prendre en considération le concept qualitatif et variable de degré différentiel d'identité, qui est en général extrêmement variable.

— Un objet du monde *est*, bien entendu, mais aussi *existe*. La présence d'un objet dans un monde déterminé est elle-même affectée d'un degré, qui est *le degré d'identité à lui-même de l'objet considéré*. Ce degré fixe ce qu'est *l'existence* de l'objet dans un monde. Si l'existence est maximale (le degré d'existence de l'objet est M), l'objet existe dans le monde « absolument ». Si en revanche l'existence est minimale (le degré est μ), l'objet n'est pas absent du monde, puisque son être d'ensemble appartient à l'être du monde, mais *il est un inexistant du monde*. Les degrés intermédiaires s'attachent à des existences dans le monde plus ou moins intenses.

— La logique globale de tout cet arsenal théorique concernant les objets suppose naturellement la théorie des ensembles (l'être d'un objet du monde est fixé par son appartenance, en tant qu'ensemble, à la forme de multiple qu'est le monde), mais son cœur est bien plutôt dans la théorie formelle des relations qu'est la *théorie des catégories*. Un objet est en effet existentiellement défini comme tel par ses relations variables avec tous les objets du monde, y compris lui-même (par la détermination de son degré d'existence dans le monde).

— Des considérations plus techniques, tirées des notions fondamentales de la théorie des catégories, permettent de conclure *qu'un monde possède globalement la structure d'un Topos de Grothendieck.*

Il y a donc autant de raisons de dire que pour moi « relation » ou « action », ou « existence dans un monde », ou encore « identité et différence », concepts majeurs de tous les vitalismes, relèvent de la théorie des catégories, que de dire que mon ontologie est la théorie des ensembles. Mais en réalité, dans les deux cas, un concept philosophique, sans corrélat mathématique fixe, reste au centre de la relation circulaire entre la philosophie et sa condition mathématique. Ce concept est « être comme multiplicité-sans-Un » dans le second cas, et « apparaître dans le monde comme intensité d'existence » dans le premier.

Dans *L'Être et l'événement*, le concept philosophique d'universalité est ontologiquement supporté par le concept mathématique d'ensemble *générique*. Un *ensemble générique est un sous-ensemble d'un ensemble infini donné, qui ne peut pas être défini par une propriété commune de ses éléments, propriété disponible dans le répertoire des propriétés définissable dans le monde à l'intérieur duquel on opère.* Autrement dit : vous avez un ensemble infini d'un côté, mettons A, de l'autre les propriétés P définissables dans ZFC à l'aide des constantes existantes, des opérateurs logiques, et de la relation $\in$. Un sous-ensemble de A sera « générique » s'il n'est pas défini, en utilisant l'axiome de séparation, par une quelconque des propriétés P disponibles. Donc s'il est bien un sous-ensemble G de A, mais qu'il n'est pas défini, ni définissable, comme « l'ensembles des éléments de A qui ont la propriété P ».

On peut finalement dire que la seule propriété de G est d'être un sous-ensemble de A. En quoi il est un sous-ensemble générique, un « pur » sous-ensemble, non relié comme tel aux propriétés disponibles dans le langage de la théorie.

J'ai montré qu'on trouve ici, potentiellement, une formalisation de la distinction, particulièrement importante chez Heidegger, entre « savoir » et « vérité » : un savoir est une propriété commune à des choses du monde, propriété exprimée dans le langage dominant. Une vérité est une création « hors savoir », inexprimable telle quelle, au moment de sa création, dans le langage dominant (et donc souvent refusée par les partisans acharnés de ce langage). On croise aussi en ce point l'opposition platonicienne entre « opinion » et « connaissance vraie ». La première est toujours déjà circulante dans les propos partagés, la seconde demande un mouvement radical d'épuration, au centre duquel se profile une Idée.

On comprend aisément que dans l'ontologie du multiple, le support des opinions ou des savoirs communs soit un sous-ensemble de la situation extrait de cette situation par l'axiome de séparation, donc la réunion de tous les multiples qui ont la même propriété, propriété elle-même repérée par tous dans le langage dominant. Mais que si création d'une vérité il y a, elle exige d'avoir comme support d'être un sous-ensemble générique, indifférent au langage dominant.
Paul Cohen a découvert, au tout début des années soixante du dernier siècle, une méthode générale pour produire des ensembles génériques, dans le contexte d'un modèle ensembliste de la théorie ZFC. C'est pour moi *le support enfin découvert, au niveau de son être pur, de ce que c'est qu'une vérité* ***universelle****, puisqu'un ensemble générique se tient au-delà de toutes les identités repérées dans le monde existant.*

S'agissant du concept de ***singularité****, son statut est clairement défini, dans le contexte de la théorie des Topoï, sous-partie de la théorie des catégories, par le concept d'existence d'un objet dans un monde.*

Finalement, l'antique distinction entre « universalité » et « singularité » est élucidée, sous la condition de contextes mathématiques distincts (théorie ZFC, théorie des Topoï), d'abord par la distinction entre être-multiple et existence-dans-un-monde, ensuite par la distinction plus technique entre « ensemble générique » d'une part et « degré d'existence relationnelle » dans un monde d'autre part.

J'ai donc rendu possible, dans mes deux premiers livres de métaphysique contemporaine, d'opposer l'universalité – la généricité – des vérités à la singularité – l'existence, en un monde donné – des opinions. Mais il reste à comprendre d'où peut se soutenir que les vérités sont absolues, c'est-à-dire non seulement opposées à toute interprétation empiriste, mais encore garanties contre toute construction transcendantale, ce qui veut dire, dotées d'un être indépendant du ou des sujets qui en furent cependant les acteurs, en quelque sorte historiques, dans des mondes déterminés.

Disons-le autrement. Dans *L'Être et l'événement*, je montre comment l'exception universelle d'une vérité peut surgir, événementiellement, sous les espèces d'une multiplicité générique. Dans *Logiques des mondes*, je montre que les vérités, dont *l'être* est exceptionnel, n'en *existent* pas moins, comme singularités, comme œuvres marquées de finitude, dans des mondes réellement existants. Ainsi j'ai pu garantir la possibilité ontologique de multiplicités suffisamment distantes du monde où elles adviennent pour avoir une valeur universelle. Et j'ai pu garantir cependant que l'universalité d'une œuvre de vérité n'exclut nullement qu'elle soit le résultat d'opérations particulières, et que ses matériaux primitifs aient existé dans un monde particulier.
Finalement :

— Avec le dispositif ontologique de la *multiplicité pure*, je suis sorti du règne de la transcendance, ou de l'Un, comme unique garantie d'être du Vrai.

— Avec le dispositif de *l'universalité générique*, je suis sorti de l'empirisme et du relativisme, qui nient l'existence de vérités universelles.

— Avec la théorie de *l'existence dans un monde* de la construction des vérités génériques, et donc de leur *singularité*, je suis sorti de l'idéalisme, qui tente d'extraire entièrement du monde réel la puissance du Vrai pour en faire un processus entièrement subjectif.

Mais il fallait aussi garantir, contre le relativisme dominant, le point que voici. Le fait que les vérités dépendent, quant à leur surgissement, d'un appareillage événementiel, et que leur être soit générique, n'interdit nullement qu'une fois œuvrées dans un monde, elles soient absolues en un sens précis. Et ce sens ne se dégage cette fois, en relation avec la condition mathématique, ni des procédures du forcing de Cohen, ni des subtilités de la théorie des Topoï, mais d'un autre secteur encore de la mathématique fondamentale, qui est la théorie des infinis, encore en plein essor dans les dernières décennies. C'est tout l'enjeu de mon troisième livre, *L'Immanence des vérités*, achevé comme vous savez en 2018.

V

Je ne peux ici qu'esquisser la démarche de ce dernier livre, quant à la relation entre la philosophie et sa condition mathématique.

L'universalité ontologique ne garantit pas à elle seule l'absoluité des vérités. Le relativiste peut toujours dire que ce n'est que la garantie d'une circulation possible d'une œuvre à support générique d'un monde à un autre, voire l'imposition impériale d'une généricité locale à des mondes culturels disparates. C'est ce que m'objectait, par exemple, mon amie Barbara Cassin : « l'universalité est toujours l'universalité de quelqu'un », me disait-elle, avec cette force en quelque sorte naïve qui résulte toujours d'une fusion entre empirisme (la prétendue universalité comme une chose sensible et culturelle, un fait de langue) et idéalisme (tout existe « pour quelqu'un »).

Le livre nouveau lui répond en substance que l'absoluité du vrai est elle-même garantie par le type d'infinité avec lequel l'œuvre-vraie – qui est toujours, ontologiquement, un fragment fini d'un devenir générique et donc universel – entre en relation. Le cœur de *L'Immanence des vérités* est d'élucider ce qu'est cette relation immanente entre l'œuvre de vérité et l'infini, relation qui fonde l'absoluité du vrai.

Je m'attends bien entendu à ce que Barbara Cassin, prenant l'exemple des religions, me dise que « l'absoluité est toujours l'absoluité de quelqu'un ». Mais une œuvre de vérité est un existant dans les mondes, et n'a donc rien à voir avec une religion. Une révolution, un amour, un tableau, un théorème, sont là, sous les yeux de tous. Et tous finissent par y saisir l'invariance de ce qui a valeur universelle, parce que tous participent, dans l'expérience subjective qui les y confronte, à la relation entre l'œuvre finie et l'infini latent de son être.

De la médiation mathématique de ce point, particulièrement complexe, je ne peux pas donner ici ne serait-ce qu'une claire idée générale. Disons que la théorie contemporaine des infinis autorise qu'on définisse philosophiquement ce que c'est qu'un *attribut de l'absolu*. L'absolu, quant à lui, pour les mathématiciens, ne peut être que formel : *c'est la collection, mentalement situable (définissable), mais logiquement inconsistante, de toutes les formes possibles du multiple-sans-Un*.

Notons au passage que les mathématiciens, toujours intuitivement géniaux dans les nominations, ont donné à cet absolu qui, bien que logiquement inconsistant, existe suffisamment pour qu'on en décrive certaines propriétés, le nom de V – lequel peut dire bien des choses, sans doute : Grand Vide, mais aussi bien : Lieu des Vérités.

Ce qui « infinitise », et par là-même absolutise, une œuvre de vérité qui est dans son réel à la fois finie, singulière (existante) et universelle (générique), c'est son lien médié avec l'absolu ainsi défini. La médiation est assurée par un des attributs dont peuvent « participer », – comme c'est le cas dans les intuitions décisives de Spinoza sur ce point, quand il définit les « attributs de la Substance » – des œuvres réellement existantes dans des mondes particuliers.

Le coup de génie mathématique a été de définir clairement ce que c'est qu'un tel attribut de l'absolu. Le nom mathématique est : « classe transitive de V (l'absolu), sur laquelle existe un plongement élémentaire de l'absolu lui-même ».

Je ne peux entrer ici, même approximativement, dans le sens exact de cette définition, même si, comme toujours en mathématiques, l'idée sous-jacente est bien plus claire que les calculs qui en sous-tendent la validité. Toujours est-il que cette *définition* existe. Et qu'en outre, on connaît une condition fondamentale de *l'existence* d'au moins un attribut de l'absolu : c'est l'existence d'un « très grand » infini (« large cardinal », disent les anglophones) de type spécial, appelé par moi « complet » pour de solides raisons philosophiques.

J'ai pu alors montrer, toujours par une circulation serrée entre philosophie et mathématiques, que la définition (mathématique) de ce qu'en philosophie je renomme un « attribut de l'absolu », supporte clairement le sens spéculatif que je lui donne. Il ne reste alors au philosophe, quel qu'il soit, qu'à entrer dans les détours difficiles de la construction des infinis, et à y trouver le chemin d'une absolutisation des œuvres de vérité, dont j'ai déjà démontré, allant et venant entre philosophie et mathématiques, qu'elles étaient à la fois singulières et universelles, et dont il ne restait plus qu'à montrer qu'elles peuvent être également absolues.

Ce que je crois avoir fait. Je l'ai fait à un âge suffisamment avancé pour que cette réussite soit vraiment réconfortante ! Permettez-moi de finir sur cette orgueilleuse assertion !

Le Triangle philosophie – mathématiques – psychanalyse / The Triangle of Philosophy – Mathematics – Psychoanalysis

Filozofski vestnik | Volume XLI | Number 2 | 2020 | 37–55 | DOI: 10.3986/FV.41.2.02

Oliver Feltham*

"One or Many Ontologies? Badiou's Arguments for His Thesis 'Mathematics is Ontology'."

This is not a story of *hubris*, of a philosopher seeking to make his name by announcing a provocative thesis "mathematics is ontology" and then, decades later, fighting to prevent his name from being unmade by commentators who cannot quite bring themselves to accept that identity as definitive. This is an enquiry into an argumentative strategy which leads to a crucial question: which initial decisions on ontology lead to there being one or many ontologies?

Part of the appeal and strength of Badiou's philosophy lies in complex way he sets up the tasks of a set-theory based ontology in *Being and Event*, and then of a category-theory based phenomenology in *Logics of Worlds*. It is the number of argumentative steps and choices made in these preambles – many of which are reinforced in the recently published seminars – that turn Badiou's philosophy into fertile ground not just for contesting interpretations but for the genesis of other philosophies. Indeed, it is the case that Badiou's philosophy not only spawns orthodoxies and imitations, like those of Derrida and Deleuze, but also heterodoxies and rival philosophies. But the challenge for any departure from a putative Badiousian orthodoxy is to retain both the audacity and systematicity of Badiou's work. Can we, in turn, take steps in a new conceptual construction, and then trace the consequences of each of these steps, in a manner constrained by a previously-existing and consistent discourse, such as ZFC set-theory? Such a task goes beyond the question of making or unmaking, repeating or forgetting, proper names.

In this preliminary enquiry, let us explore Badiou's initial decisions on ontology.

The argument that mathematics is ontology

In the first meditation of *Being and Event*, Badiou sets out its inaugural thesis: "Mathematics is ontology – the science of being qua being".[1] One page later he

[1] Alain Badiou, *Being and Event*, trans. Oliver Feltham, Bloomsbury, London 2005, p. 4.

* American University of Paris, Collège International de Philosophie

clarifies, "Mathematics writes that which of being itself, is pronounceable in the field of a pure Theory of the multiple".[2] In Meditation One he sets out requirements for ontology and then in Meditation Three he proceeds to identify a particular kind of mathematics that satisfies those requirements.[3] But this is too simple: there is a puzzle here: what comes first – the argument that determines the requirements for ontology, or the identification of set theory as ontology? One cannot argue that a particular discourse is uniquely suitable for the task of ontology without pronouncing as to the nature of being and thus engaging, at least in a preliminary manner, in ontology yourself. Is there not a problem of circularity here?

On the one hand, there are these strong readings of canonical texts in the history of metaphysics that are supposed to set up the choice of set theory as ontol-

---

2 *Ibid.*, p. 5.

3 *Ibid.*, p. 29. In a broad outline this passage appears deceptively simple; however, there are several difficulties that confront the interpreter who pays attention to the details. For instance, there has been much debate over the concepts of inconsistent multiplicity and consistent multiplicity: do they form Badiou's version of Heidegger's ontological difference (Hallward, Nancy, Pluth, Feltham vs Brassier); does Badiou have or even need an adequate account of the consistent multiplicity of 'non-ontological situations' (Feltham, Besana, Hallward); what does it mean to claim that the count-as-one has no agent (Desanti, Feltham and Clemens)? What is the status of the claim that there must be a redoubled count-as-one establishing the state of a situation, because being is not presented as chaos, or what is the status of the claim that this second count-as-one has to include the name of the void, which errs in presentation, for otherwise there would be chaos? There are various ways of resolving these difficulties, but in order to develop a coherent interpretation of the argument 'mathematics is ontology' it seems to me there is a more general puzzle that takes priority, and that is the puzzle of what comes first, the determination of the criteria for ontology or the identification of mathematics and, in particular, ZFC set theory as ontology. See Ray Brassier, "L'Anti-phènomene – présentation et disparaître", in *Ecrits autour de la pensée d'Alain Badiou*, ed. B. Besana and O. Feltham, Harmattan, Paris 2007, pp. 55–64 ; Bruno Besana, "Quel multiple ?" and "Replique ; l'événement de l'être", *Ibid.*, pp. 23–40, pp. 125–30 ; J-T. Desanti, "Some Remarks on the Intrinsic Ontology of Alain Badiou" in *Think Again: Alain Badiou and the Future of Philosophy*, ed. P. Hallward, Continuum, London 2004, pp. 59–66; O. Feltham & J. Clemens, "An Introduction to Alain Badiou's philosophy", in A. Badiou, *Infinite Thought: Truth and the Return of Philosophy*, ed. and trans. O. Feltham & J. Clemens, Continuum, London 2003, pp. 1–38; Peter Hallward, *Badiou: a Subject to Truth*, University of Minnesota Press, Minneapolis 2003; Jean-Luc Nancy, "Philosophy without conditions", in *Think Again: Alain Badiou and the Future of Philosophy*, ed. P. Hallward, pp. 39–49; Ed Pluth, *Badiou: a Philosophy of the New*, Polity Press, London 2010.

ogy, yet at the same time the strong theses and leaps in these readings seem to be either anchored or driven by the prior choice of set theory as ontology. Sam Gillespie wrote "Given that being qua being is given to us exclusively through ontology, it follows that it is very difficult to summon a mathematical ontology to a tribunal of ontology which would tell us whether or not it is a legitimate ontology. Ontology is in no way a set of descriptions of being that preexists its own operations".[4]

There are two solutions to this general puzzle. They break the circularity by positing a basic order.

— One can argue that it is the philosophical arguments that come first, namely a kind of history of being to rival that of Heidegger, and the election of set-theory comes second. Let's call this the 'philosophy solution', or rather, the 'argument from philosophy'.
— Or one can argue that what comes first is the naming of Cantorian set-theory as a truth-procedure within the field of science, which subsequently conditions philosophy and generates this sub-discipline of 'metaontology'. Let's call this the 'argument from the condition'.

The challenge for these two solutions, the criteria for us choosing one over the other, will be whether it succeeds in chasing down and eliminating the occasional appearance of arbitrariness in the argument that explains why mathematics is ontology.[5]

Let's first examine the 'argument from philosophy'.

4 Sam Gillespie, "L'être multiple présenté, représenté, rendu vrai", in *Ecrits autour de la pensée d'Alain Badiou*, ed. B. Besana & O. Feltham, p. 73.

5 Or do we accept that philosophy is a not an enterprise uniquely motivated by conceptual construction and argumentation; rather, Alain Badiou was seeking to give his own name to being qua being via the law of the father as Quentin Meillassoux provocatively suggests in his essay "Décision et indécidabilité de l'événement" in *Autour de* Logiques des Mondes, ed. O. Feltham, D. Rabouin and L. Lincoln (eds.), Editions des Archives Contemporains, Paris 2011, pp. 135–6.

The argument from philosophy

The initial philosophical argument in *Being and Event* results in the following requirement: being must be thought as inconsistent multiplicity. This claim is set up in four steps:

1) The One is not: The starting point, anchored in the history of philosophy, is the thesis that the One is not, explored by Plato in the last four hypotheses of the *Parmenides*.
2) There is inconsistent multiplicity: Parmenides' exploration of the hypothesis "If the One is not, nothing is" leads to the concept of *plethora*, of a multiple that disseminates itself internally without limit and thus without ever encountering some ultimate elements or atoms: this is what Badiou calls 'inconsistent multiplicity'.
3) There is a count-for-one: Nevertheless, Badiou argues, there is some Oneness, an effect of unity and so there must be an operation of unification that distributes inconsistent multiplicity (before) and consistent multiplicity (after its effect). A consistent multiplicity is unified.
4) The nothing is: within consistent multiplicity, inconsistent multiplicity is nothing and as such it subsists in structured presentations as the void. What is 'void' within a structured presentation is both the operation of its count-for-one and the material from which all structure is composed (inconsistent multiplicity).

Badiou then adds a further, separate, requirement for ontology: ontology must be compatible with contemporary praxes of the subject.

The strategy of this argument is to claim that a philosophical confrontation with the impasses of the history of ontology entails these four theses on the one and multiplicity. It is these claims which set up the requirements for ontology. After an examination of various kinds of discourse, it turns out that the only discourse capable of exploring and unfolding the implications of these theses is a particular kind of set theory. We find this 'argument from philosophy' in Meditations 1, 2 and 6 of *Being and Event*, developing readings of Heidegger, Plato and Aristotle, and we find it massively in the Seminar from 1983 to 1986. There are two versions of this argument, which we shall call the *via negativa*, and the historial.

On the one hand, Badiou will engage in a negative demonstration – the *via negativa* – arguing that ontologies committed to the being of the One end in ruins. For instance, in the *Short Treatise of Transitory Ontology*, he rapidly pulls apart Aristotle's necessary supposition of a global unity, a prime-mover in order to resolve difficulties in the theory of substance as an impossible union of matter and form.[6] In *Being and Event* he claims that ontology repeatedly falls into an abyss or a labyrinth when it tries to resolve the relationship between the discrete and the continuum, and also when it tries to resolve the relationships between the one and the multiple, or parts and the whole.[7] This negative demonstration is a little like Kant's proof of the systematicity of transcendental philosophy through its resolution of the antinomies of pure reason, antinomies that ruin all other philosophies. The simplest form for this demonstration would be an argument from the absurd where an initial premise ineluctably leads to a contradiction and hence one is obliged to jettison the initial premise (namely the being of the One).

The problem, of course, is that despite the variety and breadth of Badiou's examples of paradox and contradiction in the history of ontology, strictly speaking the demonstration can never be exhaustive because the history of philosophy is still open. Someone – perhaps they are reading this article right now! – might well come along and write a coherent ontology on the basis of the premise that being is One. It is difficult to demonstrate impossibility outside the confines of a simple formal system, in which one options for argument are exhaustible.

Hence Badiou's frequent recourse to another version of the argument from philosophy, the *historial*. For instance, he claims that the being of the One is the fundamental commitment of all onto-theology, adopting Heidegger's term for his purposes. However, the orientation of thinking that Badiou is carving out holds itself contemporary to – or tributary of – Nietzsche's declaration that 'God is dead', a declaration that mortifies all Gods, those of metaphysics, religion and poetry alike.[8] There is no going back on Nietzsche's epochal declaration. Hence the entire project of onto-theology is closed, and ontology must begin on anoth-

---

6 Alain Badiou, *Court traité d'ontologie transitoire*, Editions du Seuil, Paris 1998, p. 15 ; Alain Badiou, *Briefings on Existence: A Short Treatise on Transitory Ontology*, trans. N. Madarasz, State University of New York Press, Albany 2006.

7 Badiou, *Being and Event*, pp. 5, 81, 281.

8 See the "Prologue: God is Dead" in Alain Badiou, *Briefings on Existence*, pp. 21–32. See also Quentin Mellassoux's excellent pun, mentioned above, on the proper name 'A bas l'Un-

er basis than the being of the One. Again in the Seminar, and in other texts, one finds such claims: the thesis "every situation is infinite" is pinned to a reading of Pascal, but it is also situated as a defining thesis of modernity, a thesis that opens up modernity, a historical decision. Badiou often adopts this *historial* version of the argument from philosophy when he is interpreting and critiquing Heidegger's history of being: it is as though he is setting up, by means of his own interpretations of canonical philosophical texts, a rival history of being.

Here you can see the historial strategy runs into another problem, one of circularity. If being has its own history – which produces these theses 'the One is not', 'every situation is infinite' – then what is the original language or discourse in which that history is disclosed? We haven't yet arrived at set-theory, we are still identifying the preliminary theses which will subsequently justify the election of set theory as ontology.

So both the *via negativa* and the historial versions of the argument from philosophy run into problems. I contend that it is these problems that generate the occasional appearance of a prevalence of *choice* or of *decision* in Badiou's construction of his interpretations of philosophy. This is not a matter of failing to convince specialists of the cogency of Badiou's interpretation – specialists are never convinced, even by each other – but of the overly apparent tactical choices in his readings.

Badiou, of course, is well aware of the problem of circularity in the justification of an inaugural decision as to the nature of ontology and philosophy. It forms one of the central topics of his analysis of the poem of Parmenides in the eponymous seminar of 1985-86.[9] In the seminar he appears to borrow an idea from Guy Lardreau concerning the foundation of philosophy, which is to argue that the inaugural decision as to the nature of philosophy is actually taken from the

Dieu' in "Décision et indécidabilité de l'événement", in *Autour de* Logiques des Mondes, p. 136.

9 Badiou writes, "If philosophy decided itself from this point and this point alone – thinking at the same time the way of being and the way of nothingness, and instituting a regime of decision –, and if this point was the absolute origin of the existence of philosophy's discursive apparatus, then one must declare, as I do, that philosophy had been decided well before." See Alain Badiou, *Le séminaire: Parménide, L'être I – Figure ontologique*, Fayard, Paris 2014, p. 54.

standpoint of another discourse.[10] Badiou then claims that 'philosophy is under a supplementary condition', and insists on the *heterogeneity* of this condition and its *encounter* with philosophy as productive of decisions. This recalls the supplementary fifth thesis stipulating the requirements for ontology that we mentioned above and then left aside: that ontology must be compatible with contemporary praxes of the subject. Let's retain these two terms 'heterogeneity' and 'encounter' – they will guide our conclusion. In his seminar *Parmenides* Badiou thus adopts the argument from the priority of the condition as the solution to the problem of circularity, the problem that affects inaugural decisions that open up a philosophy such as the thesis "mathematics is ontology". Let's turn to this argument from the priority of conditions.

Argument from the priority of conditions

The argument from the priority of conditions for the thesis 'mathematics is ontology' runs as follows. Philosophy only occurs historically in the form of a 'com-possibilization', that is to say, a naming and theorizing of truth-procedures occurring in four different conditions of art, science, politics and love. A philosophy develops a coherent system of reference by constructing its own names for these generic truth procedures, procedures that trace out the consequences of anomalous events occurring in each of these extra-philosophical fields. For instance, *Being and Event* is an attempt to philosophically name what occurs in the condition of science as a truth procedure faithful to the "Cantor-event", but it also names what occurs in poetry in Mallarmé's fidelity to the 'crisis in verse', there are brief references to Engels and Mao in the political thinking of the state, and there is an engagement with psychoanalysis as intervention in the condition of love via the exegesis of Lacan's concept of the subject.

As such, it is the philosopher's initial fidelity to the Cantor-event that decides that Zermelo-Fraenkel set theory with the Axiom of Choice will determine the nature of ontology, and hence ground these philosophical theses such as "there is no being of the One". First comes fidelity to the condition, then philosophy. Set theory itself is ontology, and its philosophical naming and theorization is called "metaontology". Alberto Toscano and Ray Brassier explored this strategy in a 2004 article where they claimed that "mathematics is ontology" was

[10] *Ibid.*, p. 62.

Badiou's own intervention, his own fidelity to the Cantor-event.[11] It is Badiou's fidelity to Cantorian set-theory that determined his understanding of ontology, and his subsequent disqualification of various philosophical ontologies.

At this point another suspicion of insufficient justification emerges. In the development of the argument of *Being and Event* it turns out that it is not so much mathematics in general but specifically ZFC set theory that is ontology. Commentators have asked why one would choose this particular variant of set theory (although Badiou does give a number of cogent reasons during the construction of *Being and Event*). Others have asked why choose set theory as a metonymy for mathematics and not another sub-discipline of maths, given that the entirety of mathematics is ontology.

This second appearance of insufficient justification is addressed in section four of this article. For the moment let's note the advantage or virtue of the argument from conditions: it leads to a philosophical exploration of the singularity of set-theory, which allows the identification of three peculiar characteristics that are grasped as demonstrating its vocation for ontology.

The first characteristic of Zermelo-Fraenkel set theory is that it has no defined object. There is no explicit definition of a set. As such the theory has no stipulated object. Rather the theory employs one primitive relationship between multiples; that of belonging, and this relationship may be used in the ways specified by the axioms. Various kinds of set then emerge from that manipulation. The most striking demonstration of this emergence without definition occurs in the explanation of the axiom of the union set.[12] This axiom states that for every set there exists the set of the elements of the elements of that set. This immediately cancels out any substantial distinction between 'sets' and 'elements', which are clumsy terms from natural language. Indeed there is only one kind of variable in this form of set theory. Every element of a set is itself a set composed of elements which are themselves sets and so on. Set theory can thus consistently write the decomposition of multiples as more multiples at other levels. Through the axiom of the power-set, it can also write the composition, the putting together of

[11] Ray Brassier and Alberto Toscano, "Postface: Aleatory Rationalism", in Alain Badiou, *Theoretical Writings*, Continuum, London 2005, p. 255.

[12] Badiou, *Being and Event*, pp. 63–64.

larger multiples through the assemblage of all of the sub-groups of elements of an initial set. So on the basis of an initial multiplicity one can generate other multiplicities through analysis or synthesis, below it and above it so to speak. The series of sets generated continues to such a point that Badiou states with glee: set theory's "proliferation of infinities" achieves "the complete ruin of any being of the One".[13]

It is not a foundational definition but the axioms that structure and render consistent the situation that is ZFC set theory. This is an exemplary case for pragmatism: *use defines being*; that is to say, what counts as being, as multiples of multiples, is only ever whatever is encountered through the facility of writing and manipulating sets and whatever might block that facility, such as Russell's paradox. As such, there is no unifying or totalizing speculative gaze at being; it is neither seen nor grasped but encountered bit by bit in the scriptural construction of different kinds of sets, in a kind of constrained unfolding of multiples of multiples.[14] Hence being-qua-being is not an external object, but insists in a writing.

The second peculiar characteristic of set-theory that Badiou seizes upon is that, in Lacanian terminology, it encounters the 'real' in its symptoms. In non-Lacanian terms, set theory has discovered a number of paradoxes and problems that stymied its efforts at formalization. It is Cantor, for instance, and not Badiou who originally develops the concept of an "inconsistent multiplicity", precisely in reaction to the discovery of sets that could not be totalized without contradiction (the set of all sets that do not belong to themselves). Amongst these paradoxes and problems Badiou briefly mentions the controversy around the Axiom of Choice, he devotes several pages to Russell's paradox, but the entire last third of the book is devoted to the problem of the continuum and its implications. In the Introduction he announces, "What seemed to me to constitute the essence of the famous "problem of the continuum" was that in it one touched upon an obstacle intrinsic to mathematical thought, in which the very impossibility which founds its domain is said".[15] Indeed, in Meditation 27 he declares that the

13 Badiou, *Being and Event*, p. 273.
14 See my claim in "Translator's Preface", in *Ibid*., p. xxiv.
15 *Ibid*., p. 5.

measure of the excess of the cardinality of an infinite set's powerset over the cardinality of that infinite set, constitutes the "impasse of being".[16]

The third peculiar characteristic of set theory as a kind of discourse is that it historically took decisions on these symptoms. That is to say, mathematicians found resolutions to these paradoxes which in turn opened up new and further domains of formalization. For instance, Zermelo's Axiom of Separation allowed his version of set theory to avoid Russell's Paradox (Med.3).[17] In Badiou's exegesis, set theory encountered the ontological paradox of the relationship between the continuum and the discrete in its discovery of the undecidability of the excess of the cardinality of a powerset over the cardinality of its original set if the latter is infinite. However, in Paul Cohen's invention of the procedure of forcing a way is found in each individual procedure to decide on that undecidable excess. Badiou calls these resolutions of paradoxes or circumventions of impasses in formalisation "decisions on being". He claims that in a belated echo of Parmenides they show how "the same, is, both thinking and being".[18]

At this point of our exploration we can detect two metaontological consequences of these 'decisions on being' carried out by set theory. The first concerns the ontological or set-theoretical inscription of the 'generic' multiplicity of truth procedures, and the second the possibility of an alternative 'history of being'.

The first consequence of these 'decisions on being' concerns their multiple occurrence within praxes that follow events, that is to say, within what Badiou calls 'generic truth procedures'. For instance, when it comes to the set-theoretical continuum problem, or, in his metaontological terminology, the 'impasse of being', he claims that there are four types of decision on that impasse which constitute the four grand orientations of thought: the transcendental, the grammarian-constructivist, the indiscernible-generic, and the praxical.

16 *Ibid.*, p. 281.

17 Note that Badiou has been fascinated with these decisions at the points of impossibility within formal systems since his early essay "Subversion Infinitésimale", in *Concept and Form, volume I: Key Texts from the 'Cahiers pour l'Analyse'*, ed. Peter Hallward and Knox Peden, Verso, London 2012.

18 Badiou, *Briefings on Existence*, p. 52.

He then goes on to claim that Cohen's solution to the continuum problem by means of forcing and the generic subset provides an ontological schema for all generic-truth procedures. All generic truth procedures – all praxes that are faithful to an event – thus involve decisions on the impasse of being. So at this point the argument from conditions leads to a multiplication of 'decisions on being' within all those generic truth-procedures that a philosophy might recognize, and compossibilize in its attempt to be contemporary with recent events in its conditions.

Interestingly this consequence does not lead to a *reduction* of the suspicion of insufficient justification that attended the election of ZFC set theory in particular as ontology. Rather it presents an *exacerbation* of that insufficiency through its transformation into the radical contingency of events and truth-procedures. In other words, there is insufficient justification within ZFC set theory itself for the continuum hypothesis or for other hypotheses as to the cardinal quantity of the powerset of an infinite set – this is why Badiou terms them 'decisions on being'. If decisions on being occur within truth-procedures not just in the realm of mathematics but also in politics, art and love, then these moments of 'insufficient justification' multiply in such practices. However, at the same time, the insufficiency at stake in these decisions within these practices can also be understood as a form of radical contingency in line with that of the event.

The second consequence of these set-theoretical 'decisions on being' is that via their metaontological interpretation they intervene in the philosophical or historical problems of ontology. Throughout *Being and Event*, Badiou remarks that there are a series of unresolved problems in the history of ontology concerning the one and the multiple, the part and the whole, the finite and the infinite, and the relationship between the discrete and the continuum. It just so happens that Zermelo-Fraenkel set-theory provides a series of new solutions to these problems. There is thus a new 'history of being' that is generated by Badiou's argument from the condition of set theory to philosophy. Precisely, he explicitly claims 'The history of mathematics [periodized by singular praxes] is the history of being'. It is by means of this alternative mathematical history of being that Badiou will be able to rival Heidegger, and ground his claims with regard to requirements for a contemporary thinking. The argument from conditions thus joins the argument from philosophy in its commitment to a history of being, but this time the history is grounded in an alternative discourse to philosophy.

Thus in this regard at least, the argument from conditions is superior to the argument from philosophy.

At this point let's return to this suspicion of a lack of justification over ZFC set theory alone being elected the metonymy of mathematics as ontology. It is clear that we cannot hope for any absolutely solid philosophical demonstration of the necessity of ZFC alone as ontology to the exclusion of all other mathematical and non-mathematical candidates for the discourse on being qua being. Such a demonstration is impossible because the equation 'maths is ontology' does not take place within a formal system. I return to Sam Gillespie's statement: "Given that being qua being is given to us exclusively through ontology, it follows that it is very difficult to summon a mathematical ontology to a tribunal of ontology which would tell us whether or not it is a legitimate ontology".[19] It is also evident that Badiou's metaontology is not the only possible philosophical exegesis of what is going on inside ZFC.

What is our conclusion concerning the argument from the priority of set-theory as a condition for philosophy? It grounds Badiou's alternative history of being, which is an advantage; it does not eliminate the appearance of insufficient justification in the initial election of ZFC set theory, which is a disadvantage, and as an ontology compatible with truth procedures, it multiplies 'decisions on being', which is neither an advantage or a disadvantage but opens up an enquiry into conception of action entailed by such decisions.

Let's try one more approach, the pragmatist approach: what difference does the election of set theory as ontology make to Badiou's philosophical project? What does set-theory qua ontology do? In Badiou's terminology this is the question of the status and role of 'metaontology'.

19 Gillespie, "L'être multiple présenté, représenté, rendu vrai", in *Ecrits autour de la pensée d'Alain Badiou*, p. 73.

The status of metaontology

The simple answer to this question is that philosophical metaontology sets out the concepts of a philosophical theory of radical transformation.[20] It allows one to state, for instance, that "the form-multiple of being is generally infinite".[21] It makes the distinction between presentation and representation, a situation and its state, it generates the concept of eventual sites and the ensuing distinction between natural and historical situations, it anchors the claims that there is no totality of Nature nor of History, etcetera.

The choice of ZFC set theory as ontology turns out to be extremely rich and productive in terms of the wealth of concepts generated for this theory of change. But this theory immediately encounters another problem, that of schematism. Badiou opens Meditation 12 on 'natural multiples' with the following claim:

> Set theory, considered as an adequate thinking of the pure multiple, or of the presentation of presentation, *formalizes* any situation whatsoever insofar as it reflects the latter's being as such; that is, the multiple of multiples that makes up any presentation. If, within this framework, one wants to formalize a particular situation, then it is best to consider a set such that its characteristics [...] are comparable to that of the structured presentation – the situation – in question.[22]

Particular situations are thus 'formalized' by considering a set as the schema of a situation, hence my term 'schematism'. This passage has caused much

20 Badiou makes the connection between set-theory ontology and his larger project of developing a theory of radical transformation and hence, in the political sphere, of justice in the following terms in the "Introduction" to *Being and Event*: "It is the act of trusting [mathematicians] forever with the 'care of being' which separates truth from knowledge and opens it to the event. Without any other hope, but it is enough, than that of mathematically inferring justice." (*Ibid.*, p. 15) Badiou also writes in the introduction "All [the thesis 'mathematics is ontology'] does is delimit the proper space of philosophy...its function is to introduce specific themes of modern philosophy, particularly – because mathematics is the guardian of being qua being – the problem of what-is-not-being-qua-being." (*Ibid.*, p. 15) Note that the category of 'what-is-not-being-qua-being' refers to the event. Badiou also writes with regard to ontology, "the saying of being would hardly make any sense if one did not immediately draw from the affairs of the City and historical events whatever is necessary to provide also for the needs of 'that-which-is-not-being-qua-being'" (*Ibid.*, p. 282).

21 *Ibid.*, p. 266.

22 *Ibid.*, p. 130.

consternation amongst commentators. Tzuchien Tho asked Badiou a question about this very passage in the interview after the English translation of *The Concept of Model*.[23] Schematism is already present in many of the metaontological statements in the early meditations, especially the claim that set theory is the presentation of presentation; that is to say, the presentation of the inconsistent multiplicity of all consistent multiplicities in non-ontological situations.[24]

The first problem with metaontology as a schematism – one that Ray Brassier pointed out very early on – is that it turns set-theory into a referential discourse, gives it supposed objects, those objects being the implicit structures of non-ontological situations (and so Badiou would be a kind of structuralist *après la lettre*).[25] One loses the radically immanent and scriptural quality of set-theory ontology that I referred to before.

The second problem with schematism, the one that bothers most of the Anglo-Saxon commentators though, with their heritage of empiricism, is how to actually demonstrate that a particular set schematizes a particular situation. I asked Badiou this question in the 1999 interview transcribed in *Infinite Thought*, and for him it was a non-starter, perhaps, though it is a bit of an excuse, because he is not weighed down by the tradition of empiricism.[26]

One cannot demonstrate that sets provide the schemas of all non-ontological situations without already making some prior decisions as to the adequation of other discourses to those 'given situations', and also having a translation

---

[23] See Tzuchien Tho and Alain Badiou "The Concept of Model, Forty Years Later: An Interview with Alain Badiou", in Alain Badiou, *The Concept of Model: an Introduction to the Materialist Epistemology of Mathematics*, ed. and trans. L. Fraser & T. Tho, re.press, Melbourne 2007, pp. 94–5.

[24] The argument for what I call the *schematism* of set-theory ontology is inextricable from Badiou's argument for ontology being that unique situation that presents inconsistent multiplicity. On the last page of Meditation One he states: "To accede axiomatically to the presentation of their presentation, these consistent multiplicities of particular presentations, once purified of all particularity – thus seized before the count-as-one of the situation in which they are presented – must no longer possess any other consistency than that of their pure multiplicity, that is, their mode of inconsistency within situations" (*Ibid.*, p. 30).

[25] See Ray Brassier, "L'Anti-phènomene – présentation et disparaître", in *Ecrits autour de la pensée d'Alain Badiou*, pp. 55–64.

[26] Badiou, *Infinite Thought,* p. 178.

protocol between those discourses and set-theory, and accepting what is lost in those translations (anti-reductionism objections); indeed this entire objection seems to be caught up in the impossibility of reinventing Carnap's project in the *Aufbau*.

I am English, I have to some degree inherited the burden of empiricism, and so I found it difficult to ignore or dismiss this apparent problem of schematism. One solution I found is laid out in another part of Badiou's oeuvre, his first book on mathematics as a condition of philosophy, *The Concept of Model*.

My hypothesis is that metaontology is the discourse that results from the *modelling* of philosophical ontology by the syntax of ZFC set theory. I develop this argument in *Alain Badiou: Live Theory*.[27] Here I will summarize its conclusion. The operation of conditioning of philosophy involves the selection of a theoretical syntax from the language and names of a generic truth procedure – in this case, ZFC set theory. The second step is to select a semantic field – in this case, philosophy, in particular the history of ontology. A model of the theory is said to be produced if its syntax, and the operations that its syntax permits, can be reproduced without contradiction within that semantic field.

Hence, in terms of the production of metaontology, if Badiou can reproduce the syntax and operations of ZFC set theory in the semantics of the history of ontology without encountering contradiction, then he will have produced a model of ZFC set theory.[28]

The argument from the priority of conditions must therefore be understood via the operation of modelling. This hypothesis neatly resolves the problem of schematism. Badiou's metaontology does *not* provide a theoretical schema

27 Oliver Feltham, *Alain Badiou: Live Theory*, Continuum, London 2008.

28 I understand Badiou to be using such an argument when he makes a claim like 'the whole of the thinking unfolded in *Being and Event* constitutes the demonstration that mathematics is ontology'. He made this claim orally at a seminar "Ontologie et mathématiques" at the American University of Paris on June 17th 2019. See "Ontology and Politics: an Interview with Alain Badiou", in *Alain Badiou, Infinite Thought: Truth and the Return of Philosophy*, Continuum, London 2003, where Badiou says "A large part of *L'être et l'événement* tries to explain with the means of mathematics why mathematics is ontology. As a matter of fact it is its task", p. 184.

or model of non-ontological situations. Rather these objects or names – such as 'non-ontological situation', 'natural' or 'historical situation', 'evental-site', 'state', 'impasse of being' – are all elements of a model of a theory. In pragmatic terms, Badiou's metaontology creates a new universe of objects. When I analyse a situation as a historical situation, my metaontological model enters into competition not with given concrete situations (as a vulgar empiricism would have it, somehow measuring 'theory' against 'reality'), but with established universes created by the models of other theories; that is to say, it enters into an ideological battle (the constant theatrical background of Badiou's project).

So the concept of modelling allows the dismissal of the charge of schematism, but there is one last problem. The solution from modelling does not completely eliminate the suspicion of insufficient justification. Simply put, why model ZFC set theory and not another mathematical theory?

The practice of modelling entails a plurality of models

Here the solution is evident, and it is exemplified by Badiou's own practice, turning to category theory in *Logics of Worlds* to entirely remodel the philosophical discipline of phenomenology, and back to the theory of grand cardinals to rework his system again in *The Immanence of Truths*. In other words, there is a *positive* interpretation of the initial choice of ZFC appearing undemonstrated and thus arbitrary: the practice of modelling can entail a plurality of models. In this way, the insufficient justification is transformed into the contingency of a decision. Here we can follow as our guide the many 'decisions on being' that take place in the multitude of generic truth procedures; that is to say, we *can* accept a proliferation of decisions on being, it doesn't need to make us anxious.

Yet if these decisions on being concern the modelling of ontology *itself*, then we find the way opened to not one but many ontologies! Now this would be quite another strategy to adopt on the basis of the initial argument that the being of the One must be rejected and being thought as inconsistent multiplicity. This would be an approach similar perhaps to what Jean-Toussaint Desanti calls 'extrinsic ontology', according to which, when one interprets the phrase 'being qua being', one works to embrace the maximum of senses encapsulated in being, along the lines of Aristotle's initial intuition – that being is spoken in many ways –

an intuition that Aristotle, and subsequently many philosophers after him, swiftly sets aside.[29]

There are actually a few indices or openings to this strategy of many ontologies in Badiou's own work. When he shows that one of the singular characteristics of set theory ontology is that it does not totalize being, does this not open up the possibility of other kinds of inscription of being? When he argues that ontology is not a transcendental all-englobing situation but merely one situation amongst others, could it not also be one ontology amidst others?

There are two evident objections to this strategy of multiple ontologies. First, it will end up in eclecticism: there are conferences on the ontology of this or that, the ontology of emotions, the ontology of social constructs. Second, the choice of multiple ontologies via this eclecticism finally ends up in nihilism. Barry Smith has attempted to construct a 'Basic Formal Ontology' for the benefit of engineering and medical databases not to mention, the military and intelligence communities including the FBI.[30]

One can avoid eclecticism and nihilism by dismissing the idea that every single situation comports its own set of existential commitments which constitute a specific ontology. In my own work on action I show that the ontology opens up not as another variant of the discourse of the university, but as a lived enquiry uniquely when a failure or dysfunction occurs in the reception and consequences of an action. The action itself turns out to be 'equivocal' in that it is subject to conflicting attributions of its nature – is it a just or unjust action, has Macron's government 'ensured a return of the rule of law in Notre Dame des Landes', or has he 'destroyed people's livelihood'? This equivocity expands to include the intention behind the action, its identifiable consequences and even the identity and 'kind' of the action's agent. Contestation occurs over the being of these actions, and each side in such controversy develops its own ontology of these actions. In this manner diverse ontologies multiply in so far as people – not just philosophers – explore the nature of failure and dysfunction and controversy in

[29] Jean-Toussaint Desanti, "Some Remarks on the Intrinsic Ontology of Alain Badiou", in *Think Again: Alain Badiou and the Future of Philosophy*.

[30] See the Wikipedia article on Smith: https://en.wikipedia.org/wiki/Barry_Smith_(academic)

the occurrence of actions: I call this approach an 'anatomy of failure'.[31] I would hesitate to term this a 'democratization' of ontology as a kind of writing, because it does not concern a majority of people, nor is it based on the circulation of opinions. Anatomies of failure occur when people recognize and explore the undoing of opinions through the ambivalence and equivocity of certain actions. This process undoes received ideas and leads to the modification or displacement of dominant ideological positions in a political situation. It is democratic, however, in so far as it requires a process of deliberation between a number of actors from different social and political contexts.

The result of people carrying out anatomies of failure, and broadcasting them, is that alongside this 'stellar' set-theory ontology which schematizes the structures and inconsistent multiplicities underneath all kinds of existential commitment, we would embrace a multiplication of sub-lunar ontologies, and so account for the disjunctions and overlaps in existential commitments, such as the disjunction between Creon and Antigone. The level at which these ontologies would make a difference would be in the diagramming of conflicts over what kinds of action exist. The result of such an exercise would not simply be dialogue across conflict – one can read Rorty or Habermas for that. The result of such an exercise would be the remodelling of these conflicts *according to* these multiple ontologies. Such remodelling – and this is an argument I develop at length with regard to Hume's *History of England* – creates new durations.[32] And every new duration entails the emergence of a powerful – because new – measure of the gap between the actual and the ideal. In the gap between the actual and ideal arises the hope of justice.

References

Badiou, Alain, *Being and Event*, trans. Oliver Feltham, Continuum Books, London and New York 2005

— *Briefings on Existence: A Short Treatise on Transitory Ontology*, trans. N. Madarasz, State University of New York Press, Albany 2006

— *Court traité d'ontologie transitoire*, Editions du Seuil, Paris 1998

31 See Oliver Feltham, *Anatomy of Failure: Philosophy and Political Action*, Bloomsbury, London 2013.

32 This argument is substantiated in Oliver Feltham, *Destroy and Liberate: Political Action on the Basis of* Hume, Rowman and Littlefield, London 2019.

— *Le séminaire: Parménide, L'être I – Figure ontologique*, Fayard, Paris 2014
— "Subversion Infinitésimale", in *Concept and Form, volume I: Key Texts from the 'Cahiers pour l'Analyse'*, ed. Peter Hallward and Knox Peden, Verso, London 2012
— "Ontology and Politics: an Interview with Alain Badiou", in *Alain Badiou, Infinite Thought: Truth and the Return of Philosophy*, Continuum, London 2003
Besana, Bruno, "Quel multiple ?", in *Ecrits autour de la pensée d'Alain Badiou,* pp. 23–40
— "Replique ; l'événement de l'être", in *Ecrits autour de la pensée d'Alain Badiou,* pp. 125–30
Brassier, Ray, "L'Anti-phènomene – présentation et disparaître", in *Ecrits autour de la pensée d'Alain Badiou*, ed. B. Besana and O. Feltham, Harmattan, pp. 55–64, Paris 2007
Brassier, Ray and Alberto Toscano, "Postface: Aleatory Rationalism", in Alain Badiou, *Theoretical Writings*, Continuum, London 2005
Desanti, Jean-Toussain, "Some Remarks on the Intrinsic Ontology of Alain Badiou", in *Think Again: Alain Badiou and the Future of Philosophy*, ed. P. Hallward, Continuum, pp. 59–66, London 2004
Feltham, Oliver, *Alain Badiou: Live Theory*, Continuum, London 2008
— *Anatomy of Failure: Philosophy and Political Action*, Bloomsbury, London 2013
— *Destroy and Liberate: Political Action on the Basis of Hume*, Rowman and Littlefield, London 2019
Feltham, Oliver and J. Clemens, "An Introduction to Alain Badiou's Philosophy", in Alain Badiou, *Infinite Thought: Truth and the Return of Philosophy*, ed. and trans. O. Feltham and J. Clemens, pp. 1–38, Continuum, London, 2003
Gillespie, Sam, "L'être multiple présenté, représenté, rendu vrai", in *Ecrits autour de la pensée d'Alain Badiou*
Hallward, Peter, *Badiou: a Subject to Truth*, University of Minnesota Press, Minneapolis 2003
Meillassoux, Quentin, "Décision et indécidabilité de l'événement" in *Autour de 'Logiques des Mondes'*, ed. O. Feltham, D. Rabouin and L. Lincoln, Editions des Archives Contemporains, Paris 2011
Nancy, Jean-Luc, "Philosophy without conditions", in *Think Again: Alain Badiou and the future of philosophy*, pp. 39–49
Pluth, Ed, *Badiou: a Philosophy of the New*, Polity Press, London 2010
Wikipedia, "Barry Smith", available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Barry_Smith_(academic)
Tho, Tzuchien and Alain Badiou "The Concept of Model, Forty Years Later: An Interview with Alain Badiou", in Alain Badiou, *The Concept of Model: an Introduction to the Materialist Epistemology of Mathematics*, ed. and trans. L. Fraser & T. Tho, re.press, Melbourne 2007

Filozofski vestnik | Volume XLI | Number 2 | 2020 | 57–68 | DOI: 10.3986/FV.41.2.03

Nick Nesbitt*

Bolzano's Badiou[1]

Alain Badiou never mentions the pioneering, long-overlooked Czech-German logician Bernard Bolzano in the three volumes of *Being and Event*. In fact, his name only appears in passing, to my knowledge, on two occasions in Badiou's oeuvre: once in *Number and Numbers*, in a list of the modern founders of *the thought of number*, and once, in a passing reference to Bolzano's pioneering formalisation of the concept of the infinite in *Paradoxes of the Infinite*, in Badiou's 1994–95 seminar on Lacan.[2] Badiou has, moreover, admitted that his knowledge of Bolzano's work is in fact limited and largely second hand.[3] In what follows, I wish, briefly and in a very preliminary sense, to indicate a few of the ways Bolzano's thought in fact founds many of the essential categories and critiques developed throughout Badiou's oeuvre.

Badiou's neglect of Bolzano's thought is hardly surprising, since the philosopher's pioneering and foundational work, in set theory, in the critique of post-Kantian Idealism and intuitionism, in the semantic formalization of mathematics and logic, in the formal nature of axiomatisation, his precocious articulation of a realist, mathematics-based platonism a century before Albert Lautman's "transplatonism," and in many other fields, remained little acknowledged

1 The research and work on this study was supported by the Czech Science Foundation (GAČR) within the project (GA 19-20319S) "From Bolzano to Badiou."

2 "Les noms de cette première modernité [de la pensée du nombre] ne sont pas Proust et Joyce, ce sont Bolzano, Frege, Cantor, Dedekind, Peano." Alain Badiou, *Le Nombre et les nombres*, Editions du Seuil, Paris 1990. p. 24. "Après que l'infini eut reçu dans la mathématique un statut clair, grâce à Bolzano, Weierstrass et Cantor, il cesse de jouer un rôle dans l'argumentation philosophique." Alain Badiou, *Le Séminaire – Lacan*, Fayard, Paris 2013 pp. 256–257. In English: Alain Badiou, *Number and Numbers,* Robin Mackay, trans., Polity Press, Cambridge 2008. Alain Badiou, *Lacan: Antiphilosophy 3,* trans. Kenneth Reinhard and Susan Spitzer, Columbia University Press, New York 2018. See also Bernard Bolzano, *Paradoxes of the Infinite,* Routledge, New York 1950 [1851].

3 Personal communication, New York, 10.18.17.

* Princeton University

and even less studied until quite recently.[4] As late as 1993, Jacques Bouveresse could still decry this "historical injustice" done to "the most gifted and original adversary of German Idealism."[5] Decades before Frege, Husserl, Cantor, Tarski, and Gödel, Bolzano founded or made possible many of the crucial discoveries of modern analytic philosophy and set theory, innovations for which the former would become famous. Following the prohibition of his publications and his early retirement to the Czech countryside, Bolzano's discoveries remained overlooked after his death in 1848, and thus the breakthroughs of his major works *Paradoxes of the Infinite* and *Theory of Science* were only belatedly recognized by Cantor and famously celebrated by Husserl in the *Philosophical Investigations*.[6] Only in recent years have Bolzano's contributions to philosophy begun to garner the recognition they deserve. Moreover, Bolzano's conservative moralistic pronouncements have nothing of the political daring of Spinoza or Cavaillès and Lautman—with whom he nonetheless shares many theoretical points of agreement—nor, to be sure, with Badiou's many developments of and fidelity to the idea of communism, and it is therefore even less surprising that Badiou should never have engaged with Bolzano's thought.[7]

Bolzano's Badiou

That said, Bolzano's vast and still underexplored body of work announces Badiou's thought in a series of crucial dimensions. Here, I wish only briefly indicate

4 Badiou, *Being and Event,* p. 12.

5 Jacques Bouveresse, "Préface," in Jacques Laz, *Bolzano, critique de Kant,* Vrin, Paris 1993, p. iv.

6 "Bernhard Bolzano's *Wissenschaftslehre*, published in 1837, a work which, in its treatment of the logical 'theory of elements', far surpasses everything that world-literature has to offer in the way of a systematic sketch of logic." Edmund Husserl, *Philosophical Investigations,* Routledge, New York 2001 [1900], p. 68. See Bernard Bolzano, *Theory of Science,* Oxford University Press, Oxford 2014; *Théorie de la science, I-II,* Gallimard, Paris 2011.

7 On Bolzano's life and his (in my judgment) relatively banal and conservative moral, political, and aesthetic philosophy, which I will not address here, see the biographical information in Paul Rusnock and Jan Šebestík, *Bernard Bolzano: His Life and Work*, Oxford University Press, Oxford, 2019. It should be noted, however, that Bolzano publicly articulated as radical a critique of Viennese militarism as was perhaps possible in his Austro-Hungarian milieu, and it was this in particular that led to the banning of his publications and his forced early retirement from Charles University. On Badiou's "Idea of Communism," see Alain Badiou, *The Communist Hypothesis*, Verso, New York 2015.

some of the most evident examples of this relation, each of which remains to be developed comprehensively:

1. Bolzano's thought remains the most original and decisive critique of post-Kantian Idealism in the first half of the nineteenth century. While Badiou cannot be said to reject Hegelian dialectical modes of thought entirely, and in fact has returned repeatedly to interrogate their modalities, it is arguably Bolzano who initiates a tendency in European philosophy to supplement and complete philosophical investigations with apodictic demonstrations formulated in the precise, emphatically un-Hegelian mathematical terms of set-based theory. This mode of philosophical demonstration culminates in Badiou's methodological apparatus deployed throughout the three volumes of *Being and Event*. While *Theory of Science* will reiterate and refine the terms of Bolzano's initial critique of post-Kantian Idealism, Jacques Laz has shown that Bolzano's 1810 *Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* [*Contributions to an Exposition of Mathematics on a Firmer Basis*], written when Bolzano was only twenty-nine, already sets forth the principal propositions of his thought.[8] Key among these is his systematic critique of Kantian philosophy, attacked at its root via what Bolzano shows to be the contradictory nature of Kant's claims for an *a priori intuition* that would ground the entire project of the *Critique of Pure Reason*.[9] While the extraordinary brevity of the Appendix to Bolzano's *Contributions* ("The Kantian Doctrine of the Construction of Concepts by Intuitions") articulates its powerful critique in a mere eleven dense and methodically parsed paragraphs,[10] elsewhere Bolzano decries more generally the "love of imagistic language," lack of expressive precision, and reliance upon "analogies, paradoxes, and tautologies" dominant in the Schellingian and Hegelian thought of the age.[11] While Badiou's often highly imagistic and even poetic turns of phrase are decidedly unlike Bolzano's generally dry prose, these natural language excurses are systematically complemented, in *Being and Event*, by abstract formalizations that seek to produce purely objective statements on the nature of the various concepts Badiou develops therein. Bolzano unequivocally condemns what he views as a catastrophic tendency of philosophy, "the essence of [which] con-

8 Bernard Bolzano, *Premiers écrits: Philosophie, logique mathématique*, Vrin, Paris 2010.

9 Immanuel Kant, *Critique of Pure Reason,* trans. Paul Guyer, Allen Wood, Cambridge University Press, Cambridge 1998.

10 See Bolzano, *Premiers écrits.*

11 Cited at Laz, *Bolzano,* p. 33.

sists in [...] playing with images and passing off the slightest superficial analogy between two objects as an identity."[12] The core of this limitation, Bolzano concludes, is that "the thinkers of our age do not feel themselves in the least subject to [...] the *rules of logic*, notably to the obligation always to state precisely and clearly *of what* one is speaking, in what *sense* one takes this or that word, and then to indicate from what *reasons* one affirms this or that thing."[13] Whether or not one judges this an accurate characterisation of Hegelian negative dialectical thought, Bolzano's critique proved decisively productive for his invention of what Jean Cavaillès would famously call, in his posthumous *On Logic and the Theory of Science*, a "philosophy of the concept" that Badiou has gone on to develop across the three volumes of *Being and Event*.[14] While Cavaillès celebrates, in *On Logic*, Bolzano's rigorous attention to the necessary modalities of adequate, apodictic demonstration, he nonetheless critiques the ahistorical nature of these conditions, to offer instead a historically developmental concept of adequate demonstration.[15] Badiou can be said in turn to have taken from Cavaillès' critique a positive notion of ontology in its intrinsic relation to science and to mathematics in particular as the adequate language of being as being.[16]

2. Bolzano's thought, from its initial formulation in the 1810 *Contributions* to the posthumous *Paradoxes of the Infinite*, anticipated by decades not only Dedekind and Cantor's definitions of infinite sets, but also Russell's paradox of the set of all sets, and Frege's definition of number as a set of concepts with isomorphic extension.[17] In 1816 Bolzano constructed a proof that is the first

12 Cited at Laz, *Bolzano,* pp. 32–33.

13 Cited at Laz, *Bolzano,* p. 32.

14 Jean Cavaillès, *Sur la logique et la théorie de la science*, Vrin, Paris 2008. Note that beginning with his critique of Fregean logicism in "Meditation 3" of *Being and Event*, Badiou decisively rejects the notion of logic as a purely syntactic operation: "Logic is not a formalization, a syntax, a linguistic apparatus. It is a mathematized description of possible mathematical universes, under the generic concept of Topos." Cited at Peter Hallward, *Badiou: A Subject to Truth,* University of Minnesota Press, Minneapolis 2003, p. 109. I will return to this point below, in reference to Bolzano's innovative formalization of axiomatic method.

15 Hourya Benis Sinaceur has argued compellingly that Cavaillès' critique of Bolzano indicates a subterranean Hegelianism latent in Cavaillès' thought. Houya Benis Sinaceur, *Cavaillès,* Les Belles Lettres, Paris 2013, pp. 114–116.

16 Thanks to David Rabouin for clarifying this point.

17 Laz, *Bolzano,* p. 42. See also Jan Šebestík, "La classe universelle et l'auto-appartenance chez Bernard Bolzano," in *Mathematical journal of the seminar,* ed. P. Zernos, Athens 1986;

strictly conceptual formulation of the concept of continuity, a definition that crucially refuses all dependency upon psychologistic notions of intuition. This in itself constituted a powerful rejection of Kantian Idealism, which had judged the concept of continuity to be irreducible to conceptualization.[18] It is therefore all the more surprising that neither Badiou's 1984-1985 seminar *L'infini: Aristote, Spinoza, Hegel* nor Badiou's culminating, comprehensive statement on the nature of the infinite and human reason, *The Immanence of Truths*, contains a single mention of Bolzano's name.[19] *Paradoxes of the Infinite* directly influenced Dedekind and Cantor, and presents, along with *Theory of Science*, summaries of Bolzano's principal insights on mathematics and ontology. The concept of the infinite, Bolzano argues in *Paradoxes*, applies only to pluralities; as such, an object may be defined as infinite if it bears an attribute that indicates an infinite plurality. Bolzano furthermore offers a proof of the objective nature of the infinite as concept, from the proposition that there exist infinitely many truths *en soi*.[20] In this manner, Bolzano decisively rejects the Hegelian notion of qualitative infinity, while also distinguishing his *actual* concept of the infinite from a mere potentiality (as Cauchy argued), as well as from that of Spinoza, whose concept of the infinite Bolzano understands as the "infinite which is capable of no further increase."[21] Instead, Bolzano argues that various concepts of infinite sets – such as that of all points contained in the circumference of a circle, without having to count those elements sequentially, have actual, objective existence independent of their psychological cognition (except in cases in which the set in question includes that subjective cognition).[22] Bolzano also argues that there exist infinite sets of differing sizes, since one infinite set may logically be a subset of another, an argument from which, as Rusnock and Šebestík point out, Cantor's theory of transfinite cardinals begins: "namely, by defining two multitudes (finite or infinite) to be equinumerous if and only if there exists a bijection (a one-to-one map) between them."[23] This, however, precisely indicates

Rusnock and Šebestík, *Bolzano* pp. 533–540. On the influence of these thinkers upon Badiou's thought, see Hallward, *Badiou: A Subject to Truth*, Chapter 9, "Mathematics and Science."

18 Laz, *Bolzano,* p. 41; Rusnock and Šebestík, *Bolzano,* pp. 520–533.

19 Alain Badiou, *L'infini: Aristote, Spinoza, Hegel*, Fayard, Paris 2016; Alain Badiou, *L'immanence des vérités*, Fayard, Paris 2018.

20 Rusnock and Šebestík, *Bolzano,* pp. 533–534.

21 Cited at Rusnock and Šebestík, *Bolzano,* p. 534.

22 *Ibid.*, p. 535.

23 *Ibid.*, p. 536.

a "paradox of the infinite," since this definition contradicts the claim that the whole is greater than the part, and thus of unequal size. Though in the face of this contradiction, Bolzano steps back from the Cantorian conception of transfinite numbers – the assertion that, in the case of infinite sets, such a one-to-one mapping demonstrates that two sets may have the same number of elements – it has been suggested that Bolzano's conception of infinite sets might nonetheless constitute a distinctly non-Cantorian theory of the sizes of infinite sets.[24] Petr Vopěnka summarizes Bolzano's contribution to the Cantorian theory of the infinite as a veritable asubjective phenomenology:

> Bolzano's explanation of how this or that form of the phenomenon of the infinite is produced is [foundational]. For him, these different forms are produced by different structures of the corresponding basic multitudes or, as we would say today, in the relational structures of the corresponding communities of objects. From a given community of objects we abstract its relational structure, which means that we replace properties of its members and their relations (what remains is their pure presence) by sets of objects that have such properties, relations by sets of ordered pairs, triples, etc., of objects that enter into the corresponding relations [...] and thus immediately find ourselves in the mathematics of the twentieth century. [...] Bolzano's instructions thus became the program of the set theory of the twentieth century. [...] No one followed it publicly, and no one appealed to it. Mathematicians did not even know Bolzano's words and, in spite of this, they obediently accomplished what those words commanded. Thus it is not exactly a program in the true meaning of the word, but rather a prophecy which was fulfilled, because it was founded on a clear and far-sighted vision of things to come.[25]

That Badiou has never to date engaged with Bolzano's theory of the infinite is certainly understandable for many of the reasons given above, but this genetic relation in the history of thought unquestionably remains a fruitful path for future research on Badiou's thought.

---

[24] This has been argued by Paolo Mancosu, a conclusion Rusnock and Šebestík ultimately find unconvincing. See Rusnock and Šebestík, *Bolzano,* p. 537.

[25] Petr Vopěnka, *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky* [The Story of the Beauty of Neobaroque Mathematics], Práh, Prague 2004, p. 212, cited at Rusnock and Šebestík, *Bolzano,* p. 539.

3. Bolzano, decisively influenced on this count by Leibniz, is arguably the first modern philosopher to clearly define mathematics as the adequate language of ontology in the form of a *mathesis universalis* based upon predicate logic derived from Aristotle's *Posterior Analytic*.[26] Bolzano argues in the *Contributions* that philosophy is the science addressed to the question "what things are necessarily *real*," while mathematics, in contrast, addresses the question "What properties must things *necessarily* possess to be *possible*?"[27] While philosophy attempts to prove the reality of particular objects *a priori* and unconditionally, mathematics, in Bolzano's formulation, constitutes the *a priori* science of the set of universal laws to which all possible objects are subject.[28] Scientific method in general is for Bolzano coterminous with the logical rigor of mathematical method.[29] While for Bolzano philosophy seeks to deduce the real existence of things (analogous to Badiou's project to define an asubjective phenomenal logic in *Logics of Worlds*), mathematics applies its analysis, Bolzano argues, to the *possible* existence of all objects as governed by general laws. Bolzano can be said to announce Badiou's demonstration of the laws governing the *phenomenal* appearance of things in *Logics of Worlds*: mathematics, Bolzano affirmed, develops a general theory of forms, which he defined as "a science that treats of the general laws (forms) to which things must conform in their existence."[30] While for Bolzano this constitutes an ontological affirmation, Badiou will reject categorial logic as identical with being as such, to argue instead that while mathematics constitutes the adequate language of what is *dicible* (sayable) of being, a categorial logic offers the means to conceptualize an asubjective *phenomenology* of worlds.

4. Bolzano inaugurates the modern Platonist rationalist realism that would see its fullest development in Gödel and Lautman, a tendency that Badiou has polemically affirmed as crucial to his own thought.[31] Bolzano's *Contributions* already formulates in 1810 a philosophy of objective forms [*Formen*] and the sys-

---

26 On Leibniz's influence on Bolzano, see Laz, *Bolzano critique de Kant*, pp. 33–35; and on Bolzano's reconfiguration and critique of Aristotelean logic, see Laz, *Bolzano,* pp. 27–30.

27 Cited at Laz, *Bolzano critique de Kant*, p. 29.

28 Cited at Laz, *Bolzano*, p. 45.

29 Laz, *Bolzano,* pp. 46–48.

30 Cited at Rusnock and Šebestík, *Bolzano,* p. 417.

31 See for example Alain Badiou, *Plato's Republic: A Dialogue in Sixteen Chapters,* trans. Susan Spitzer and Kenneth Reinhard, Columbia University Press, New York 2013.

tematic connection of truths that defines its structure. This structure, he argues, follows an objective configuration, independent of subjective intuition and psychological certainty. "In the domain of truth," Bolzano writes in the *Contributions*, "that is to say in the set of all true judgements, there reigns a certain *objective connection*, independent of all contingent *subjective knowledge* that we may develop of it. [...] To present this objective connection of judgments, that is to say, to choose a set of judgments and to order them such that any inferred judgment is mentioned as such, seems to me the true goal of scientific exposition."[32] Such is the method Bolzano declares for a science *an sich*, one in which the objective connection of true judgements remains strictly independent of any subjective thought or feelings of certainty or doubt. Bolzano's project, which culminates in the *Theory of Science*, is nothing less than this demonstration of a coherent methodology, one that would develop for mathematical logic a conceptual clarity and definition independent of all psychologism and reliance upon intuition.

5. Badiou's rejection of Fregean logical grounding in favour of an axiomatic presentation, affirmed in Meditation 3 of *Being and Event*, marks a central moment in his theoretical intervention: "Axiomatisation," Badiou writes, "is not an artifice of exposition, but an intrinsic necessity. Being-multiple, if entrusted to natural language and to intuition alone, produces an undivided pseudo-presentation of consistency and inconsistency. [...] Axiomatisation is required such that the multiple, left to the implicitness of its counting rule, be delivered without concept, that is, without implying the being-of-the-one."[33] While, as David Rabouin points out, Badiou's notion of axiomatisation draws upon Hilbert and Bourbaki, one might note that Bolzano already presents in the second section of the *Contributions* the first explicit model of axiomatisation, decisively rejecting Kantian intuitionism.[34] There, Bolzano does not proceed via a demonstration of the nature of the axiom, which would return precisely to the very logicism axiomatisation seeks to overcome (and for which Badiou takes Frege to task in both *Being and Event* and, in more detail, in *Number and Numbers*). The axiom, Bolzano argues in terms that decisively announce those of Badiou, is derived neither

32 Cited at Laz, *Bolzano,* p. 43.

33 Alain Badiou, *Being and Event*, trans. Oliver Feltham, Continuum, London 2005, p. 43, translation modified.

34 David Rabouin, personal communication.

through an intuition, nor even as a minimally and generally acceptable common notion (as with Marx's definition of capitalism as the general accumulation of commodities), which would rely on a psychological recognition and agreement, but is instead, he argues, indemonstrable, and objectively so. Bolzano argues that it is precisely and minimally the indemonstrability of an axiom, rather than its essential nature, that can in fact be proven. This minimal proof is merely the verification that allows axioms to found the subsequent propositions subject to apodictic demonstration. "Neither deduction, nor demonstration of the truth of a proposition," Jacques Laz writes, "the *Deductio* of an axiom is the exposition of its status as principal [*statut de principe*] in an objective sequence of connections between propositions. It is the operation by which are revealed the propositions that are the principals for other propositions."[35] Objective without being a logical demonstration of the truth of an axiom, the *Deductio* founds the effective *conditions* of demonstration, deducing only that a given proposition possesses an axiomatic character, in the sense that it cannot be analytically reduced into subsidiary components.[36]

6. Finally, and though this may be a less than obvious claim, it is my contention that Bolzano offers compelling conceptual resources to develop the structuralist analysis of what Marx called "social form": structuralist analysis, that is to say, in the quite specific sense in which Louis Althusser and Pierre Macherey developed it in *Reading Capital*.[37] Here, Bolzano's concerted critiques of intuitionism, psychologism, and empiricism, and his concept of propositions in themselves can be said to second and further develop the Spinozist critiques that Althusser, Rancière, Macherey, and Balibar deployed in their readings of Marx's *Capital*.[38] If Althusser and Macherey in particular looked back three hundred years prior to Spinoza in order to develop their critiques of Hegel and Hegelian Marxism, it is surely no less plausible to suggest that Bolzano, who as mentioned above developed the single most rigorous critique of Kantian and Hegelian Idealism prior to 1848, might offer compelling theoretical arguments to further develop this anti-Hegelian line of thought. Bolzano argued for an objective semantics governing not subjective, hermeneutic knowledge of objects, but their objec-

35 Laz, *Bolzano*, p. 55.
36 *Ibid.*, pp. 52–56.
37 Louis Althusser et al., *Reading Capital: The Complete Edition*, Verso, New York 2016.
38 See Warren Montag, *Althusser and His Contemporaries: Philosophy's Perpetual War*, Duke University Press, Durham 2013.

tive properties and relations. He inaugurates, this is to say, the affirmation that Badiou will formalize in 1988 as the governing imperative of *Being and Event*: that mathematics "writes that which, of being itself, is expressible [*dicible*]."[39] This, Bolzano argues, implies the independent existence of these concepts apart from conscious representation. Their meaning, he argues, is rigorously objective and independent from acts of judgment. In fact, I would willingly push this argument even further, to suggest that Bolzano can rightly be said to formulate crucial theoretical resources in the path leading to the Lacanian theory of the symbolic and real, above all perhaps via his realist, semantic critique of the Kantian thing in itself. As Badiou writes of Lacan's notion of the real,

> Lacan is not a critic. To be sure, the real differs from reality, which attaches its regime to knowing. But Lacan immediately says: I don't mean to say the real is unknowable. I'm not a Kantian. [...] Although the real, as distinct from reality, is exempted from the knowable, which is the essence of reality, *the real nevertheless does not end up being the absolute unknowable but is instead exposed to being demonstrated*.[40]

Bolzano's asubjective order of propositions and representations, in a precise and limited sense analogous to what Lacan will call the symbolic order (in what Badiou calls Lacan's "hyperstructural axiomatic" phase of the 1950s), Bolzano argues, is eminently knowable through acts of human formalization and judgment, in contrast to Bolzano's anti-Kantian notion of the thing in itself as much as the Lacanian real.[41] While this objective order presents things as they are in what Bolzano calls the matter [*Stoff*] of a semantic, symbolic order, it is for Bolzano (unlike Kant) the (real) object of these representations and discursive judgements that remains inaccessible; the real, as Lacan famously stated, is the *impasse* of formalisation.[42] Or as Laz writes, for Bolzano, "we will never be able to grasp the objects of our representation, but only their [objective] meaning through which we represent them."[43]

39 Badiou, *Being and Event*, p. 5, translation modified.
40 Badiou, *Lacan*, p. 151.
41 *Ibid.*, p. 237.
42 Badiou, *Being and Event*, p. 5.
43 Laz, *Bolzano*, pp. 121–122.

To suggest a Bolzanian reading of Badiou along the lines that I am suggesting here is surely no more implausible than was Pierre Macherey's influential reading of Spinoza's Hegel.[44] It is to articulate a transversal relation; unlike that which Macherey articulates, however, in Badiou's case, there is no obscure disavowal on his part of a hidden proximity to Bolzano's historically prior thought, but rather a complex field of relations and implications that remains to be developed and articulated, an investigation that Badiou himself might be the first to welcome.

While I have here tried only to suggest a few of these possible paths of research, it seems to me that Bolzano's thought is no mere antiquarian moment in a history of axiomatic philosophies, philosophies that hold mathematics to constitute the adequate language of being. At least as promising, for example, would be to further concretize the anti-Hegelian, objective dimensions of apodictic demonstration that Althusser, Macherey and Badiou himself have argued govern not only much of their own thought, but above all, the critical projects of Marx and Lacan. Such a project might remain faithful to the imperative that Badiou has argued governs his philosophical project as a whole: "To legitimate the claim that a truth can be absolute, while also a localized construction, [...] eternal, while belonging to the time of this world [... and] a-subjective, while demanding, to be grasped, a subjective incorporation."[45] To place Badiou's philosophy of being and event in dialogue with that of Bolzano in this manner would imply the exploration of truths developed and demonstrated in suspension, truths articulated between these two figures, in the diffraction of their mutual demonstrations, as both the critique and proof of philosophy itself in the set that constitutes its own historicity.

References

Althusser, Louis et al., *Reading Capital: The Complete Edition*, Verso, New York 2016
Alain Badiou, *Being and Event*, trans. Oliver Feltham, Continuum, London 2005
— *Lacan: Antiphilosophy 3,* trans. Kenneth Reinhard and Susan Spitzer, Columbia University Press, New York 2018
— *Le Nombre et les nombres*, Editions du Seuil, Paris 1990
— *L'immanence des vérités*, Fayard, Paris 2018

---

44 Pierre Macherey, *Hegel or Spinoza*, University of Minnesota Press, Minneapolis 2011 [1979].
45 Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 13.

— *L'infini: Aristote, Spinoza, Hegel*, Fayard, Paris 2016
— *Le Séminaire – Lacan*, Fayard Paris 2013
— *Number and Numbers,* trans. Robin Mackay, Polity Press, Cambridge 2008
— *Plato's Republic: A Dialogue in Sixteen Chapters,* trans. Susan Spitzer and Kenneth Reinhard, Columbia University Press, New York 2013
— *The Communist Hypothesis*, Verso, New York 2015
Macherey, Pierre, *Hegel or Spinoza,* University of Minnesota Press, Minneapolis 2011 [1979]
Montag, Warren, *Althusser and His Contemporaries: Philosophy's Perpetual War*, Duke University Press, Durham 2013
Benis Sinaceur, Houza, *Cavaillès,* Les Belles Lettres, Paris 2013
Bolzano, Bernard, *Paradoxes of the Infinite,* Routledge, New York 1950 [1851]
— *Premiers écrits: Philosophie, logique mathématique*, Vrin, Paris 2010
— *Theory of Science,* Oxford University Press, Oxford 2014
— *Théorie de la science, I-II,* Gallimard, Paris 2011
Cavaillès, Jean, *Sur la logique et la théorie de la science*, Vrin, Paris 2008
Hallward, Peter, *Badiou: A Subject to Truth,* University of Minnesota Press, Minneapolis 2003
Husserl, Edmund, *Philosophical Investigations,* Routledge, New York 2001 [1900]
Kant, Immanuel, *Critique of Pure Reason,* trans. Paul Guyer, Allen Wood, Cambridge University Press, Cambridge 1998
Laz, Jacques, *Bolzano, critique de Kant,* Vrin, Paris 1993
Vopěnka, Petr, *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky* [The Story of the Beauty of Neo-baroque Mathematics], Práh, Prague 2004
Šebestík, Jan, "La classe universelle et l'auto-appartenance chez Bernard Bolzano," in *Mathematical journal of the seminar,* ed. P. Zernos, Athens 1986

Filozofski vestnik | Volume XLI | Number 2 | 2020 | 69–102 | DOI: 10.3986/FV.41.2.04

Jelica Šumič Riha*

La place de la mathématique : Badiou avec Lacan[1]

« La science sans conscience »[1]

La mathématique peut-elle s'interroger sur elle-même ? Dans la *Critique de la raison pure*, Kant fait de la mathématique « l'exemple le plus éclatant d'une raison pure qui réussit à s'étendre d'elle-même sans le secours de l'expérience [2] ». La définition kantienne de la mathématique résonne avec le formalisme de la mathématique moderne dont l'ascèse particulière exclut toute considération sur le contenu. Ainsi, la mathématique pure, selon Bertrand Russell, est « la classe de toutes les propositions de la forme 'P implique Q' … où ni P ni Q ne contiennent d'autres constantes que des constantes logiques [3] ». Selon définition russellienne, la mathématique pure se présente comme un ensemble d'implications formelles indépendantes de tout contenu. En forçant un peu le trait, on pourrait dire que la mathématique est « la science qui coïncide le plus totalement avec sa propre écriture [4] ». Mais pour le mathématicien d'aujourd'hui, l'enjeu de l'écriture mathématique ouvre une autre problématique, celle qui concerne le rapport du mathématicien avec la mathématique. Vu dans cette perspective, le mathématicien est

> celui qui efface le plus totalement les marques de la production de son texte, tant les marques du sujet qui le produit que les marques de la société dans laquelle il est produit. C'est même en ce texte mathématique que l'effacement des marques est le plus explicite. Mais ce ne peut être là qu'un paradoxe, car le caractère ex-

1 Cet article est le résultat du programme de recherche P6-0014 «Conditions et problèmes de la philosophie contemporaine», financé par l'Agence slovène recherche.

2 Emmanuel Kant, *Critique de la raison pure*, *Œuvres philosophique,* tome I : *Des premiers écrits à la Critique de la raison pure (1747-1781),* Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, Paris 1980, p. 1297.

3 Bertrand Russell, *Écrits de logique philosophique*, trad. Jean-Michel Roy, PUF, Paris 1989, p. 21.

4 René Lavendhomme, *Lieu du sujet. Psychanalyse et mathématique*, Seuil, Paris 2001, p. 8.

* Institut de philosophie, Centre de recherches scientifiques auprès de l'Académie slovène des sciences et des arts

> plicite de l'effacement devrait le nier comme effacement et devrait donc conduire à effacer l'effacement[5].

« Ne serait-il pas possible, » demande le mathématicien René Lavendhomme, « qu'à l'intérieur de l'écriture même du texte mathématique se fasse jour la relation que ce texte entretient avec le sujet »?[6] En proposant une autre définition de la mathématique selon laquelle « la mathématique est une science où l'on ne sait jamais de quoi l'on parle, ni si ce qu'on dit est vrai [7] », Russell jette une lumière particulière précisément sur le lien que le mathématicien entretient avec la mathématique. Strictement parlant, les deux définitions russelliennes ne sont pas contradictoires. Si la première définition met l'accent sur le formalisme dont la rigueur logique bride la liberté dans le maniement des lettres et des symboles, la deuxième inclut une dimension supplémentaire, celle du dire mathématique qui met en relief le rapport des mathématiciens avec la mathématique. Le problème qui se pose alors est le suivant : qu'est-ce que la mathématique si le mathématicien peut ne pas y croire ? La légèreté de la lettre, corrélative au délestage du sens, libère-t-elle le sujet mathématicien à tel point qu'il se targue de ne pas savoir de quoi la mathématique parle, ni d'y croire vraiment ?

Dans ce qui suit nous ferons référence aux commentaires respectifs de Badiou et de Lacan suscités par cet étrange énoncé affirmant que, en mathématique, on ne sait jamais de quoi on parle ni si ce que l'on dit est vrai. Badiou et Lacan insistent tous les deux sur un point, à savoir que le mathématicien n'est incontestablement pas libre de ne pas croire à la mathématique. Ou, pour reprendre les propres termes de Badiou, que « le mathématicien est d'abord celui qui croit 'dur comme fer' aux mathématiques[8] ». Quant à l'ignorance mathématique, les réponses que donnent Badiou et Lacan divergent, et cela précisément dans la mesure où, même si l'accès à la psychanalyse, comme l'accès à la philosophie, est un certain type d'accès aux mathématiques, il ne s'agit tout de même pas du même type d'accès.

---

5 *Ibid.*, p. 7.

6 *Ibid.*

7 Bertrand Russell, « Work on the principles of mathematics, » *The International Monthly*, 4, (1/1901), p. 84.

8 Alain Badiou, « La mathématique est une pensée », *Court traité d'ontologie transitoire*, Seuil, Paris 1998, p. 43.

Selon Badiou, lorsque Russell disait « que les mathématiques sont un discours où on ne sait pas de quoi on parle, ni si ce qu'on dit est vrai », c'était « sans le croire, bien sûr », et d'ailleurs « personne en vérité ne l'a jamais cru, sauf les ignorants, ce que n'était pas Russell [9]». Si Badiou ne peut pas croire Russell, c'est parce que, selon lui, les mathématiques sont, au contraire,

> le seul discours qui « sache » absolument de quoi il parle : l'être, comme tel, quoique ce savoir n'ait nullement besoin d'être réfléchi de façon intra-mathématique, puisque l'être n'est pas un objet, ni n'en prodigue. Et c'est aussi le seul, c'est bien connu, où l'on ait la garantie intégrale, et le critère, de la vérité de ce qu'on dit, au point que cette vérité est l'unique jamais rencontrée à être intégralement transmissible[10].

Cependant, Badiou semble être d'accord avec Russell sur un point tout à fait précis, à savoir : la mathématique ne sait pas et n'a pas besoin de savoir qu'elle fait de l'ontologie. Badiou affirme en effet que la mathématique en tant que discours sur l'être peut très bien se passer de ce savoir pour se perpétuer toute seule, presque à l'aveugle. Il revient donc à la philosophie de donner la « dignité ontologique[11] » à ce que les mathématiciens se contentent de mettre au travail. Mais il y a plus important encore : cette ignorance est en quelque sorte constitutive de la mathématique en tant que science de l'être, puisque, comme le souligne Badiou,

> il est de l'essence de l'ontologie de s'effectuer dans la forclusion réflexive de son identité. Pour celui-là même qui *sait* que c'est de l'être-en-tant-qu'être que procède la vérité des mathématiques, faire des mathématiques – et spécialement des mathématiques inventives – exige que ce savoir ne soit à aucun moment représenté. Car sa représentation, mettant l'être en position générale d'objet, corrompt aussitôt la nécessité, pour toute effectuation ontologique, d'être désobjectivante[12].

9 Alain Badiou, *L'Être et l'événement*, Seuil, Paris 1988, p. 15.
10 *Ibid*.
11 *Ibid*., p. 21.
12 *Ibid*., p. 17.

Après avoir posé que « ce qui est dicible – et dit – de l'être en tant qu'être ne relève d'aucune façon du discours philosophique[13] » mais de la théorie des ensembles, la théorie cantorienne du multiple pur – après avoir reconnu, comme Russell, que les mathématiciens ne savent pas en tant que mathématiciens, pris dans l'exercice et l'épreuve de leur pratique, que ce qu'il font c'est de prononcer ce qui est dicible de l'être en tant qu'être – Badiou reconnaît également qu'il y a « les moments où la mathématique semble convoquée à se penser elle-même, à dire ce qu'elle est. » Il s'agit des moments singuliers où la mathématique – « sous la contrainte d'une butée réelle, ou du surgissement nécessaire, dans son champ, d'un point d'impossible » – semble requise, au regard de ses propres buts, de penser sa pensée. La mathématique n'est obligée de revenir sur elle-même que « sous l'injonction de sa butée intérieure ». Le moment de la torsion de la mathématique sur elle-même est le moment où la mathématique est confrontée « à sa dimension décisoire[14] ».

Sur ce point, Badiou semble être obligé de distinguer deux modes opératoires de la mathématique identifiée à l'ontologie : il y a d'une part, le mode opératoire « normal » de la mathématique où la mathématique pense l'être sans pour autant se considérer comme « la pensée de la pensée qu'elle est [15] », et, il y a, d'autre part, les moments de crise où[16] « la mathématique, butant sur un énoncé qui atteste en un point la venue de l'impossible, se retourne sur les décisions qui l'orientent[17] ». C'est en s'appropriant un thème kantien, celui de l'orientation dans la pensée, que Badiou se propose de traiter la question de savoir si et dans quelles conditions la mathématique est capable de devenir la pensée de la pensée qu'elle est. L'orientation dans la pensée, dans le cas de la mathématique, porte sur la norme que se donne la pensée pour décider de l'existence. L'orientation dans la pensée porte, plus exactement, sur « ce que la pensée détermine en elle-même comme voie d'accès à ce qu'elle déclare exister[18] ». Or, là encore,

13 *Ibid.*, p. 20.
14 Badiou, « La mathématique est une pensée », pp. 48–49.
15 Badiou, « L'événement comme trans-être », *Court traité de l'ontologie transitoire*, p. 55.
16 Badiou évoque quelques exemples de ces moments critiques : crise des irrationnels dans la mathématique pythagoricienne, la crise liée aux « paradoxes » de la théorie des ensembles, la crise liée aux théorèmes de limitation des formalismes, les polémiques suscitées par le statut de l'axiome du choix, etc. Voir Badiou, « La mathématique est une pensée », pp. 46–48.
17 *Ibid.*, p. 51.
18 *Ibid.*, pp. 49–50.

le fait que la mathématique, dans les moments particuliers de crise, rencontre une impossibilité, un « bout de réel » ou se rapporte à sa propre pensée selon son orientation, est quelque chose dont la mathématique elle-même ne peut pas rendre compte, bien qu'elle le manifeste, comme le dit Badiou. Strictement parler, c'est à la philosophie sous condition des mathématiques, et plus particulièrement, à la philosophie, qui s'est mise sous condition de l'événementialité mathématique, puisqu'elle reconnaît la mathématique « comme un lieu de pensée singulier, dont les événements et procédures doivent être retracés *dans* l'acte philosophique[19] » que revient la tâche de traiter la question : qu'est-ce qu'une orientation dans la pensée, lorsqu'il s'agit de la mathématique ?

Pour cerner plus étroitement le partage des tâches entre la mathématique et la philosophie, il faut donc préciser que c'est parce que la mathématique – sauf dans les rares moments de « crise » – « pense l'être, mais n'est pas pensée de la pensée qu'elle est », qu'il revient à la philosophie « d'identifier la vocation ontologique de la mathématique ».[20] Or, admettre que l'ontologie ne se saisit dans la mathématique que par la décision de la philosophie, c'est délimiter en même temps l'espace propre à la philosophie, celui de ce-qui-n'est-pas-l'être-en-tant-qu'être, à savoir la vérité. Comment alors comprendre le lien entre l'ontologie et la philosophie, si « le dicible de l'être est disjoint du dicible de la vérité[21] » ? Si « toute vérité est postévénementielle[22] », c'est-à-dire la production d'une nouveauté qui est en tant que telle insituable dans le système de savoirs connu, comme le soutient Badiou, et si « les mathématiques ne peuvent penser aucune procédure de vérité, puisqu'elles éliminent l'événement[23] », ce multiple paradoxal qui échappe à l'ontologie, les mathématiques « doivent décider s'il est compatible avec l'ontologie qu'*il y a* des vérités[24] ». Et dans la mesure où l'être des vérités est conçu sous la forme de multiples non constructibles ou « génériques », la question que pose Badiou est la suivante : « l'ontologie peut-elle produire le concept d'un multiple générique ? [25]» C'est le mathématicien, Paul Cohen, qui a fourni la réponse à la question posée par la philosophie, dé-

19 Alain Badiou, *Conditions*, Seuil, Paris 1992, p. 158.
20 Badiou, « L'événement comme trans-être », p. 55.
21 Badiou, *L'Être et l'événement*, p. 391.
22 *Ibid.*
23 *Ibid.*, p. 376.
24 *Ibid.*
25 *Ibid.*, p. 391.

montrant l'existence des multiplicités « génériques », c'est-à-dire non constructibles. Ce que Badiou cherche et trouve dans la mathématique, c'est la preuve de « la *compatibilité* de l'ontologie avec la vérité ». Cette compatibilité implique, pour Badiou, que « l'être de la vérité, comme multiplicité générique, » peut et doit être « ontologiquement pensable, même si une vérité ne l'est pas[26] ». C'est dans ce sens que nous nous proposons de lire la remarque à première vue assez obscure de Claude Imbert selon laquelle « Badiou pose que la mathématique cantorienne donne à la philosophie sa position de réel en même temps que les moyens de le penser [27] ».

En revanche, pour Lacan, la nescience qui caractérise la mathématique selon Russell touche à ce que Lacan appelle « la frontière sensible entre vérité et savoir [28] ». Dans son dialogue « improvisé » avec Russell, au cours de son séminaire « Le savoir du psychanalyste », Lacan clarifie ainsi la définition de Russell :

> M. Bertrand Russell … a pris soin de dire en ses propres termes [que] la mathématique, c'est très précisément ce qui s'occupe d'énoncés dont il est impossible de dire s'ils ont une vérité, ni même s'ils signifient quoi que ce soit. C'est bien une façon un peu poussée de dire que tout le soin précisément qu'il a prodigué à la rigueur de la mise en forme de la déduction mathématique, est quelque chose qui assurément s'adresse à toute autre chose que la vérité, mais a une face qui n'est tout de même pas sans rapport avec elle, sans ça il n'y aurait pas besoin de l'en séparer d'une façon si appuyée[29].

C'est d'ailleurs dans ce contexte que Lacan introduit le problème de l'« incompréhension » des mathématiques. Cette incompréhension mathématique, pour utiliser son propre terme, permet à Lacan de poser la question suivante : quel ordre de vérité peut-on attendre des mathématiques ? Car l'incompréhension mathématique n'est pas une simple carence contingente mais doit être « considérée comme un symptôme » et Lacan en avance une raison :

---

26 *Ibid.*

27 Claude Imbert, « Où finit le platonisme ? », *Alain Badiou : Penser le multiple*, Charles Ramond (éd.), L'Harmattan, Paris 2002, p. 357.

28 Jacques Lacan, « Séminaire de Jacques Lacan, Le savoir du psychanalyste, 1971-1972 » (inédit), 4 novembre 1971.

29 *Ibid.*, 2 décembre 1971.

> Les sujets en proie à l'incompréhension mathématique attendent plus de la vérité que la réduction à ces valeurs qu'on appelle, au moins dans les premiers pas de la mathématique, des valeurs déductives. Les articulations dites démonstratives leur paraissent manquer de quelque chose qui est précisément au niveau d'une exigence de vérité[30].

Cette exigence de vérité est, selon Lacan, à la source de l'incompréhension mathématique, en tant qu'elle proviendrait d'un décalage, d'une insatisfaction devant une valeur de vérité réduite à la condition de la démonstration. Ceux qui ne comprennent pas les mathématiques auraient voulu qu'elles soient vraies, qu'elles disent quelque chose sur quelque chose, et, comme elles ne disent rien sur quoi que ce soit qui leur est extérieur,[31] ils les rejettent en bloc. En d'autres termes, c'est parce qu'on veut du vrai que l'on ne comprend pas les mathématiques. Et, de façon plus ramassée : « Cette embrouille autour de l'incompréhension mathématique » signale le symptôme de « l'amour de la vérité [32]».

Ce qui paraît être l'évacuation de la pathétique du vrai laisse un vide, mais, à suivre Lacan : « on aurait tout à fait tort de penser que la mathématique est quelque chose qui, en effet, a réussi à vider tout ce qu'il en est du rapport à la vérité de son pathétique [33] ». Bien loin de réussir à éliminer sa « dimension du pathétique », l'histoire de la mathématique – à travers la crise des irrationnelles, l'apparition du calcul infinitésimal, les impasses des procédés de démonstrations, mais surtout « la peine, la douleur qu'a engendré, » ce que Lacan appelle « l'effraction cantorienne »[34], issue d'une rencontre avec la vérité qui a pu aller chez Cantor jusqu'à la menace de la folie – « de quelque rapports du mathème ...

---

30 *Ibid.*

31 C'est parce que la formalisation mathématique « se fait au contraire du sens, j'allais presque dire à *contre-sens*. Le *ça ne veut rien dire* concernant les mathématiques, c'est ce que disent, de notre temps, les philosophes des mathématiques, fussent-ils mathématiciens eux-mêmes, comme Russell ». Jacques Lacan, *Le séminaire de Jacques Lacan, Livre XX, Encore*, Seuil, Paris 1975, p. 85.

32 Lacan, « Le savoir du psychanalyste », 2 décembre 1971.

33 *Ibid.*

34 Par exemple, lorsque Cantor établit une bijection entre l'ensemble des points d'un carré dont le côté est l'intervalle (0, 1), et cet intervalle lui-même, il écrit à Dedekind : « Je le vois, mais ne le crois pas ». C'est son système de croyance, plus précisément, son système d'interprétation, son ordonnancement symbolique, qui se trouve atteint. Cité dans Nathalie Charraud, *Infini et Inconscient. Essai sur Georg Cantor*, Anthropos-Economica, Paris 1994, p. 65.

avec la dimension de vérité [35] ». C'est exactement ce point qui intéressait Lacan, le rapport de la vérité et du savoir, où l'auteur d'une découverte, comme le montre bien le cas de Cantor, le « drame du savant[36] », se trouve lui-même nécessairement impliqué. La clarification de l'incompréhension mathématique importe pour la psychanalyse dans la mesure où la compréhension impliquerait sa réduction à des articulations non-contradictoires qui ne donnent pas sa place à ce que la vérité doit au désir. En effet, pour Lacan, « la non-contradiction ne saurait d'aucune façon suffire à fonder la vérité[37] ». Or, c'est exactement sur cette question du lien entre le désir et la vérité que se produit le bouclage entre la mathématique et la psychanalyse. Mais il n'en est pas moins vrai que, si le désir est porteur d'une valeur de vérité qui excède le savoir mathématique, l'abord de celui-ci ramène au savoir mathématique[38].

Si Lacan insiste sur la problématique de l'incompréhension, c'est aussi parce que l'incompréhension est gênante pour la psychanalyse dans la mesure où le travail de l'analyste, à la différence de celui du mathématicien, implique que, tout en sachant pratiquer la formalisation en analyse, l'analyste n'ait pas renoncé à la notion de vérité dont se passe quasiment le mathématicien. Ainsi, quand Lacan introduit le concept de mathème, c'est pour signaler « qu'il n'est absolument pas vrai de parler de mathème comme de quelque chose qui, d'aucune façon, serait détaché de l'exigence véridique[39] ». Mais pour comprendre le caractère de vérité qui est à l'œuvre en analyse, pour comprendre le caractère de formalisation qui est au travail dans sa littéralité, il faut passer par les travaux qui tiennent la vérité pour une valeur parmi d'autres et qui s'effectuent fondamentalement en mathématiques.

Deux modes du réel : le réel en mathématique, le réel en psychanalyse

Ainsi, en mathématiques, « on commence par mettre des lettres sans dire absolument rien de ce à quoi elles peuvent servir [40] », car pour penser il faut formali-

---

35 *Ibid.*

36 Jacques Lacan, « Science et vérité », *Écrits,* Seuil, Paris 1966, p. 870.

37 *Ibid.*

38 Sur ce point, nous renvoyons le lecteur au beau livre de Nathalie Charraud, *Infini et Inconscient. Essai sur Georg Cantor*.

39 Lacan, « Le savoir du psychanalyste », 2 décembre 1971.

40 *Ibid.*, 15 décembre 1971.

ser, c'est-à-dire donner une forme littérale à la pensée, travailler sur la littéralité de la pensée. Si d'un côté la notion même de mathématicité se trouve dépouillée jusqu'à une stricte littéralité pour mieux serrer le réel que vise la psychanalyse, c'est ainsi que nous pouvons décrire la manière selon laquelle Lacan aborde la mathématique, de l'autre côté, ce qui importe, selon Badiou, dans les projets mathématiques, à commencer par celui de Cantor, c'est d'instaurer « une formalisation intégrale, une théorie générale des univers de la pensée pure … Réduire la mathématique *à son acte* : la puissance d'univocité du formalisme, la force nue de la lettre et de ses codes ». Ainsi, ce que vise la formalisation de l'acte mathématique, n'est rien d'autre que « le dire du réel mathématique[41] ».

C'est dans cette perspective que Badiou insiste sur la formalisation comme « une exigence de la pensée, aussi bien pour les mathématiciens que pour les philosophes », car ce qui importe à ses yeux, c'est que « la présentation formelle de la mathématique enveloppe une radicalité fondatrice quant à la nature de son acte [42]». Quelle leçon peut-on tirer de cette « passion pour la formalisation » qui caractérise les mathématiques du 20ème siècle ? S'appuyant sur les démonstrations gödeliennes, Badiou met l'accent sur le fait que, même si « toute disposition formalisante de la pensée laisse un reste », la leçon à tirer de cet « échec » inévitable de la formalisation n'est pas qu'il faut abandonner la formalisation comme voie d'accès au réel, mais, au contraire, qu'il faut prendre le « résidu intraité » par une formalisation non aboutie comme point de départ pour une nouvelle formalisation :

> C'est bien ce qui sépare la formalisation, comme pensée et projet, d'un simple usage pragmatique des formes. Il faut, sans jamais se décourager, inventer d'autres axiomes, d'autres logiques, d'autres manières de formaliser. L'essence de la pensée réside toujours dans la puissance des formes[43].

Quant à Lacan, il est donc bien clair que ce n'est pas tant le savoir mathématique qui importe pour lui que la position du sujet-mathématicien par rapport à un désir inédit, celui de mettre un symbole, une lettre, là où il y a hors-sens. Finalement, ce qui l'intéresse dans les mathématiques, ce n'est pas la vérité,

---

41 Alain Badiou, *Le siècle*, Seuil, Paris 2005, pp. 228–229.

42 *Ibid.*, p. 230.

43 *Ibid.*, pp. 230–231.

mais leur puissance de construction, même au prix de voir la vérité réduite à une valeur parmi d'autres. C'est d'ailleurs en ce sens que Lacan a pu dire, ce qui à première vue peut paraître contradictoire, que : « Il n'y a de vérité que mathématique, c'est-à-dire écrite[44] ». Car ce qui importe pour Lacan, tout comme pour Badiou d'ailleurs, dans les mathématiques, ce n'est pas seulement leur puissance structurante, celle de donner forme à ses objets, mais la puissance d'arrachement à l'expérience et à l'empiricité qui est attribuée aux mathématiques.[45] Ainsi, selon Lacan, le discours mathématique ne peut se fonder sur rien d'autre que « ce langage de pur mathème … le seul à pouvoir s'enseigner : ceci sans recours à quelque expérience, qui d'être toujours, quoi qu'elle en ait, fondée dans un discours, permet les locutions qui ne visent en dernier ressort rien d'autre qu'à, ce discours, l'établir[46] ».

Pour Badiou, également, la mathématique s'intéresse « à la dimension la plus formelle, la plus abstraite, la plus universellement presque vide, de l'être comme tel[47] ». Ce que la mathématique rend possible, en tant que « ressource spéculative », c'est ce que Badiou nomme « l'ontologie absolue », plus précisément, « l'existence d'un univers de référence, d'un lieu de la pensée de l'être en tant qu'être » qui ne se laisse « décrire, ou penser, qu'à partir d'axiomes, ou de principes, auxquels il correspond. Il n'en existe aucune expérience, ni aucune construction qui dépende d'une expérience. Il est radicalement non

---

44 Jacques Lacan, « Séminaire de Jacques Lacan XXII, R.S.I. 1972-1973 », (inédit) 11 décembre 1972. Et plus précisément : « La mathématique fait référence à l'écrit, à l'écrit comme tel, et la pensée mathématique, c'est le fait qu'on peut se représenter un écrit. » « Séminaire de Jacques Lacan XXV, Le moment de conclure 1977-1978 » (inédit), 11 décembre 1978.

45 Ainsi, pour Platon, la mathématique est une condition du penser parce qu'elle rompt avec l'opinion. Or, dans la mesure où il s'agit d'une « rupture *contrainte* », comme le souligne Badiou, « involontaire, inapparente à elle-même, et surtout dépourvue de liberté », la mathématique, selon Platon, lu par Badiou, « n'établit pas la pensée dans la souveraine liberté de sa disposition propre ». Et plus précisément encore, définie comme « *l'entre-deux de la vérité et de la liberté de la vérité* », la mathématique est « la vérité encore captive de la non-liberté que réclame le geste violent de répudiation de l'immédiat. La mathématique appartient à la vérité, mais dans une figure contrainte de celle-ci ». Pour capter cette oscillation entre la vérité et la liberté, Badiou propose cette formule saisissante ; « la mathématique est trop violemment vraie pour être libre, ou elle est trop violemment libre (c'est-à-dire discontinue) pour être absolument vraie ». Alain Badiou, « Philosophie et mathématique », *Conditions*, 1992, pp. 168–171.

46 Jacques Lacan, « L'étourdit », *Autres écrits*, Seuil, Paris 2001, p. 472.

47 Alain Badiou, *Éloge des mathématiques,* Flammarion, Paris 2015, p. 43.

empirique[48] ». La mathématique crée donc des objets sans « s'appliquer » à l'expérience. Loin de poser l'existence comme extérieure à la mathématique, Lacan et Badiou la posent comme essentiellement déterminée par la mathématique elle-même. C'est dans ce sens que Lacan peut affirmer : « Il est clair que ce n'est qu'à partir d'une certaine réflexion sur les mathématiques que l'existence a pris son sens[49] ». De même pour Badiou, la mathématique entendue en tant qu' « ontologie absolue » obéit au « principe de maximalité » selon lequel « toute entité intellectuelle dont l'existence s'infère sans contradiction des axiomes qui la prescrivent existe par cela même[50] ».

Cette notion mathématique d'existence est lisible dans l'articulation de ce que Cantor nommait la formation correcte d'un concept. Dans « Les fondements d'une théorie générale des ensembles », Cantor explique ce que l'on doit entendre par liberté de concevoir et de conceptualiser en mathématiques.

> La mathématique est pleinement libre dans son développement et ne connaît qu'une seule obligation, … ses concepts doivent être non contradictoires en euxmêmes et soutenir d'autre part avec les concepts déjà formés antérieurement, déjà présents et assurés, des relations fixes, réglées par les définitions. En particulier, pour pouvoir introduire de nouveaux nombres, elle est seulement requise d'en donner des définitions leur conférant une précision et le cas échéant une relation aux anciens nombres telles que l'on puisse dans des cas donnés les distinguer les uns des autres de manière déterminée. Dès qu'un nombre satisfait toutes ces conditions, il peut et doit être considéré comme existant et réel dans la mathématique[51].

La liberté des mathématiques relève de la conception cantorienne de l'existence mathématique. La difficulté que Cantor confronte est celle de montrer que les nombres transfinis ont bien une existence effective, au même titre que les nombres finis. En liant existence et non contradiction, Cantor considère qu'il suffit qu'un objet mathématique ne contredise aucun énoncé de la théorie à la-

48 Alain Badiou, *L'immanence des vérités,* Fayard, Paris 2018, pp. 36–37.
49 Lacan, « Le savoir du psychanalyste », 1 juin 1972.
50 Badiou, *L'immanence des vérités,* p. 37.
51 Georg Cantor, « Fondements d'une théorie générale des ensembles », paru en 1883 dans *Mathematische Annalen,* XXI ; pp. 545–586, trad. J.-C. Milner, *Cahiers pour l'analyse*, no. 10, p. 48.

quelle il appartient pour exister, il n'est donc pas besoin d'une démonstration effective de son existence.

Conscient de rompre avec les mathématiques traditionnelles, Cantor insiste sur le fait qu'il ne peut « poursuivre [ses recherches sur les nombres transfinis] qu'en étendant au-delà de ses limites antérieures le concept de nombre entier existant réellement. En vérité, cette extension s'oriente dans une direction où, à ma connaissance, nul ne l'avait jusqu'à présent cherchée[52] ». Or cette nouvelle exigence de considérer les nouveaux nombres, les transfinis, comme existant réellement, se fonde sur la notion même de nombre : « La notion de nombre, si développée qu'elle soit ici, porte en soi le principe d'une extension nécessaire en elle-même et absolument infinie[53] ». Ainsi, pour Cantor, les nombres transfinis sont aussi « réels » que les entiers finis ou les irrationnels. Car le transfini n'est pas simplement un infiniment grand, un « fini variable », « une grandeur pouvant croître au-delà de toute limite finie[54] ». Si le transfini est un infini actuel ou infini proprement dit, c'est parce qu'on peut

> le fixer de façon mathématique par des nombres, cette pensée s'est imposée à moi logiquement, presque contre ma volonté … L'assomption qu'en dehors de l'absolu, de ce qui ne peut être atteint par aucune détermination, et du fini, il ne devrait pas exister de modifications qui soient déterminables par des nombres, encore que non-finies, et soient par conséquent ce que j'appelle l'infini proprement dit – cette assomption ne me paraît justifiée par rien … Ce que j'affirme et crois avoir démontré par le présent travail ainsi que par mes tentatives antérieures, c'est qu'après le fini, il existe un *transfinitum* (que l'on pourrait aussi nommer *suprafinitum*), c'est-à-dire une échelle illimitée de modes déterminés qui par nature ne sont pas finis, mais infinis, et qui cependant peuvent être précisés, tout comme le fini, par des *nombres* déterminés, bien définis et distinguables. Ma conviction est dès lors que le domaine des grandeurs définissables *n*'est *pas* clos avec des grandeurs finies et que les limites de notre connaissance peuvent être étendues en conséquence, sans qu'il soit nécessaire pour autant de faire violence à notre nature[55].

[52] *Ibid.*, p. 35.

[53] Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, E. Zermelo (éd.), Springer, Berlin 1932, p. 95.

[54] *Ibid.*, p. 374.

[55] Cantor, « Fondements d'une théorie générale des ensembles », pp. 42–43.

Ainsi se trouve réfutée une thèse traditionnellement opposée à l'infini actuel en mathématiques : la finitude de notre entendement nous empêche de concevoir l'infini qui se situerait entre le fini et l'absolu (Dieu). La thèse défendue par Cantor est que

> si bornée que soient en fait la nature humaine, il y a cependant en elle une très grande part d'infini, et je vais jusqu'à soutenir que si elle n'était pas elle-même infinie sous bien des rapports, on ne saurait expliquer la conviction et la certitude assurées où nous nous savons tous unis, touchant l'être de l'absolu. En particulier, je tiens que l'entendement humain est doué d'une aptitude illimitée à former par progression des classes de nombres entiers, qui soutiennent une relation déterminée avec les modes infinis et en constituent les puissances de degré croissant[56].

Comme tous les mathématiciens ou presque, Cantor adopte une forme de réalisme du nombre. Il fait la distinction entre la réalité intrasubjective et la réalité transsubjective : La première réalité, dite « intrasubjective ou immanente » relève de notre entendement. Mais il y a une autre réalité des nombres que Cantor appelle « transsubjective ou transcendante » ce qui implique que les nombres ont une réalité hors de l'entendement, puisqu'ils sont « comme expression ou reproduction de processus et de relations existant dans le monde extérieur opposé à l'intellect[57] ». Dans la mathématique, telle que la conçoit Cantor, la réalité immanente prime sur la réalité transsubjective ou transcendante, cette dernière étant assignée à la métaphysique. Or, le fait que, dans la mathématique, il faut « prendre en considération… *uniquement* et *seulement* la réalité immanente », permet d'en tirer « une conséquence importante pour la mathématique[58]» : le fait qu'elle ne doit s'occuper que de la réalité immanente de ses objets, lui accorde une liberté que les autres sciences ne connaissent pas. Mettant ainsi au centre de sa conception des mathématiques sa liberté de création, Cantor adopte en même temps l'idée que la mathématique pense à travers la formalisation, mais cela suppose qu'il y a un système d'axiomes qui ne porte pas sur des objets qui existent dans la réalité, mais sur des objets que les axiomes-prescriptions appellent à l'existence.

56 *Ibid.*, p. 44.
57 *Ibid.*, p. 47.
58 *Ibid.*, p. 48.

Badiou, pour sa part, souscrit au réalisme des mathématiciens. En effet, si les mathématiques sont la science du réel, c'est parce que la philosophie, qui se fonde sur l'équation la mathématique = l'ontologie, part de « la supposition qu'il y a dans ce qui existe un niveau de généralité ou d'universalité qui est en quelque sorte immatériel. Il y a des structures qui se retrouvent dans tout ce qui existe. L'étude de ces structures en tant que telles, des possibilités structurales, est précisément l'enjeu des mathématiques[59] ». Tout comme les mathématiciens, Badiou croit que les objets et structures mathématiques « 'existent' en un certain sens ». Mais, à la différence des mathématiciens, le réalisme de Badiou se base sur l'expérience d'une résistance dans le travail mathématique, à savoir « que 'quelque chose' résiste lorsqu'on fait des mathématiques, qu'on se frotte à une réalité difficile, rebelle[60] ». C'est à partir de la résistance des « choses » à la pensée qu'il faut saisir le réel en mathématiques. Tout le problème est d'identifier ce « bout de réel » qui se manifeste seulement là où ça coince, là où il y a une impasse, une incompatibilité.

Badiou rejoint ainsi Lacan, pour qui, ce n'est pas seulement par les mathématiques que l'on pense le mieux l'existence. L'existence est ce que les mathématiques pensent dans sa pointe, c'est-à-dire dans son impossibilité. Si la notion d'impossible joue le rôle d'un pivot essentiel qui organise les rapports que la psychanalyse entretient avec les mathématiques, c'est parce que, comme le discours psychanalytique, le discours mathématique rencontre des points d'impossible. Située à l'intersection de la psychanalyse et des mathématiques, la notion d'impossible permet d'ordonner le champ psychanalytique d'une part, et de révéler, d'autre part, les impasses constitutives des mathématiques. L'impossible n'est donc pas tout à fait étranger aux mathématiques puisqu'il est incarné dans leur histoire par de grands moments de « crise » où elles se heurtent contre un réel énigmatique qui correspond à la rencontre d'un obstacle excédant le cadre axiomatico-déductif.

Mais il faut noter cependant que le réalisme lacanien est bien singulier puisqu'il dépend de sa définition du réel comme impossible. Le réel n'est pas la réalité, mais ce qui se soustrait à sa représentation. Il est ce qui fait trou dans un discours et le pousse à se déplacer et se renouveler. Et c'est précisément pour

59 Badiou, *Éloge des mathématiques*, p. 59.
60 *Ibid.*, pp. 72–73.

mieux cerner l'impossible dans la psychanalyse même que Lacan fait appel aux mathématiques. Ce que Lacan cherche dans les mathématiques, c'est une écriture, car le réel en jeu dans la psychanalyse ne s'atteint que par les impasses des voies de l'écriture. En choisissant d'emprunter aux mathématiques les outils pour le travail à faire en tant que psychanalyste, convaincu « de la valeur des éléments mathématiques pour faire émerger quelque chose qui concerne vraiment l'expérience de l'analyse [61] », ce n'est pas seulement pour rompre avec le discours philosophique que Lacan a recours aux mathématiques. C'est parce que les mathématiques ont affaire au réel, qu'elles sont les seules à penser le réel : « Le Réel dont je parle est absolument inapprochable, sauf par une voie mathématique » et « c'est très précisément en cela que l'effort logicien doit nous être un modèle, voire un guide [62] ».

Comme les mathématiques, la psychanalyse ne trouve pas sa limite à l'extérieur d'elle-même, mais la porte en soi.[63] Aborder le réel sous l'angle de la limite nous donne, une fois de plus, l'occasion de préciser un point fondamental des rapports de la psychanalyse avec les mathématiques. Nous nous proposons d'illustrer ce paradoxe de la limite à partir de la notion d'infini. Si Lacan a recours aux mathématiques et s'il fait de Cantor un interlocuteur privilégié, c'est aussi pour résoudre l'impasse de Freud, celle qui touche à la fin de l'analyse. En tant qu'expérience de parole, la psychanalyse, de structure, ne connaît aucune fin. Or si, pour Freud, l'analyse est « interminable », sans fin, puisqu'il n'y a rien qui puisse arrêter le déchiffrage de l'inconscient, Lacan, pour sa part, propose une notion de la fin « logique » de l'analyse. C'est dans cette perspective que la fin de l'analyse, selon Lacan, met la psychanalyse face à un enjeu majeur : « L'enjeu maintenant est de quoi aidera à sortir le réel-de-la-structure : de ce qui de la langue ne fait pas chiffre, mais signe à déchiffrer[64] ». Faute d'être muni des outils mathématiques, seuls à même de localiser le point d'impossible, l'analyse ne rencontrera aucun réel.

61 Lacan, « Le savoir du psychanalyste », 1 juin 1972.

62 *Ibid.*, 2 décembre 1971.

63 « Si l'inscription analytique est bien ce que j'en dis, à savoir le début, le noyau-clé de sa mathématique, il y a toutes les chances à ce que ça serve à la même chose que la mathématique. C'est-à-dire que ça porte en soi sa propre limite. » Lacan, « Séminaire XXII », 20 novembre 1973.

64 Jacques Lacan, « Télévision », *Autres écrits*, p. 536.

La découverte cantorienne des transfinis va lui permettre d'élaborer une théorie de la fin de l'analyse en y incluant son infinitude. Et c'est d'ailleurs dans ce but qu'il a proposé la fameuse procédure de la « passe » qui marque le passage de l'analysant à l'analyste. La psychanalyse qui vise sa fin a pour ambition de cerner, à la fin de l'analyse, ce qui détermine le sujet à son insu. La rigueur de cette détermination dépend d'une structure qui participe du réel. Ce point de réel qui ne se manifeste qu'à la fin de l'analyse, se fonde sur la construction d'un cadre qui est censé englober tous les dits de l'inconscient du sujet. On voit bien l'analogie du franchissement qu'implique la passe lacanienne et le geste de Cantor. Or dans la psychanalyse, « il est question de l'accès à une formule, un $\aleph_0$, qui est celui de chacun, même s'il y a un $\aleph_0$, pour tous que Lacan a formulé dans les termes 'Il n'y a pas de rapport sexuel' [65]».

Le fait de pouvoir toujours ajouter des dits nouveaux, signale que l'on est dans un infini que Cantor qualifie d' « improprement dit ». Dans ce contexte, la cardinalité du symbolique, le terrain propre à la psychanalyse, sera toujours finie. Or l'infini proprement cantorien, l'infini actuel, n'est atteint qu'à partir de la rupture avec une notion de l'infini réduit à l'inaccessible, l'indéfini ou l'illimité, rupture qui a permis à Cantor de construire un infini purement quantitatif : les nombres transfinis. Pour soutenir cette opposition inhérente à la psychanalyse, il faut donc se tourner vers la théorie mathématique de l'infini. On commence par admettre que, dans la psychanalyse, le symbolique est infini, puisqu'il est toujours possible d'ajouter un dit supplémentaire à tous les dits précédents. Si Lacan fait appel à Cantor, c'est pour s'appuyer sur sa découverte des nombres transfinis, car la théorie des transfinis lui permet de penser la façon de dépasser le Nom-du-Père, le rôle pivot de la castration finitiste, qui pour Freud présente un point indépassable pour la psychanalyse, de relativiser cette place qui jusqu'alors avait un caractère absolu.

La théorie des nombres transfinis intéresse Lacan dans la mesure où elle propose une progression de nombres infinis qui ne rencontre aucune butée. De même que le problème pour Cantor est celui de ne pas pouvoir sortir du dénombrable pour atteindre la puissance du continu, le déchiffrage de l'inconscient ne peut atteindre sa fin. Le pas de Cantor, pour faire le saut du dénombrable au continu, consiste à comprendre qu'on ne peut dépasser qu'en limitant au

---

65 Jacques-Alain Miller, « Vers un signifiant nouveau », *Revue de l'ECF,* (20/1992), p. 54.

préalable. C'est par l'adjonction d'un nouveau signifiant, aleph zéro, un nombre ajouté à la suite infinie de nombres et le nommant, que le fini se saisit. La mathématique cantorienne présente l'intérêt d'avoir formalisé non seulement la notion de limite, mais encore celle des dépassements successifs de limitations successives. Pour atteindre des cardinaux toujours plus grands, il faut appliquer ce que Cantor appelle « le principe de limitation ». Une fois le premier passage à la limite accompli, il faut donc un nombre transfini de limitations pour envisager l'ultime saut, impossible à écrire parce qu'il est toujours possible d'en rajouter « un en plus » et donc de le dépasser. Le paradoxe du « plus grand transfini » rend la place de tous les ensembles inconsistante. Or, c'est précisément l'une des possibles fins de l'analyse, à savoir la rencontre avec le manque du dernier signifiant au cœur du symbolique, l'incomplétude de l'Autre symbolique mais qui ouvre la possibilité de « l'invention d'un savoir dans le réel » que Lacan propose comme « une détermination du réel au même titre que la science[66] ». L'enjeu pour la psychanalyse est de (se) rendre compte qu'en choisissant un modèle d'infini on décide ce qu'il faut entendre par la notion d'infini. Il faut toutefois noter que c'est seulement le premier modèle de l'infini, celui qui se limite au dénombrable, qui est utilisable en psychanalyse. À cet égard, si Badiou reproche à Lacan de ne pas être cantorien[67], car l'infini pour lui se réduit à l'inaccessibilité[68], Lacan ne pourrait que lui donner raison dans la mesure où, tout comme Freud, il n'admet pas l'infini actuel dans la psychanalyse ; ils sont tous deux foncièrement « finitistes ».

Ainsi, l'impossible d'écrire est propre aux mathématique tout autant qu'à la psychanalyse. On comprend mieux pourquoi le mathème est « le point pivot » de l'entreprise lacanienne. C'est que la voie du mathème, sous la forme même où Lacan la propose, est la seule méthode possible à produire des « petits bouts de réel », comme il le dit lui-même. Le paradoxe est que l'on ne peut produire des « bouts de réel » que par des artifices, très exactement, par ceux de l'écriture. Au paradoxe de voir le réel dans l'écriture, se joint celui de ne voir appa-

---

66 Jacques Lacan, « La note italienne », *Autres écrits*, p. 310.

67 Selon Badiou, la doctrine lacanienne du sujet est essentiellement finie et il en avance la raison: « Jusque dans la logique de la jouissance, la réelle existence de l'infini actuel l'encombre plus qu'elle ne le sert. Il ne convoque l'infini que pour le révoquer. L'infini doit rester cette fiction opératoire, qui pointe l'abîme ou la faille où le sujet se constitue. » Badiou, « Sujet et infini », *Conditions*, p. 301.

68 *Ibid.*, p. 300.

raître le réel que par l'écriture. Et pour donner une image qui se rapproche le plus de cette formalisation qui ne se supporte que de l'écrit, de cette « réduction aux dimensions de la surface qu'exige l'écrit », Lacan prend une image qu'il trouve dans la nature,

> ce travail de texte qui sort du ventre de l'araignée, sa toile. Fonction vraiment miraculeuse, à voir, de la surface même surgissant d'un point opaque de cet étrange être, se dessiner la trace de ces écrits, où saisir les limites, les points d'impasse, de sans-issue, qui montrent le réel accédant au symbolique[69].

Sur ce point la philosophie ne semble pas être en désaccord avec la psychanalyse. Pour Badiou, les mathématiques « seraient un mode d'approche du réel, y compris le plus insaisissable[70] ». Mais le réel que viseraient les mathématiques selon Badiou n'est pas tout à fait le même que celui que visent les mathématiques selon Lacan. Pour ce dernier, « Le réel ne saurait s'inscrire que d'une impasse de la formalisation[71] ». Plus précisément, c'est seulement à mettre la formalisation à l'épreuve qu'on rencontre un point d'impossibilité. Cependant il faut souligner également que le formalisme de Lacan est très particulier par bien des aspects. Le fait de prendre la formalisation mathématique comme modèle ne revient pas pour autant à confondre les deux modes du réel : le réel qui est en jeu dans la mathématique et le réel que vise la psychanalyse. La mathématique, et la science en général, ont affaire avec un réel qu'elles transforment en écriture. Le réel dont il s'agit ici est censé être mathématisable – sans reste. La psychanalyse, en revanche, étant affaire de sens, ne donne pas du sens au réel. Il s'agit plutôt de viser le réel dans le sens. La mathématique représente donc pour Lacan le modèle d'accès au réel de la structure où le réel est saisi au sens de rencontre d'un point d'impossible à écrire dans les termes de cette structure. Dans le séminaire *L'envers de la psychanalyse*, Lacan examine une formulation de l'impossible comme fait de structure, justement : « À poser la formalisation du discours et, à l'intérieur de cette formalisation, à s'accorder à soi-même quelques règles destinées à la mettre à l'épreuve, se rencontre un

[69] Lacan, *Encore*, pp. 85–86.
[70] Badiou, *Éloge des mathématiques*, p. 59.
[71] Lacan, *Encore*, p. 85.

tel élément d'impossibilité [72] ». L'épreuve est prise ici au sens où elle atteint un certain réel.

Le dire de Cantor selon Lacan et Badiou : « un pari sur le réel [73] »

C'est dans ce contexte que Badiou critique certains aspects de l'usage des mathématiques par Lacan. Nous ne saurions entrer ici dans le détail d'une discussion de ses arguments tout à fait recevables de Badiou, qui s'appuient sur une lecture attentive de « L'étourdit » et de *Encore*. Avant même de s'interroger sur le bien-fondé de sa lecture et/ou critique de Lacan, surtout sur ces points où Lacan s'appuie sur les mathématiques, il faut se demander à quoi la lecture de Lacan peut servir dans le projet philosophique construit par Badiou. Certes, il y a chez Lacan la voie du mathème pour situer la question du réel qui semble précieuse à Badiou puisque lui aussi vise à cerner « ce qui se soustrait à la détermination ontologique », « ce qui n'est pas l'être-en-tant-qu'être[74] » et qui n'est donc pas mathématisable. Car le problème que Badiou se propose de résoudre est le suivant : « si l'ontologie réelle se dispose comme mathématique en éludant la norme de l'un, il faut aussi, sauf à rétablir globalement cette norme, qu'il y ait un point où le champ ontologique, donc mathématique, se détotalise, ou reste en impasse. Ce point, je l'ai nommé *l'événement*[75] ». Ainsi, si la philosophie se sépare d'une partie de soi-même, celle qui s'interroge sur l'être comme tel, en assignant cette tâche à la mathématique, c'est aussi pour s'établir comme « théorie générale de l'événement. C'est-à-dire de ce qui se soustrait à la soustraction ontologique. Ou théorie de l'impossible propre des mathématiques[76]». Mais pour assigner à la philosophie la tâche de déterminer le trans-être de l'événement, il faut commencer par admettre que « tout n'est pas mathématisable[77] ». La question qui se pose alors est celle de savoir qu'est-ce qui dans l'événement mérite le nom du réel proprement dit, le réel en tant qu'impossible d'écrire.

C'est précisément sur ce point que Badiou ne peut pas ne pas rencontrer Lacan dans sa tentative d'aborder le réel ininscriptible à partir de la mathématique.

---

72 Jacques Lacan, *L'envers de la psychanalyse*, Seuil, Paris 1991, p. 50.
73 Alain Badiou, *Théorie du sujet*, Seuil, Paris 1982, p. 290.
74 Badiou, « L'événement comme trans-être », p. 56.
75 *Ibid.*, pp. 56–57.
76 *Ibid.*, p. 57.
77 *Ibid.*

C'est aussi l'occasion de poser la question suivante : pourquoi faut-il avoir recours au mathème en psychanalyse ? Si la psychanalyse, comme tout discours visant un réel, s'articule en mathèmes, c'est parce qu'elle butte sur une difficulté : « Sa difficulté tient à ce que, comme savoir, elle traite d'un savoir, lui aussi littéralisable, mais qui ne se sait pas[78] ». La psychanalyse n'est pas la mathématique bien qu'elle privilégie, tout comme la mathématique, la voie du mathème pour accéder au réel, mais, à la différence de la mathématique, elle vise le résidu de réel qui échappe à toute formalisation. Pour la psychanalyse ce résidu de réel qui n'est pas mathématisable se résume en la formule qu' « il n'y a pas de rapport sexuel » : il n'y a qu'impossibilité à écrire le 2 d'un rapport entre deux ensembles sexués. Or c'est précisément ce point d'impossible qui soutient un désir de savoir. Il ne s'agit pas d'un désir de savoir malgré tout, malgré cet impossible, mais d'un désir reposant sur le fait que la vérité n'est pas toute, qu'elle peut s'agrandir, faisant place à de nouveaux savoirs[79]. Lacan propose de tenter l'écriture du rapport sexuel, bien qu'il en ait avancé l'impossibilité :

> Sans essayer ce rapport de l'écriture, pas moyen en effet d'arriver à ce que j'ai, du même coup que je posais son inex-sistence, proposé comme un but par où la psychanalyse s'égalerait à la science : à savoir démontrer que ce rapport est impossible à écrire, soit que c'est en cela qu'il n'est pas affirmable mais aussi bien non réfutable : au titre de la vérité. Avec pour conséquence qu'il n'y a pas de vérité que l'on puisse dire toute… . La vérité ne sert à rien qu'à faire la place où se dénonce ce savoir. Mais ce savoir n'est pas rien. Car ce dont il s'agit, c'est qu'accédant au réel, il le détermine tout aussi bien que le savoir de la science[80].

Ce qui est visé dans les mathèmes lacaniens, ce n'est donc ni de l'ordre du vrai ni de l'ordre du savoir, car le mathème est situé à la jonction de la vérité et du savoir, mais le réel qui se manifeste sous forme de la rencontre, du coinçage, de l'incompatible, du non-rapport. C'est pourquoi ce que vise le mathème, ce n'est pas le réel en tant que tel mais l'impossibilité de dire vrai du réel. C'est là que la manière dont Lacan utilise les mathématiques est à prendre au sérieux.

---

78 Lacan, *Encore*, p. 88.

79 Lacan, « Note italienne, » p. 310.

80 *Ibid.*

La voie du mathème, pour situer la question du réel, rejoint le cœur des préoccupations de Badiou et, plus particulièrement, dans sa tentative pour réintriquer la philosophie et les mathématiques. Il nous faut nous interroger sur le point exact où les chemins de Lacan et Badiou se séparent tout en se croisant parfois. Dans la perspective de Lacan, le fait de s'inspirer du modèle mathématique, ne revient pas pour autant à confondre deux modes du réel : un réel qui fait travailler les mathématiciens, le réel en tant que cause du travail de formalisation, et un réel qui est produit par cette formalisation ou, plus exactement, par son échec. Il faut d'abord souligner que le réel est toujours relatif à un discours, car on ne tombe sur le réel qu'à partir d'un discours. Il en découle que l'émergence d'un nouveau réel a pour conséquence le remaniement du discours mathématique. Cela paraît contredire la philosophie spontanée des mathématiciens, le « réalisme platonicien » qui présuppose un univers mathématique préétabli que les mathématiciens n'ont plus qu'à découvrir. Or, si le réalisme des mathématiciens et la production de nouveaux réels ne sont pas incompatibles, c'est parce qu'une fois produit, le nouveau réel est posé comme étant déjà là.

C'est la leçon qu'on peut tirer de l'invention des transfinis : une fois les nouveaux nombres, les transfinis, construits par Cantor et introduits dans le champ mathématique, tout se passe comme s'il n'avait fait que les découvrir, puisque ils étaient toujours déjà là. Ainsi, ce qui n'est que produit d'une invention, est considéré, après coup, comme étant déjà là avant les démarches de Cantor qui l'ont engendré. Cette inversion de l'invention en découverte est le prix à payer pour le réalisme des mathématiciens. Celui-ci implique cette sorte de rétroaction pour garantir la « réalité » de ses objets. C'est que la réalité mathématique s'impose à tous comme étant nécessaire. Pour traiter du réel mathématique, il faut donc prendre comme point de départ le fait qu'un réel se produit comme hors de toute juridiction. Ainsi, pour produire les transfinis, il fallait inventer le chemin pour atteindre l'infini mathématique. La méthode de diagonale de Cantor était contingente, donc non requise par le discours mathématique existant. Il fallait donc l'inventer, trouver le chemin qui n'était pas donné. La méthode n'était pas nécessitée par le savoir mathématique au moment de son apparition, et pour cause, puisque l'invention du chemin, de la méthode, visait à résoudre une faille dans ce savoir même. Cependant, une fois l'invention des transfinis admise par le discours mathématique, cette contingence devient nécessaire.

On serait donc plutôt d'accord avec Badiou, lorsqu'il avance que le dire mathématique, en tant qu'événement, ne se soutient d'aucune garantie de la nécessité [81]. Pour comprendre cette articulation paradoxale, déjà évoquée par Cantor, entre la liberté de création et la contrainte [82] qui caractérise la mathématique, il faut préciser que, bien qu'il soit produit par le discours mathématique, le réel des mathématiques, pour être effectif, c'est-à-dire capable de renouveler le savoir mathématique, doit être posé comme ex-sistant au discours mathématique, et même comme étant préalable, hors de ce discours dont il procède cependant. Sur cette question de l'ex-sistence il faut spécifier que n'ex-siste que ce qui se manifeste comme une impossibilité à prendre ici au sens qu'il est impossible que ce réel puisse être affirmé ou nié par la démonstration mathématique. Ce qui revient à dire que le statut de réel de quelque chose qui se présente comme une entrave ou une difficulté dépend de la démonstration mathématique. On pourrait dire aussi que le réel comme ex-sistence, c'est une vérité démontrée comme impossible à démontrer. C'est précisément à ce qu'il ne puisse s'écrire que l'on reconnaît ce réel en mathématiques. L'exemple notoire qui, pour Lacan, illustre bien le réel en mathématiques, c'est l'impossibilité de démontrer la validité de l'hypothèse du continu. Au lieu de la démontrer par la méthode diagonale, Cantor a fait émerger l'hypothèsee du continu comme le réel-impossible des mathématiques. Plus généralement donc, si toute démonstration, une fois validée, implique qu'il est impossible de procéder autrement, l'impossibilité de la démonstration, c'est-à-dire l'impasse de la formalisation, l'impossibilité à écrire ou à ne pas écrire une formule, en revanche, génère un réel en tant qu'impossible.

C'est à ce niveau là que se situe la critique que Badiou adresse à Lacan. Pour aborder le rapport singulier de Lacan aux mathématiques, Badiou prend comme point de départ ce qu'il appelle « la triangulation » qui inclut la psychanalyse, la mathématique et la philosophie[83]. Badiou s'appuie sur un repère tiré de « L'étourdit » où Lacan met l'accent sur la défaillance de la philosophie lorsqu'il s'agit d'identifier l'essentiel de la mathématique : « Pour être le langage le plus propice au discours scientifique, la mathématique est la science sans

[81] Alain Badiou, *Le Séminaire. Lacan. L'antiphilosophie 3, 1994-1995*, Fayard, Paris 2013, p. 126.

[82] *Ibid.*, p. 129.

[83] *Ibid.*, p. 39.

conscience dont fait promesse notre bon Rabelais, celle à laquelle un philosophe ne peut que rester bouché[84] ». En revanche, ce qui caractérise l'approche de la psychanalyse à la mathématique tient au statut singulier que Lacan attribue au mathème : d'être vidé du sens, le mathème assure la transmission intégrale d'un savoir. Ainsi, pour Lacan, le discours mathématique, défini comme « langage de pur mathème » est « ce qui est seul à pouvoir s'enseigner : ceci sans recours à quelque expérience[85] ». C'est ce côté que le mathème en psychanalyse et le mathématisable aurait en commun. Mais il y a aussi un autre côté du mathème qui va au-delà du mathématisable. Pour la psychanalyse, c'est le réel du « il n'y a pas de rapport sexuel », le réel non-inscriptible, mais autour duquel tout dans le discours psychanalytique s'ordonne. C'est aussi ce réel qui ne peut être signalé que par les impasses du mathématisable : « C'est en quoi les mathèmes dont se formule en impasse le mathématisable, lui-même à définir comme ce qui du réel s'enseigne, sont de nature à coordonner à cette absence prise au réel[86] ». « L'absence prise au réel » évoquée ici, n'est rien d'autre que le réel propre à la psychanalyse, le « il n'y a pas de rapport sexuel », qu'il faut distinguer du réel inscriptible et donc enseignable par la voie du mathème. C'est ce réel dont l'absence est, comme le dit Badiou, « absence dans aucune mathématisation, c'est-à-dire son absence dans l'inscription[87] ».

Quel serait l'équivalent de cette « absence dans l'inscription », pour les mathématiques ? La « réalité » des mathématiques tient au fait que leur cohérence s'impose comme contrainte. Et si l'on peut dire que la formalisation revient à une mise en rapport, le réel survient comme impossibilité de mise en rapport, comme rapport impossible. Par conséquent, le réel en mathématique ne peut émerger que dans les lieux où cette cohérence est mise en défaut. C'est à ce niveau-là que Lacan cherche le réel en mathématique : le réel dans la formalisation même. Le réel dont il s'agit ici est celui qui « ne saurait s'inscrire que d'une impasse de la formalisation ». Ce qui est important à noter ici, c'est que c'est précisément sur ce point que Badiou avance ses objections à Lacan. La position de Lacan serait, selon Badiou, une position « archiscientifique[88] ». À suivre la lecture badiousienne de l'articulation que Lacan propose du réel et du

---

84 Lacan, « L'étourdit », p. 453.
85 *Ibid.*, p. 472.
86 *Ibid.*, p. 479.
87 Badiou, *Lacan*, p. 43.
88 *Ibid.*, p. 45.

mathème, celle-ci n'est tenable que si l'on n'introduit pas le point d' « un réel du réel ». La formule : le « réel du réel [89]» qu'on ne trouvera nulle part chez Lacan, comme Badiou l'admet volontiers, tient une place stratégique dans son argumentation à lui, puisqu'elle lui permet de clarifier comment se positionnent respectivement, selon Lacan, la psychanalyse et la philosophie par rapport à la mathématique.

Ainsi, à suivre Badiou, pour situer la place de la psychanalyse par rapport à la mathématique et à la science en général, il lui faut redoubler le réel, le réel propre à la science, le réel dont la science« découvre » les lois et qu'elle inscrit en formules, le réel mathématisable et transmissible par la voie du mathème enseignable ; et le réel propre à la psychanalyse, le réel non-mathématisable qui ne peut s'inscrire que par les impasses de la mathématisation. Ce que cherche Lacan, d'après Badiou, c'est précisément ce point d'impossible dans la mathématique elle-même qui permet de cerner le réel non mathématisable. Le mathème, tel que le conçoit Lacan, est archiscientifique et non pas scientifique, selon Badiou, parce qu'il est situé au point du réel de la mathématique. Et Badiou de conclure, « il ne peut pas être mathématique, précisément parce qu'il touche au réel de la mathématique elle-même[90] ». Or, c'est précisément cette distinction entre deux modes du réel qui séparent la psychanalyse de la philosophie qui, n'étant pas capable de toucher au réel de la mathématique, reste, comme l'affirme Lacan, « bouchée aux mathématiques ». Le fait d'avoir accordé le statut de pensée à la mathématique, seule à toucher le réel, est en même temps l'occasion pour Lacan de critiquer la philosophie qui, elle, est incapable de reconnaître, dans la mathématique, la voie d'accès au réel qui s'y trouve, et ne peut pour cette raison même que d'être bouchée à la mathématique.

Si Badiou rejette en bloc cette idée, c'est parce qu'il défend la thèse selon laquelle « s'il y a un lieu de pensée qui est bouché à lui-même, c'est bien la mathématique » et la raison qu'il avance n'est rien d'autre que son ignorance quant à « sa propre portée ontologique ». Cette thèse permet à Badiou de préciser son principal point de désaccord avec Lacan en maintenant que la philosophie, au lieu d'être bouchée aux mathématiques, est, au contraire, celle qui, identifiant dans la mathématique « un point de bouchon par rapport à sa propre nature on-

[89] *Ibid*.p. 44.
[90] *Ibid*., p. 46.

tologique », tente depuis Platon « de la déboucher ». À cet égard, le philosophe « n'est pas celui qui est bouché aux mathématiques », comme le soutient Lacan, « mais celui qui tente de les déboucher au regard d'elles-mêmes[91] ».

Badiou s'interroge sur « cette dimension radicale de la mathématique[92] » que la philosophie est censée manquer ou ne pas saisir. Il trouve la réponse dans « L'étourdit », où Lacan soutient, à propos de la mathématique, justement, que « le dit se renouvelle de prendre sujet d'un dire plutôt que d'aucune réalité[93] ». On trouve ce point névralgique dans ce que Lacan propose comme la dialectique du dire et du dit, telle qu'il la développe dans « L'étourdit ». Pour Lacan, c'est lorsque « surgit un dire qui ne va pas toujours jusqu'à pouvoir ex-sister au dit », qu' « un certain réel peut être atteint [94]». Le surgissement d'un dire dont dépend le dit constitue un événement au sens où il introduit une scansion, une coupure. Mais pour qu'un dire ait lieu, il faut qu'il se soumette à l'épreuve de ses conséquences, du dit, et c'est seulement à ce moment-là qu'un « certain réel peut être atteint ».

Selon la lecture que Badiou propose de cette dialectique singulière du dit et du dire, on peut être d'accord avec Lacan qu'il faut qu'il y ait le dire pour pouvoir transformer, inventer ou renouveler le dit. C'est que la mathématique, en se rapportant au dire, et non pas à une quelconque réalité, se rapporte à une réalité qui lui est immanente, un point sur lequel a déjà insisté Cantor. À suivre Lacan, c'est justement ce point que la philosophie, dans son rapport aux mathématiques, rate forcément, à savoir que le renouvellement du dit s'enracine dans le dire, plutôt que dans le sens comme le prétend la philosophie. En s'efforçant de donner un sens à la vérité, dit Lacan, la philosophie méconnaît la vrai nature de la mathématique qui serait, selon Lacan, mais lu par Badiou, « un dire in-sensé qui se réalise comme dit absolu (intégralement transmissible) [95]». Et pour être encore plus précis, « la valeur paradigmatique de la mathématique est d'être le modèle insurpassable d'une pensée qui n'a aucun sens[96] ». Il est curieux d'ailleurs, constate Badiou, que sur cette question, un antiphilosophe, Lacan,

91 *Ibid.*, pp. 49–50.
92 *Ibid.*, p. 113.
93 Lacan, « L'étourdit », p. 452.
94 Lacan, *Encore*, p. 25.
95 Badiou, *Lacan*, p. 116.
96 *Ibid.*, p. 118.

puisse rejoindre un philosophe, Platon, à une différence essentielle près : ce que Lacan identifie comme valeur paradigmatique de la mathématique est précisément ce que Platon lui reproche.

Car ce que Platon objecte à la mathématique, c'est de fonctionner à partir d'hypothèses dont elle ne rend pas compte. Traduit en termes lacaniens, Platon saisirait, avant Lacan, que la mathématique s'origine dans « un pur dire », que « la mathématique n'est que sous la garantie d'un dire », que Badiou traduit en « dimension axiomatique de la mathématique[97] ». Vu sous cet angle, le dit, dans la mathématique, « procède intrinsèquement d'un dire, puisqu'il faut que quelque chose soit d'abord dit, pour qu'ensuite il y ait « un enchaînement fidèle à ce dire premier constituant[98] ». Tout en critiquant la mathématique, Platon rejoindrait Lacan, puisque, lui aussi, identifie « le primat du dire » dont découlerait la réduction du sens. Si la philosophie est le domaine de la dialectique du sens, la mathématique est le domaine de « la prescription du dire » ou « sous la loi de la prescription du dire[99] », qui ne se soutient d'aucune garantie de la nécessité. Tirant la leçon de Descartes, Badiou affirme que la spécificité de la discursivité mathématique se fonde sur « l'événement du dire » et ne peut donc être qu'événementielle et contingente, mais, d'un autre côté, « ne relevant pas de la réalité, est absolument nécessaire », à prendre au sens d'être « nécessaire sous l'autorité du dire[100] ». Ainsi, d'avoir identifié « la mathématique sous la loi du dire », la philosophie doit reconnaître le paradoxe constitutif de la mathématique, le lien entre la contingence et la contrainte[101].

La lecture que propose Badiou de la « triangulation » : philosophie, psychanalyse, mathématique, n'est peut-être pas aussi claire qu'il le prétend. De fait, il y a plus de points de convergence que de points de divergence entre lui et Lacan que Badiou serait prêt à l'admettre. Voyons de plus près comment fonctionne cette dialectique dans le cas de la mathématique, si la place du dire dans la psychanalyse est « l'analogue dans le discours mathématique[102] ». En effet, le discours mathématique, si l'on suit Lacan, doit être situé à partir de la logique

97 *Ibid.*, p. 122.
98 *Ibid.*
99 *Ibid.*, p. 124.
100 *Ibid.*, p. 126.
101 *Ibid.*, p. 129.
102 Lacan, « L'étourdit », p. 476.

du dire et du dit : « C'est ainsi que le dit ne va pas sans dire. Mais si le dit se pose toujours en vérité, … le dire ne s'y couple que d'y ex-sister, soit de n'être pas de la dit-mension de la vérité. »[103] Si cette logique du dire met en place l'essentiel de la conception lacanienne de la mathématique, c'est aussi parce que, dans le discours de la mathématique, « le dit se renouvelle [constamment] de prendre sujet d'un dire plutôt que d'aucune réalité, quitte, ce dire, à le sommer de la suite proprement logique qu'il implique comme dit[104] ».

Pour prendre un exemple, celui d'ailleurs que Lacan lui-même prend, s'il y a un « événement Cantor », une révolution cantorienne, c'est parce qu'il y a le dire de Cantor ou plutôt l'événement de son dire. Autrement dit, pour Lacan, l'invention mathématique procède du dire, le dire de Cantor, d'Euclide,… puisque seul un dire pourra renouveler le dit défaillant. Or ce dire intervient comme une contingence qui ne se fonde d'aucune réalité. Au départ, le dire n'est que la possibilité de son existence et de ce fait même la suspension de la valeur de vérité du dit. Le dit dépend nécessairement de cette possibilité de l'existence du dire, mais c'est en tant que sa condition que l'acte de dire ex-siste au dit. Étant modale, la logique du dire donne ainsi un nouvel éclairage à la question de l'existence. Pour clarifier ce point, Lacan prend deux exemples, celui du discours psychanalytique et celui du discours mathématique. Concernant le discours psychanalytique, pour qu'il y ait ce discours et sa pratique, l'analyse, il faut restituer « le dire de Freud » qui « s'infère de la logique qui prend de source le dit de l'inconscient[105] ». Autrement dit, c'est parce que Freud l'a découvert que le dit de l'inconscient existe. L'autre exemple exposé par Lacan, celui du discours de la mathématique, est destiné à montrer que le dit « se renouvelle de prendre sujet d'un dire plutôt que d'aucune réalité ». Ce dire est un acte, dans son pouvoir de transformation, apportant la nouveauté d'une formule mathématique, d'un chiffrage du réel. On peut assigner au dire de Cantor, c'est-à-dire, à un dire qui a déjà fait preuve quant à sa puissance de création d'un nouveau savoir mathématique, le statut de réel, le statut d'ex-sistence au système de savoir en place. Le dit, en revanche, est ce qui, d'être posé en vérité, doit être mis à l'épreuve par la démonstration afin de valider, rétroactivement, le dire

[103] *Ibid.*, p. 452.
[104] *Ibid.*
[105] *Ibid.*, p. 454.

inaugural. On pourrait dire aussi que le dit issu de ce dire est sommé – via la démonstration – d'assurer au dire son statut axiomatique.
A cet égard, le « dire mathématique », est « le dire » en tant qu'il réalise un savoir. L'avoir lieu du dire présuppose une rencontre inédite, une nouveauté absolue, d'où l'idée de Lacan de faire du « dire » un événement en tant que rencontre avec « un bout de réel ». Ce changement de perspective permet de mettre en place le savoir du réel à partir d'un dire. Pour fixer les termes, on pourrait dire qu'il y a du « dire » au moment où s'établit un avant et un après. L'introduction d'un savoir nouveau en tant que rencontre avec « un bout de réel », produit cet avant et cet après. C'est donc cette rupture ou scansion du temps qui fait du « dire » un événement (mais à condition de ne pas le confondre ni avec le discours mathématique ni avec la démonstration, qui se construisent à partir de ce moment du dire). C'est en ce sens que le « dire-événement » peut conduire à la refonte du champ du savoir dans son ensemble. C'est là, pour reprendre les définitions de Russell, que le mathématicien « ne sait jamais de quoi il parle » parce qu'il confond événement en tant que création pure (en termes badiousiens on dira : la vérité), et savoir en tant qu'ordonnancement rationnel du discours, « ni si ce qu'on dit est vrai » parce qu'il ne fait pas la différence entre les registres qui ordonnent dire et vrai. On voit bien qu'ici, l'affinité entre langage du mathématicien et inconscient se situe au niveau du rapport à la question de la vérité : « le mathématicien a avec son langage le même embarras que nous avec l'inconscient, à le traduire de cette pensée qu'il ne sait pas de quoi il parle, fût-ce à l'assurer d'être vrai (Russell)[106] ». Dans la perspective de cette affinité, Lacan dit qu'un certain réel est atteint quand « surgit un dire qui ne va pas toujours jusqu'à pouvoir ex-sister au dit[107] ».

Pour conclure

Sa lecture attentive, mais critique de l'usage lacanien des mathématiques nous permet de voir sous un autre angle la tentative de Badiou de réintriquer philosophie et mathématique. Du fait d'avoir fondé son projet philosophique sur la thèse de l'identité entre mathématique et ontologie, c'est-à-dire d'avoir affirmé que la philosophie est sous la condition des événements de la mathématique, il s'agit chez Badiou d'un tout autre rattachement à la mathématique. En effet, le

[106] *Ibid.*, p. 452–453.
[107] Lacan, *Encore,* p. 25.

rattachement de la philosophie consiste en ce qu'elle accepte de reconnaître la mathématique comme l'instigatrice possible d'une détermination inédite de la philosophie elle-même. En tant que « condition » de la philosophie, la mathématique est considérée ici comme puissance d'une pensée libre et laïque dont l'apport est de l'ordre d'une chance de nouveauté donnée. Or, dans cet effort pour relier de nouveau la philosophie et la mathématique, une figure étrange est convoquée : Lacan, qui n'est ni philosophe ni mathématicien, mais psychanalyste. Et c'est dans cette tentative de renouer avec la mathématique, que Badiou critique l'usage de la mathématique par Lacan.

La « triangulation » (mathématique, psychanalyse, philosophie) serait, selon Badiou, une articulation singulière bâtie par Lacan dans le but de mieux circonscrire son recours aux mathématiques. Or, Badiou, lui aussi, a besoin d'une telle « triangulation » pour mettre en lumière la manière dont la philosophie, théorie générale des vérités événementielles, aborde les mathématiques identifiées à la pensée de l'être. Et lui aussi fait référence aux impasses de la formalisation mathématique qui attestent que la mathématique, d'avoir touché à une impossibilité qui lui est propre, se fonde sur un réel. Le réel indépassable de la psychanalyse : il n'y a pas de rapport sexuel ; c'est le réel propre à la psychanalyse en tant que telle, le réel autour duquel tout le « reste » s'ordonne, tout ce qui peut s'inscrire, se mathématiser, formaliser, être transformé en mathèmes. Or, Badiou, n'est-il pas, lui-aussi, obligé de reconnaître qu'il y a un réel ininscriptible de la mathématique cantorienne, le « il n'y a pas de rapport » mesurable, numérable entre le dénombrable et le continu, entre l'ensemble des éléments d'un ensemble et l'ensemble de ses parties, pour s'assurer de la compatibilité entre la philosophie en tant que pensée de l'événementialité des vérités et l'ontologie=mathématiques en tant que pensée de l'être-multiple ?

Car dans son effort de renouer les liens entre la philosophie et les mathématiques, la philosophie est forcée de se battre sur plusieurs fronts : contre les philosophies qui ne reconnaissent pas les mathématiques comme une pensée créative (Heidegger, par exemple) ; contre l'antiphilosophie qui assigne les mathématiques à la non-pensée ; et contre l'antiphilosophie singulière de Lacan qui accorde aux mathématiques le statut de pensée parce que les mathématiques, selon Lacan, sont les seules capables de toucher le réel. Mais il ne leur accorde ce privilège qu'au prix de s'arroger le droit d'identifier le point où les mathématiques défaillent : le point d'impossible ou le réel non mathématisable, ininscriptible en mathèmes, et qui ne peut se manifester qu'à travers les impasses de la formalisation. Car, quelle est l'objection principale que Badiou adresse à Lacan ? De prendre la position que Badiou qualifie d' « archiscientifique » vis-à-vis des mathématiques dans le but d'identifier le point d'impossible indépassable des mathématiques, le « réel du réel » des mathématiques, comme le dit Badiou, plus précisément, en en mot, de vouloir « dire le vrai du réel » des mathématiques. Sortant ainsi du strict cadre des mathématiques, Lacan se hisse à une position que Badiou qualifie d' « archiscentifique », une position qui serait capable de circonscrire le réel non-mathématisable dans les mathématiques elles-mêmes.

Mais en dépit de points de convergence que nous avons essayé de circonscrire, la philosophie badiousienne et la psychanalyse lacanienne n'ont pas et ne peuvent pas avoir le même recours à la mathématique. Pour Lacan, la mathématique, tout en faisant partie de ces disciplines dont elle ne peut pas se désintéresser et tout en admettant qu'elle y occupe une place privilégiée, ne constitue pas une de ses conditions, au sens que Badiou donne à cette notion. Il se tourne vers la mathématique pour garder le cap sur le réel, pour cerner le réel propre à la psychanalyse, tentant en même temps de produire un savoir transmissible à tous via les mathèmes. Cependant la psychanalyse ne dépend pas de la mathématique. D'ailleurs l'invention de la psychanalyse par Freud en témoigne puisque, pour établir la psychanalyse, Freud n'a pas besoin des mathématiques.

Or, tel n'est pas le cas pour Badiou. La philosophie dépend des événements qui ont eu et auront lieu dans la mathématique parce que c'est à partir des événements que de nouvelles vérités se produisent, que la tâche de la philosophie est de penser. La philosophie n'est donc pas et ne peut pas être indifférente à ce qui se passe dans la pensé de l'être en tant qu'être. Ainsi, comme cela a déjà été noté et comme Badiou lui-même le reconnaît, toute mathématique, identifié à l'ontologie, n'est pas compatible avec la philosophie des vérités événementielles. En effet, seule une mathématique capable d'identifier et de penser les points d'impossible, son réel, qui se présente sous la forme de ses impasses, apories, difficultés, fournit la place nécessaire pour que les événements aient lieu. On dira que la philosophie sous la condition dépend non seulement des vérités que ses conditions produisent, mais même plus encore, qu'elle dépend du réel de ses conditions et tout particulièrement du réel de la mathématique=ontologie.

Badiou lui-même nous donne une idée de cette dépendance de la philosophie du réel de la mathématique. Citons le passage central de *l'Être et l'événement* :

> C'est depuis ses origines que la philosophie, anticipant la butée cantorienne, a scruté l'abîme qui sépare la discrétion numérique du continu géométrique. Cette abîme n'est autre que celui qui sépare ω_o, domaine infini dénombrable des nombres finis, de l'ensemble de ses parties $p(\omega_o)$, seul apte a fixer la quantité des points dans l'espace. ...Nous pouvons maintenant dire que c'est l'être même, tel que flagrant dans l'impasse de l'ontologie, qui organise l'inexhaustion de sa pensée, dès lors que nulle mesure ne se laisse prendre du lien quantitatif entre une situation et son état, entre l'appartenance et l'inclusion. Il y a tout lieu de croire que c'est *pour toujours* qu'est ouverte dans l'être cette provocation au concept qu'est le dé-rapport entre présentation et représentation. ... Si le réel est l'impossible, le réel de l'être, soit l'Être, sera précisément ce que détient l'énigme d'un anonymat de la quantité[108].

L'errance de l'être, invoquée par Badiou, est insupportable pour la pensée qui veut, au contraire, que « le désancrage quantitatif de l'être » cesse, et qui donc ne peut se satisfaire de « la dé-mesure ontologiquement attestée», qui vise précisément à mesurer l'excès, à cerner l'être là où « il n'est plus exactement dicible [109] ». Et Badiou examine attentivement trois stratégies de la pensée, trois orientations dans la pensée ontologique, comme il le dit, pour « parer à l'excès », de dire l'impossible-à-dire de l'ontologie : la voie du constructible, la voie des grands cardinaux et la voie du générique. Si la voie du constructible et la voie des grands cardinaux tentent de maîtriser le réel de l'ontologie, soit « par le bas », c'est-à-dire en réduisant les multiplicités au constructible, soit « par le haut », en formulant des hypothèses d'existences des cardinalités énormes dans le but de prescrire « une disposition hiérarchique où rien ne saurait errer [110] », l'enjeu de la voie du générique, en revanche, n'est pas de réduire ou de contrôler l'excès, mais de le rejoindre. Pour s'assurer de la compatibilité de la philosophie, théorie générale de l'événementialité des vérités, et de l'ontologie, science de l'être, il ne suffit pas de seulement choisir la voie générique. Il faut en plus anticiper en quelque sorte que la démonstration de l'hypothèse du continu,

108 Badiou, *Être et événement*, pp. 311–312.
109 *Ibid.*, p. 312.
110 *Ibid.*, p. 313.

postulant que la cardinalité de R (le continu ou l'ensemble des nombres réels) est successeur immédiat de celle de N (dénombrable, ensemble des entiers), ne validera jamais sa vérité. La philosophie, telle que Badiou la conçoit, nécessite une ontologie capable de garantir « pour toujours » qu'il y aurait de nouvelles contingences événementielles dans lesquelles s'originent les vérités, y compris celles de l'ontologie. *L'Immanence des vérités* semble reprendre et renouveler ce questionnement entamé dans l'*Être et l'événement,* un questionnement au cœur duquel gît le statut indécidable de l'hypothèse du continu. Badiou opte, comme toujours, pour sa fausseté. La théorie des grands cardinaux, situé dans le camp de l'adversaire d'antan, avec le théorème de Jensen, qui permet de déterminer la puissance d'un ensemble, nommé $0^{\#}$, semble confirmer le bien-fondé du choix badiousien. N'empêche que l'hypothèse que Badiou lui-même fait sur l'hypothèse du continu, à savoir sur sa fausseté foncière, ne se fonde que d'un pari : « un pari sur le réel », qui tout comme le réel de la psychanalyse : il n'y a pas de rapport sexuel, un réel indépassable pour la psychanalyse, constitue l'horizon indépassable pour l'ontologie pour qu'elle puisse être compatible avec la philosophie, pensée des vérités événementielles. Ce que Badiou cherche, c'est un analogue du réel de la psychanalyse, et il le trouve sous une double forme : celle de la fausseté supposée de l'hypothèse du continu, d'une part, et, d'autre part, celle de l'existence supposée d'un ensemble $0^{\#}$.

Dans les deux cas, il s'agit de parier sur l'existence des ensembles infinis non constructibles. Le problème que le « lemme de recouvrement » de Jensen, comme Badiou l'appelle, résout est le suivant : « *Il existe un ensemble, nommé* $0^{\#}$, *zéro dièse, tel que, s'il n'existe pas, le recouvrement est toujours possible, et que, s'il existe, le recouvrement de certaines grandes multiplicités est impossible*[111] ». Or, comme pour l'hypothèse du continu, l'existence de $0^{\#}$ n'est pas démontrable dans ZFC, l'existence de $0^{\#}$ « relève d'une décision », celle qui proclame son existence « au risque même … que toute l'architecture de l'ontologie formelle s'effondre[112] ». Or, ce risque ne peut qu'être assumé par le choix qui vise la création ou l'émancipation. Finalement, toute pensée créative, écrit Badiou, est obligée de prendre l'existence de $0^{\#}$ comme axiome, pour pouvoir franchir le cadre finitiste de la situation donnée. Quelle est la leçon à tirer de l'examen minutieux de la théorie des grands cardinaux que présente *L'Immanence des*

[111] Badiou, *L'immanence des vérités*, p. 445.
[112] *Ibid.*, p. 446.

vérités. La réponse que propose Badiou est la suivante : parier sur l'existence de $0^\#$ doit être considéré comme une arme pour mener à bien la lutte dans des situations concrètes. Et pour mener à bien cette lutte, il faut

> déterminer le seuil, qui est aussi le lieu du combat. Il faut penser l'infini complet – qui nous dit que tout n'est pas soumis à la finitude – mais aussi penser et pratiquer $0^\#$ – qui nous dit *où* se joue la sortie du vieux monde. Et cet « où », infecté qu'il est par les lois du vieux monde et éclairé aussi bien par l'infini nouveau, nul n'en peut économiser les aspects retors, embrouillés, épuisants [113].

Ainsi, si la mathématique peut créer une possibilité nouvelle pour la philosophie, elle ne le peut que grâce à la contingence de ce que le dire mathématique y produit. La possibilité nouvelle que produit la mathématique n'est donc pas une simple affaire de démonstration, mais implique un acte qui est sans garantie. Nous voici, encore une fois, face à la dialectique du dire et du dit, ou, pour Badiou, face à la dialectique de l'acte et de l'œuvre : tout comme pour Lacan, pour qui c'est à travers l'épreuve du dit que s'assure le statut d'un vrai acte du dire créatif, novateur, pour Badiou, « les actes ne sont rien s'ils ne sont eux aussi des œuvres[114] ».

Références

Badiou, Alain, *Théorie du sujet*, Seuil, Paris 1982
— *L'Être et l'événement,* Seuil, Paris 1988
— « Philosophie et mathématique », *Conditions,* Seuil, Paris 1992
— « Sujet et infini », *Conditions*
— « La mathématique est une pensée », *Court traité d'ontologie transitoire,* Seuil Paris 1998
— *Le Siècle,* Seuil, Paris 2005
— *Le Séminaire. Lacan. L'antiphilosophie 3, 1994–1995,* Fayard, Paris 2013
— *Éloge des mathématiques,* Flammarion, Paris 2015
— *L'immanence des vérités,* Fayard, Paris 2018
Cantor, Georg, *Gesammelte Abhandlungen mathématischen und philosophischen Inhalts,* E. Zermelo (éd.), Springer, Berin 1932

[113] *Ibid.*, p. 462.
[114] *Ibid.*

— « Fondements d'une théorie générale des ensembles », trad. J.-C. Milner, *Cahiers pour l'analyse* (10/1969)

Charraud, Natalie, *Infini et Inconscient. Essai sur Georg Cantor,* Anthropos-Economica, Paris 1994

Imbert, Claude, « Où finit le platonisme ? », dans *Alain Badiou : Penser le multiple*, Charles Ramond (éd.), L'Harmattan, Paris 2002

Kant, Emmanuel, *Critique de la raison pure,* dans *Œuvres philosophiques,* tome I : *Des premiers écrits à la Critique de la raison pure (1747–1781),* Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, Paris 1980

Lacan, Jacques, « Science et vérité », dans *Écrits,* Seuil, Paris 1966

— « Séminaire de Jacques Lacan, Le savoir du psychanalyste, 1971–1972 » (inédit)

— « Séminaire de Jacques Lacan, XXII, R.S.I. 1972–1973 », (inédit)

— *Le Séminaire de Jacques Lacan, Livre XX, Encore,* Seuil, Paris 1975

— « Séminaire de Jacques Lacan, XXV, Le moment de conclure 1977–1978 », (inédit)

— *Le Séminaire de Jacques Lacan, Livre XVII, L'envers de la psychanalyse,* Seuil, Paris 1991

— « L'étourdit », dans *Autres écrits,* Seuil, Paris 2001

— « La note italienne », *Autres écrits*

— « Télévision », *Autres écrits*

Lavendhomme, René, *Lieu du sujet. Psychanalyse et mathématique,* Seuil, Paris 2001

Miller, Jacques-Alain, « Vers un signifiant nouveau », *Revue de l'ECF* (20/1992)

Russel, Bernard, *Écrits de logique philosophique,* trad. Jean-Michel Roy, PUF, Paris 1989

— « Work on the principles of mathematics », *The International Monthly,* 4 (1/1901)

Le Modèle ensembliste en discussion
The Set-theoretical Model in Discussion

Filozofski vestnik | Volume XLI | Number 2 | 2020 | 105–117 | DOI: 10.3986/FV.41.2.05

Michael Hauser*

Badiou and the Ontological Limits of Mathematics[1]

> *Mathematical axioms are not axioms of general truth. [...] But the mathematician argues, from his finite truths, through habit, as if they were of an absolutely general applicability – as the world indeed imagines them to be.*
> E.A. Poe, The Purloined Letter

Philosophy and the composition of its mathematical condition

In the history of philosophy we can find various ways of philosophy relating to mathematics (Eleats, the Atomists, Plato, Descartes, Leibniz, etc.). In keeping with this tradition, Badiou constituted a new relationship between philosophy and mathematics. In Badiou's words, "mathematics can tell us something about being as such, without knowing that this is the very meaning of mathematics."[2] This relationship formed a new position of philosophy regarding mathematics, which I will gradually elucidate.

Mathematics in the shape of set theory was the science to which Badiou related philosophy in *Being and Event*, providing the thesis that mathematics is ontology (the science of being). "Insofar as being, qua being, is nothing other than pure multiplicity, it is legitimate to say that ontology, the science of being qua being, is nothing other than mathematics itself."[3] Badiou understood the Zermelo-Fraenkel axiomatisation of set theory to be a truth procedure which formed a "condition" for his philosophy. Badiou's relating of philosophy to this axiomatisation of set theory, which appeared as ontology, transformed philosophy into "metaontology". Oliver Feltham, in the Preface to *Being and Event*,

1 This work was supported by the Czech Science Foundation under the grant: "Unity and-Multiplicity in Contemporary Thought", No. 17-23955S.

2 Alain Badiou, *Sometimes, We Are Eternal*, Suture Press, Lyon 2019, p. 47.

3 Alain Badiou, *Being and Event*, trans. Oliver Feltham, Continuum, London and New York 2006, p. xiii.

* Institute of Philosophy of the Czech Academy of Sciences, Prague

mentioned other axiomatisations of set theory, such as W. V. O. Quine's, and concluded that these multiple axiomatisations show the contingency of philosophy's conditioning.[4] Badiou's *Logics of Worlds* was related to a different type of mathematics, i.e. category theory (Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane). *The Immanence of Truths* draws upon the theory of large cardinals. These various attachments that align philosophy with specific sorts of mathematics seem to be consequences of "axiomatic decisions" which claim no extrinsic justification for themselves. Many scholars assume that axiomatic decisions create the foundations of Badiou's philosophy.[5] Badiou himself writes that set theory and category theory provide different conditions for philosophy, which instigates "a debate crucial for the construction of the space of philosophy that invariably takes the form of a matrix of ontological choices."[6] Badiou clearly shows that a mathematical condition of philosophy does not amount to an interpretation of the given state of mathematics that is the business of the philosophy of mathematics – a discipline Badiou rejects. Here, Badiou's crucial idea is that the space of philosophy is "the construction" resulting from philosophical acts that are "ontological choices". As Norman Madarasz put it, Badiou performs moves in the field of mathematics and makes a decision concerning the relationship among various segments of mathematics.[7] This decision is not an interpretative choice among various accounts of a part of mathematics that appertains to the philosophy of mathematics, nor does it directly intervene in the field of mathematics so as to develop its axioms, theorems, and techniques. Badiou emphasises that he presents "nothing in mathematics which has not been established."[8] He follows his own philosophical ends and prefers some mathematical axioms and theorems to others. These "ontological choices" are the acts that consistently constitute the mathematical space that conditions philosophy. By these

4 Oliver Feltham, "Translator's Preface", in Badiou, *Being and Event*, p. xvii.

5 Zachary Luke Fraser, "New Directions", in A. J. Bartlett, J. Clemens (eds.), *Alain Badiou. Key Concepts*. Acumen, Durham 2010, p. 177.

6 Alain Badiou, *Mathematics of the Transcendental*, trans. A. J. Bartlett and A. Ling, Bloomsbury Publishing, London and New York 2014, p. 16. Category theory is seen to be a complementary theory of set theory. While the latter enables us to conceive a being as a pure multiple, the former provides the topological localisation of a being, or of its appearing in a world.

7 Norman Madarasz, "On Alain Badiou's Treatment of Category Theory in View of a Transitory Ontology", in G. Riera (ed.), *Alain Badiou. Philosophy and Its Conditions*, State University of New York Press, Albany 2005, p. 35.

8 Badiou, *Being and Event,* p. xiv.

choices Badiou composed a consistent mathematical condition of philosophy.[9] It means that we divide the mathematical axioms and theorems into two parts. Some are those that we relate to philosophy, the others are those which we leave aside. For this reason, philosophy "constructs" its mathematical condition as a composition of various mathematical fragments. In *Manifesto for Philosophy*, Badiou defined this role of philosophy as follows: philosophy *only* composes the given system of its conditions.[10] Philosophy composes elements given in the field of mathematics so as to construct a *consistent* scientific condition of philosophy. This philosophical construction consists in selecting axioms, theorems, and techniques such as the axiom of separation, Cohen's generic set, the technique of forcing, etc. These mathematical elements are composed as the conceptual space which philosophy relates itself to. So, we have the selection and composition of the axioms that condition *Being and Event*. Another selection and composition of mathematical concepts condition *Logics of Worlds*. Then, there are the ones that create the mathematical condition for *The Immanence of Truths*. We can see that these conditions are not pre-given but are constructed by philosophy using various mathematical elements. Philosophy, thus, completes a consistent fabric of its condition.

Mathematics is a multiple universe of axioms, theorems, techniques, theories, interpretations, and disputes. Due to this complexity, mathematics as such cannot provide philosophy with a consistent "space" that would condition the development of philosophical concepts. The selection of elements from this immense complexity of mathematics is decisive for the composition of the mathematical condition of philosophy. Needless to say, the composition of the mathematical condition of philosophy is an exacting task. Badiou mentioned that he had been working on set theory for almost twenty years.[11]

9 Badiou noted that he drew on the mathematical material which is dispersed throughout Robert Goldblatt's book *Topos: The Categorial Analysis of Logic* and throughout other books. He aimed at interpreting mathematical demonstrations such as the one showing that "*every* 'Boolean' transcendental is expressible in a set-theoretic form, and that, in this sense, there is a kind of legislation of appearing which is isomorphic to that of its being." Badiou, *Mathematics of the Transcendental*, p. 183.

10 Alain Badiou, *Manifesto for Philosophy*, trans. N. Madarasz, SUNY Press, Albany 1999, p. 39.

11 Badiou, *Sometimes, We Are Eternal*, p. 41.

We will now address Badiou's specific concept of conditioning, which I propose to depict as a three-layered model. Philosophy with its concepts and problems (being, truth, subject, infinity, etc.) forms the top level of this model. The mathematical condition of philosophy is the second level, i.e. the compositive construction produced by philosophy. And finally, the given state of mathematics with its universe of axioms, theorems, lemmas, techniques, etc., represents the third level. Mathematics enables philosophy to construct its own mathematical space, i.e. the second level in the model. So, we have a twofold conditioning. The constructed mathematical space (the second level) conditions philosophy (the first level) and simultaneously the given state of mathematics (the third level) conditions the mathematic space (the second level), providing philosophy with axioms, theorems, etc., to construct it.

Following this introduction, I can present two consecutive theses intended to depict the position of Badiou's philosophy and its dynamic relation to mathematics.

Philosophical concepts as an excess in the metastructure

The first thesis: the mathematical condition is a "situation", and philosophy acts as its metastructure. Philosophical concepts (event, truth, subject, etc.) appear as a wandering excess from a mathematical point of view. This excess is an effect of the relation between philosophy (metastructure) and its mathematical condition (situation). This excess is described by Easton's theorem.

Žižek maintains that Badiou transposed the real into the discourse of the Master and "what Badiou precludes is the possibility of devising a discourse that has as its structuring principle the unnameable 'indivisible remainder' which eludes a discursive grasp."[12] Žižek pays attention to the fact that Badiou did not keep the real as an element of a Lacanian discourse, but overlooked another form of the real in Badiou's metaontology which comes to light when we unfold the context of set theory. Badiou conceives of the real as "an impasse of formalisation" which is a result of the operation "the count-as-one", which excludes and

[12] Slavoj Žižek, "From Purification to Subtraction: Badiou and the Real", in P. Hallward, (ed.), *Think Again: Alain Badiou and the Future of Philosophy*, Continuum, London and New York 2004, p. 177.

forgets “pure” multiplicities. This exclusion opens lacunae as symptoms of the real in a situation.[13] In keeping with this meaning of the real, Badiou grasps the real in mathematics as being “deprived of sense.” The real is an impasse that makes it impossible to resolve a conflict among interpretations.[14] We can, therein, find a theorem that conveys the real as being inherent in the representative structure. In the remarkable “Meditation twenty-six” in *Being and Event*, Badiou shows how the void reappears in the state of a situation, which is a metastructure in the sense of representation, even though the state of a situation had ensured by the operation “the count-as-one” that the void would not be presented.

Badiou draws on Easton’s theorem, which states that given an infinite cardinal λ, the value of a multiple $p(\lambda)$, i.e. the quantity for the state whose situation is the multiple, can be designated as *any* superior successor cardinal of λ.[15] In Badiou’s terms, the state of a situation is quantitatively larger than the situation, but it is impossible to determine the quantitative difference between these two instances. The state of a situation is a representation of the presented situation. From Easton’s theorem it follows that representation involves an excess that cannot be counted. We can understand this quantitative excess to be the errant void in the representative structure, the one that corresponds to the real. As Badiou stresses, we have an irremovable rift between the representative structure, i.e. the metastructure, and the situation. This rift produces an un-relation: there is no adequate relation between representation and presentation. In *Manifesto for Philosophy*, Badiou introduces the un-relation as the real. “This relation has the form of a *wandering excess*: it is known that the parts are more numerous than the members (Cantor’s theorem), but no measure of this ‘more’ can be established. It is moreover at this real point – wandering excess in the ‘quantitative’ infinite – that the great *orientations in thought* are established.”[16]

My idea is to conceive of Badiou’s philosophy as a representative structure (a metastructure) and its mathematical condition as the presented situation. This interpretation corresponds to Badiou’s understanding of the relationship between philosophy and mathematics: philosophy is metaontology and mathe-

---

13 Badiou, *Being and Event*, p. 54.

14 Alain Badiou, *Briefing on Existence. A Short Treatise on Transitory Ontology*, State University of New York Press, New York 2006, p. 56.

15 Badiou, *Being and Event*, p. 279. Cf. Bartlett et al. (eds.), *Badiou. Key Concepts*, p. 53.

16 Badiou, *Manifesto for Philosophy*, p. 80. Easton’s theorem refers to Cantor’s.

matics is ontology. Then, Badiou's metaontology can be understood in the light of Easton's theorem, which enables us to elucidate a "quantitative excess" that arises in philosophy as related to mathematics. This excess explains the fact that Badiou's philosophy provides concepts without an adequate relation to mathematical axioms and theorems, even if mathematics is its scientific condition. These concepts appear in the frame of philosophy and form elements that "quantitatively" exceed the ones that we find in the mathematical composition that conditions philosophy. The glaring example of this excess is represented by the concept of an event that is not related to a mathematical axiom. Badiou presents it as "the intervening doctrine" because mathematics is the science of being-qua-being (i.e. ontology), while the doctrine of the event, precisely, designates 'that-which-is-not-being-qua-being'.[17] For this reason, mathematics cannot offer an axiom of the event. Its concept results from the philosophical intervention. The philosophical relation to mathematics is an "un-relation" in this sense. Having an "un-relation" to mathematics as ontology, Badiou's philosophy is not the philosophy of mathematics but a "metaontology" that establishes philosophical concepts without defining their relation to mathematical axioms and theorems.

This "meta-position" means that philosophy "represents" mathematics as ontology. As mentioned above, philosophy composes its condition by selecting some mathematical axioms, theorems, techniques, etc., in order to construct a consistent system thereof that would act as the condition of philosophy. In principle, this procedure corresponds to the operation of "counting" that creates a consistent situation as a "presented multiple."[18] The mathematical condition of philosophy works as the "situation" composed by philosophical "counting" consisting in selecting axioms, theorems, etc., from the inconsistent multiplicity of mathematical concepts.[19] The philosophical "count" simultaneously presents these axioms, theorems, etc., in such a way so as to limit their original mathematical complexity.[20] This "count" reduces an immense multiplicity of axioms, theorems, and their various formalisations and interpretations. As Badiou put it,

17 Badiou, *Being and Event*, p. 13.

18 *Ibid.*, p. 24.

19 Understandably, these axioms, theorems, etc., had been "counted" and presented in the frame of mathematics.

20 For instance, cf. Badiou's philosophical presentation of Cantor's theorem with its original complex formalisation. *Ibid.*, p. 273.

a metastructure operates in such a way so as to make a situation consistent.[21] Philosophy itself correspondingly intervenes in the inconsistent multiplicity of axioms, theorems, lemmas, formalisations, systems, etc., that create the universe of mathematics. By this operation, philosophy composes its consistent condition. Therefore, Badiou's philosophy acts as the metastructure that composes its mathematical condition as a consistent multiplicity. Using the proposed model of conditioning, philosophy, being on its top level, represents the metastructure, the constructed mathematical space (the condition of philosophy) on the second level forms a consistent multiplicity, i.e. the presented situation, while mathematics, on the third level, is an inconsistent multiplicity of mathematical axioms, theorems, formalisations, etc. We can conclude: if Badiou's philosophy operates as a metastructure, we can apply Easton's theorem to it.

Easton's theorem shows that Badiou's philosophy as a metastructure involves the wandering excess of representation that cannot be removed. This excess is removable only on the condition that philosophy would lose its position as a metastructure. In this case, philosophy as metaontology would change into the philosophy of mathematics, which does not create specifically philosophical concepts. This excess of representation means that philosophical concepts in the metastructure do not have a defined relation to mathematical axioms. For instance, the concept of the event conveys 'that-which-is-not-being-qua-being' and therefore, it cannot have a defined relation to the mathematical axioms that only cover ontology as a science of being-qua-being. This relation is an "un-relation" that arises as philosophy operates as a metastructure. Easton's theorem helps us to see the meaning of a metastructure regarding philosophy. If philosophy ceased to act as a metastructure, it would lose its position as metaontology. Consequently, philosophy could not deploy specifically philosophical concepts such as event, truth, subject, etc. The concepts with an "un-relation" to mathematics create philosophical elements in the form of a wandering excess, which is the real in the metastructure.

After Badiou established these concepts in the space of set theory, he came to realise that they opened a new philosophical field that could not be covered by set theory. These concepts provoked the problematic of how truths appear in worlds, with many theoretical consequences and resulting issues. This new

[21] Badiou, *Being and Event*, p. 98.

field of philosophical investigation could not be deduced from the space of set theory because concepts such as event, truth, and subject, which had opened this new field, have an un-relation to the space of set theory. In Badiou's words, "if the beginning for *Being and Event* is without philosophy, the consequences of this beginning are, really, within philosophy. In some sense, the movement of the book is from mathematics to something which has no signification from a mathematical point of view."[22] The philosophical concepts in *Being and Event* were an excess as seen from the position of set theory. This excess was "wandering" regarding the potentially infinite number of issues, concepts, and interpretations that "event", "truth", and "subject" can generate.

Mathematics and the dynamic dialectics of Badiou's metaontology

The second thesis: philosophical concepts (event, truth, subject) as an excess in the *metastructure open a new philosophical field that is not covered by the given mathematical condition (set theory). Consequently, Badiou composes a mathematical condition (category theory) that enables philosophy to elaborate new concepts (singularity, relation, world). And again, these concepts open another philosophical field with "the immanence of truths", "absoluteness", and "infinity", which call for the composition of a new mathematical condition (large cardinals). This move explains the dialectical dynamics of Badiou's ontology.*

From the application of Easton's theorem to Badiou's philosophy as a metastructure it follows that the relation between metaontology and ontology (mathematics) is an un-relation, i.e. a relation that can never be defined. Easton's theorem says that the state of a situation (a metastructure) is quantitatively larger than the situation. As stated above, philosophy as a metastructure generates a possibly infinite number of new issues, concepts, and interpretations, which shows that philosophy (metaontology) is quantitatively larger than its mathematical condition (ontology). Regarding Easton's theorem, it is impossible to determine the quantitative difference between these two instances. To wit, philosophy as a metastructure (metaontology) would always be quantitatively larger than its mathematical condition (ontology), even if we composed this scientific condition of philosophy from any elements of mathematics in any number.

---

22 Badiou, *Sometimes, We Are Eternal*, p. 52.

We saw that the "un-related" philosophical concepts in *Being and Event* are a wandering excess that opens a new philosophical field with potentially infinite consequences that cannot be covered by means of set theory. In other words, Badiou's philosophy as deployed in *Being and Event* contains "more" elements than set theory can provide. These excessive elements show lacunae in the given mathematical condition that was composed from the set theoretical elements, i.e. the "situation" on the second level in the model of conditioning. We can explain the dialectical dynamics of Badiou's ontology along these lines. The lacunae in the given mathematical condition of philosophy provoked the construction of a new one that enabled philosophy as a metastructure to develop philosophical possibilities which had emerged in *Being and Event*. Badiou composed the mathematical condition by adopting some elements of category theory. This composition conditioned the elaboration of philosophical concepts in *Logics of Worlds*, i.e. singularity, transcendental, object, relation, world, etc. This conditioning is the relation between mathematics and philosophy that can be described as an "un-relation" because philosophy again was a metastructure regarding its mathematical condition composed of elements from category theory (situation). These philosophical concepts were an excess from the point of view of category theory. They opened a new possibility of how to put forward other philosophical concepts such as infinity, absoluteness, and idea. It was necessary to prepare the mathematical space composed of fragments of the theory of large cardinals. This space conditioned the development of the concepts elaborated in *The Immanence of Truths*. Potentially, these concepts break new ground in other philosophical domains.

Hypothetically, philosophy is step by step going to turn to every field of mathematics that is available. The point is that we will have *a* lacuna within the mathematical condition even after philosophy composed it from elements of the last field of mathematics remaining. This happens because every section of mathematics is "smaller" than philosophy as a metastructure in which an excessive new philosophical field appears, and the same holds for the last field available. For instance, the concept of infinity in *The Immanence of Truths* calls for the application of infinity to various forms of politics and economics. Some types of politics and economics proved to be finite, while other types appear to be infinite. In this light, Badiou addresses Marxism by stating that Marxist economics draws on egalitarian principles and opposes the dominant liberal economy, which represents the oppression of infinity.[23] If we were to develop new philosophical concepts in this direction, we would need to compose the scientific condition involving some elements from acceptable "non-mathematical" sciences such as Marxist economics. These are the ones that primarily do not deal with mathematical subject matter (axioms, theorems, hypothesis, etc.), but they apply mathematic formalisation if need be.

I argue that, consistently with Badiou's understanding of philosophy as metaontology, a scientific condition of philosophy can be composed from elements stemming from non-mathematical sciences that embrace mathematic formalisation. These non-mathematical scientific conditions are meant for developing concepts generated by metaontology (*Being and Event, Logics of Worlds, The Immanence of Truths*), but, principally, they cannot be covered by the mathematical domain only. For instance, the development of political and economic notions that were established by an ontological concept of infinity requires the construction of a scientific condition with elements coming from Marxist economics. Badiou introduced some non-mathematical sciences that operate with mathematic formalisation. These are phonology in linguistics, the foundations of Marxist economics, a part of the anthropological theory of kinship, and a segment of psychoanalysis. These fields are supposed to be exempt from the ideology that largely dominates in the human sciences.[24] Due to their completely different subject matter, we can put aside phonology and the anthropological theory of kinship. What remains is "the foundation of Marxist economics" and "a segment of psychoanalysis" (i.e. the Lacanian one), which can be conceived as being consistent with Badiou's understanding of philosophy. In *The Immanence of Truths*, Badiou fully endorses *a* meaning of Marxist economics and explicitly includes a part of Marxism into his philosophy. Actually, we can see that a part of Marxist economics has formed a condition of Badiou's philosophy in all its development. Badiou only dismissed its other parts, such as "Marxist politics" tied to the state. Alberto Toscano showed that Badiou retained what he regarded as the core Marxist principles. This was "a minimal Marxism that conjoins the political hypothesis of non-domination with the rational identification of the sites of subversion, without thereby committing political practice to

---

23 Alain Badiou, *L'Immanence des vérités*, Fayard, Paris 2018, p. 81.

24 Badiou, "Afterword: Some Replies to a Demanding Friend", in Hallward (ed.), *Think Again: Alain Badiou and the Future of Philosophy*, p. 234.

an instrumental, revolutionary or programmatic framework."[25] This approach to Marxism of Badiou provides a telling example of a non-mathematical condition for the development of philosophy.

Lacanian psychoanalysis works in a similar way in Badiou's philosophy. Badiou embraced some of the key Lacanian notions and their definitions, for instance the real as "the impasse of formalisation."[26] He elaborated their new meaning within his philosophy, which is another example of how the ontological concepts of truth, infinity, absoluteness, etc., can instigate the development of notions that are related to a non-mathematical domain. So, we have Badiou's concept of the unconscious, i.e. "an inner transcendence of consciousness," which is out of its control regarding the fact that this transcendence is the infinity of a truth procedure.[27] Badiou speaks about his "vexed, or vexatious, fidelity" to Lacan, which is imprinted in *Being and Event* and *Logics of Worlds*.[28] For Badiou, Lacanian psychoanalysis is the crucial form of anti-philosophy that "aims at an act that it believes is an unconditioned break, a transformation without determination, a groundless leap into the new."[29] Badiou adopted some elements of Lacanian psychoanalysis in order to compose a condition of philosophy. As Badiou put it, "a contemporary philosopher, for me, is indeed someone who has the unfaltering courage to work through (*traverser sans faiblir*; literally 'to traverse without weakening') Lacan's anti-philosophy."[30] Here, we have another example of Badiou's composition of a non-mathematical condition of philosophy. Marxism, as much as Lacanian psychoanalysis, represents the non-mathematical sciences that are consistent with Badiou's understanding of philosophy.

25 Alberto Toscano, "Marxism Expatriated: Alain Badiou's Turn", in J. Bidet and S. Kouvelakis (eds.), *Critical Companion to Contemporary Marxism*, Brill, Leiden and Boston 2008, p. 533.

26 This formulation I quoted above appeared as far back as in *Theory of the Subject*. Alain Badiou, *Theory of Subject*, trans. B. Bosteels, Continuum, London and New York 2009, p. 23. Here, Badiou declared his commitment to Lacanian psychoanalysis.

27 Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 188.

28 Alain Badiou, *Lacan. Anti-philosophy 3*, trans. K. Reinhardt and S. Spitzer, Columbia University Press, New York 2018, p. xl.

29 *Ibid*., p. xxiv.

30 *Ibid*. p. xxv.

Conclusion: mathematics is ontology only if philosophy is metaontology

We determined that Badiou established the relation between philosophy and mathematics that can be understood as the one between a metastructure and a situation. This finding enables us to nuance the statement that mathematics is ontology. René Guitart and other mathematicians understand this statement in such a way that mathematics forms a part of philosophy – sometimes a logical part, sometimes an ontological part. Badiou considers this interpretation false, as he stated that mathematics is different from philosophy.[31] Mathematics, however, constitutes a condition of philosophy that is a sort of relation. We can interpret this relation as the one between a metastructure and a situation, which shows that mathematics appears as a *composed* mathematical condition (situation). Metaontological concepts are deployed in philosophy as a metastructure. In keeping with Easton's theorem, these concepts are the excess that emerges in the relation between a metastructure and a situation. They are different from mathematics precisely as a consequence of this type of relation. They are conditioned by mathematics and simultaneously are different from it because they represent an excess from the mathematical point of view.

One of the most stunning features of mathematics is that it supplies a theorem indicating the ontological limits of mathematics itself. Poe was not quite right in writing that mathematics credits its axioms and theorems with "an absolutely general applicability" and presents them as a general truth of the world. Mathematics provides us with a theorem that limits its general applicability.

Mathematics viewed as a multiple universe of all given axioms, theorems, techniques, interpretations, and systems (set theory, category theory, etc.) is not ontology. It is mathematics as the inconsistent multiplicity on the third level in the model of conditioning. Mathematics becomes ontology only if philosophy composes its own scientific condition by using various fragments from mathematics. It is mathematics as the consistent multiplicity on the second level in our model. So, mathematics is ontology provided that philosophy as metaontology has changed mathematics into ontology. To wit, it composed its mathematical condition. Philosophy, thus, manifests that mathematics as a multiple universe

31 Badiou, *Sometimes, We Are Eternal*, p. 52.

is not ontology. Philosophy as metaontology shows the ontological limits of mathematics.

References

Badiou, Alain, "Afterwords: Some Replies to a Demanding Friend", in *Think Again: Alain Badiou and the Future of Philosophy*, ed. Peter Hallward, Continuum, London and New York 2004

— *Lacan. Anti-philosophy 3*, trans. K. Reinhard and S. Spitzer, Columbia University Press, New York 2018

— *Being and Event*, trans. Oliver Feltham, Continuum Books, London and New York 2005

— *Briefing on Existence. A Short Treatise on Transitory Ontology*, State University of New York Press, New York 2006

— *L'Immanence des vérités*, Fayard, Paris 2018

— *Manifesto for Philosophy*, trans. N. Madarasz, SUNY Press, Albany 1999

— *Mathematics of the Transcendental*, trans. A. J. Bartlett and A. Ling, Bloomsbury Publishing, London and New York 2014

— *Theory of Subject*, trans. B. Bosteels, Continuum, London and New York 2009

Feltham, Oliver, "Translator´s Preface", in *Being and Event*

Fraser Zachary, Luke, "New Directions", in *Alain Badiou. Key Concepts,* ed. A. J. Bartlett, J. Clemens, Acumen, Durham 2010

Madarasz, Norman, "On Alain Badiou´s Treatment of Category Theory in View of a Transitory Ontology", in *Alain Badiou. Philosophy and Its Conditions*, ed. G. Riera, State University of New York Press, Albany 2005

Toscano, Alberto, "Marxism Expatriated: Alain Badiou´s Turn", in *Critical Companion to Contemporary Marxism*, ed. J. Bidet and S. Kouvelakis, Brill, Leiden and Boston 2008

Žižek, Slavoj, "From Purification to Subtraction: Badiou and the Real", in *Think Again: Alain Badiou and the Future of Philosophy*, ed. Peter Hallward, Continuum, London and New York 2004

Filozofski vestnik | Volume XLI | Number 2 | 2020 | 119–142 | doi: 10.3986/fv.41.2.06

Roland Bolz*

Mathematics is Ontology? A Critique of Badiou's Ontological Framing of Set Theory

The subject of this article is Alain Badiou's well-known assertion that "mathematics *is* ontology" (henceforth: $M = O$), a phrase that originates in the opening chapters of *Being and Event,* and which has been an essential orientational maxim for followers of Badiou ever since.[1] In this article, I pose two questions: a) How important is the identification of mathematics and ontology for Badiou's larger philosophical project in *Being and Event*? And: b) Does Badiou give convincing reasons for accepting it? My answers, upon careful deliberation, are a) crucial, and b) no. The key to my counterargument is the idea that set-theoretic multiples (collections) should not be conflated with the types of 'multiples' (i.e. parts and wholes, atoms and totalities) that are traditionally within the purview of ontology. In what follows, I aim to complicate Badiou's idea that the ontological theme should be moved to the realm of set theory.[2]

To understand the importance of $M = O$ for an otherwise vast philosophical text, we must recall the design of *Being and Event*. Its basic chapter structure follows that of a typical introduction to axiomatic set theory (supplemented by extensive philosophical commentary). The scope of such an introduction to set theory includes the following subjects:

- a motivation and explanation of the axioms of Zermelo-Fraenkel set theory (ZFC) vis-à-vis the naïve concept of set/collection;

1 Alain Badiou, *Being and Event*, trans. Oliver Feltham, Continuum Books, London and New York 2005, pp. 4, 15, 19. The role of "mathematics is ontology" for the second and third volume of the *Being and Event* trilogy is a more complex matter. It is clear that the later volumes build on the first. In this paper, I only consider the argument as it is presented in the first volume, the original *Being and Event*.

2 However, I do not claim that set theory cannot be used as a conceptual tool in the investigation of ontological matters. In fact, it is widely presupposed as a background theory for ontological investigations that use formal logical theories as languages which 'capture' ontological reasoning and commitments. However, I take issue with Badiou's much stronger claim that set theory is the science of being *qua* being.

* Humboldt University of Berlin

- the development of several mathematical concepts in the language of sets – functions, power sets, ordinal numbers, cardinal numbers, infinite sets, etc.;
- a presentation of the independence of the continuum hypothesis from the axioms of ZFC (a joint proof of Kurt Gödel and Paul Cohen).

However, the philosophical prestige of *Being and Event* does not come from its mathematical content. There are no new mathematical theorems in the book. Its status as an important work of philosophy comes from the fact that Badiou purports to extract a series of non-trivial *ontological* insights from the edifice of the mathematical theory of sets. Here, ontology is a field associated with philosophers such as Plato, Spinoza, Hegel, Heidegger, and Deleuze. Badiou often invokes set-theoretic results to criticise the views of these thinkers. The intensity with which Badiou reads these two traditions together is more or less unique to him.[3] As a sceptical reader, I have significant doubts that they communicate to this degree without lapsing into a somewhat loose exercise in analogy-making.

It is critical to see that, *prima facie*, the mathematical theory of sets and philosophical ontology are two only minimally overlapping fields of inquiry, organised around quite different questions. I will return to this matter below. The formula "mathematics *is* ontology" is what enables Badiou's ontological hermeneutics of set-theoretic results.[4] If the two fields have nothing to do with each other, it will be futile to try to critique some ontological views of, for example, Spinoza using set theory. But if he can convince us of $M = O$, then set-theoretic results can indeed be read vis-à-vis the ontological tradition, although, needless to say, different interpretations of the mathematical theorems may ensue. If the identification (or conflation) of the two disciplines is ill-founded, then his exegeses of set-theoretic findings must remain at the level of creative metaphor

3 Perhaps the way Riemannian geometry informs the work of Deleuze and Guattari is somewhat analogous.

4 Although Badiou's project is not nominally associated with philosophical hermeneutics, I submit that in *Being and Event* he is primarily concerned with a philosophical *interpretation* of set-theoretic results. (He speaks at length about his "philosophical interpretations" of set theory in the introduction: *ibid*., p. 19 ff.) This leads me to describe his philosophical practice as importantly hermeneutic (interpretive) in nature. By describing his project as an ontological hermeneutics of set theory, I also wish to foreground that his interpretive strategy is highly idiosyncratic in its preoccupation with ontology. It is also exactly this hermeneutic strategy that I wish to contest here.

and analogy.[5] This would not undermine his work entirely, but it would change its entire argumentative framing (and the strategies necessary in our reception of his work).

Apart from the exposition of set-theoretic concepts and theorems, *Being and Event* contains many pages of philosophical commentary. One can usefully distinguish between two main functions of these passages. The first is to convince the reader of the identification of set theory with ontology (the *argument* for $M = O$). The second is to develop an ontological interpretation of the set-theoretic results (an ontological *reading* of set theory). The latter, more voluminous task, depends on the successful completion of the former. This serves to remind us what is at stake in evaluating Badiou's identification of mathematics and ontology.

To see how resolute Badiou is about $M = O$, we turn to a telling passage from *Being and Event*. Here, Badiou goes beyond the set theorist Paul Cohen's account of his discovery and identifies the mathematical concept of an indiscernible part of a multiple (Cohen calls this a generic extension) with the ontological (or philosophical) concept of a truth.[6] Let us see how he frames the relationship between the mathematical results and the ontological discussion:

> It is mathematics which must judge whether it makes any sense to speak of an indiscernible part of any multiple. [...] it can decide whether it is compatible with ontology that there be truths. Decided at the level of fact by the entire history of humankind – because *there are* truths – the question of the being of truth has only been resolved at a *de jure* level quite recently (in 1963, Cohen's discovery); without, moreover, the mathematicians – absorbed as they are by the forgetting

5 Indeed, I take Badiou's mathematical passages as extended analogies that help the reader to understand his philosophical points. That said, I also take metaphors and analogies to be indispensable to philosophy (and to human thought more generally) and certainly do not wish to suggest that the use of metaphors discredits a thinker. However, Badiou himself seems to understand his own method as quite distant from analogy. I consider this a misrepresentation of the philosophical work that he does and especially of the justificatory structures that underly his main philosophical claims. This makes it hard to engage with him as a theoretical thinker. I am at present working on a book that is concerned with the role of analogy and metaphor in philosophical conceptual labour.

6 Paul Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Dover Publications, Mineola 2008. For Cohen's own account of his discovery, see Paul Cohen, "The Discovery of Forcing", *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 32 (4/2002), pp. 1071–1100.

> of the destiny of their discipline due to the technical necessity of its deployment – knowing how to name what was happening there (a point where the philosophical help I was speaking of comes into play).[7]

The relationship between mathematics and philosophy, as Badiou sees it, is the following: mathematicians come up with formal innovations that they do not fully interpret. The philosopher is then able to give the right ontological framing to the matter – "the philosophical help." For Badiou, Cohen's proof from 1963 resolves a more profound ontological question, without Cohen being aware of it. This has been Badiou's line ever since *Being and Event*, although a similar motif already runs through *Theory of the Subject*.[8] What are the philosophical underpinnings for this interpretive practice? Is his conflation of set theory with ontology justified?

Favourable commentators have accepted Badiou's identification of mathematics and ontology, often without even recognising its *prima facie* implausibility.[9] One might explain this by noting that in contemporary philosophy 'ontology' describes a whole array of only loosely related approaches and questions.[10] It is not my goal to propose an alternative vision of ontology here, only to cast doubt on Badiou's identification of mathematics (set theory) with ontology.

In comparison with his commentators, Badiou seems quite aware of the implausibility of his identification of ontology and mathematics. He fully accepts that he must deliver a "proof that mathematics is ontology."[11] But although Badiou claims to give such a proof in *Being and Event*, it is not very clear which

7 Badiou, *Being and Event*, p. 341.

8 Alain Badiou, *Theory of the Subject*, trans. Bruno Bosteels, Continuum Books, London and New York 2009, pp. 148–157.

9 See, for example, Steven Corcoran (ed.), *The Badiou Dictionary*, Edinburgh University Press, Edinburgh 2015; A.J. Bartlett and Justin Clemens (eds.), *Alain Badiou: Key Concepts*, Acumen Publishing Limited, Durham 2010; Burhanuddin Baki, *Badiou's Being and Event and the Mathematics of Set Theory*, Bloomsbury Academic, London and New York 2015. Since *Being and Event* is built entirely on the proposition that mathematics and ontology can be identified, any interaction with Badiou's (systematic and philosophical) work almost presupposes acceptance of it.

10 The field is hard to circumscribe, 'ontology' seems to mean something different for most authors, some believe that it does not constitute an actual field of inquiry, etc.

11 Badiou, *Being and Event*, p. 19.

parts of the book pursue this goal. For instance, there is no passage in which he indicates to the reader that he considers the proof complete (presumably it is concluded by the end of Part I). Neither does he pause to state any kind of adequacy criteria therefor – what would make for a successful proof of his equation? Against the mathematical background of much of the material discussed in *Being and Event*, Badiou's notion of a philosophical proof (for $M = O$) is remarkably implicit. So, if one wishes to evaluate the central philosophical claims of *Being and Event* charitably (especially concerning its mathematical content), one cannot get around formulating adequacy criteria for the identification of mathematics and ontology oneself. What kind of argument would settle this matter to our satisfaction?

Theoretical discourses with different statuses flank both sides of the identity $M = O$. Badiou's reading of the history of philosophy is that the ontological tradition failed to fulfil its theoretical *desiderata*. However, mathematics (here in the guise of modern set theory) satisfies these *desiderata* without knowing it.[12] So the identification relies on a) establishing that ontology in all its historical variance ultimately circles around a handful of central theoretical themes and challenges, and on b) showing that ZFC manages to address (resolve?) these themes and puzzles in a more apt way than the classical philosophical programmes did. This description of what Badiou has to show is still sketchy, but it is fair to the spirit of *Being and Event*.[13] To summarise: to be successful, an argument in favour of $M = O$ would have to achieve three things:

a) describe the themes and *desiderata* of ontology anew;
b) describe the theme and *achievements* of set theory anew;
c) check that these *desiderata* and *achievements* match.

I believe that Badiou fails to make a convincing case for $M = O$ on account of his implausible descriptions of both ontology and set theory. The impression that these two discourses align is a consequence of his tendentious characterisation of both.

12 *Ibid.*, pp. 9–11.
13 See, for example, the meditation on Spinoza, *ibid.*, pp. 112–21.

Let us zoom in on a) and b). Badiou's argument is that ontology (*qua* collective philosophical endeavour) has arrived at a point where ontology recognises the need for a theory of *the multiple* (a term that I aim to problematise in what follows), but has failed to supply anything theoretically respectable.[14] Set theorists, on the other hand, have managed, he alleges, to create precisely such a theory – a theory of the *pure multiple* – without fully realising the ontological implications of their creation. As critical readers, all we have to do is check that the word "multiple" means the same thing on both sides of the equation $M = O$, since Badiou's principal contention is that despite the tunnel vision of mathematicians, their work speaks to the ontological theme directly.[15] I object that there is too much semantic slippage between the two uses of 'multiple' (first referring to the ontological multiple, then referring to the sets from set theory) to accept Badiou's identification. This issue wreaks havoc on Badiou's philosophical project in *Being and Event* (but not on set theory as an independent mathematical discipline, of course). In what follows, I will go back and forth between ontology and mathematics in order to spell out how the signifier "multiple" takes on a quite different meaning on both sides.

There are two types of problems on the side of ontology. The first is that the ontological word 'multiple' indeed means something different than in mathematics (the *mismatch problem*). The second problem is that Badiou's call to put a figure of the multiple (as opposed to a figure of the one) at the centre of ontology appears *ad hoc*, despite Badiou's efforts to imbue the idea with a mood of epochal necessity (the *motivation problem*).[16]

14 It is not entirely clear who is taken to hold this view. The mood is one of diagnosing epochal philosophical tendencies.

15 In fact, Badiou holds the view that set theory is so fruitful ontologically that all first-order ontological theorising is done by set theorists in the first place. Philosophy's function is second-order commentary. *Ibid.*, pp. 1–22.

16 An alternative explanation is of course that Badiou *started* with some analogical interpretations of set-theoretic results, only to find a fitting philosophical rubric – ontology – and afterwards to package them so as to appear more attractive to the philosophical readership. This view is corroborated by the fact that *Theory of the Subject* (a book written before *Being and Event*) already contains an interpretation of Gödel's and Cohen's results. However, in the earlier book there is no mention of a *systematic* ontological role for set theory as a new theory of the pure multiple. Here, Badiou appears content to present his approach to mathematical thought as being more hermeneutical in character. Badiou, *Theory of the Subject*, p. 148.

To evaluate Badiou's proof, we have to look at his descriptions of the ontological problematic against the backdrop of what we know about set theory and *vice versa*. In other words, we should study his characterisations of ontological impasses and then ask ourselves whether mathematical set theory offers a sound solution.

The shift that Badiou wants to effect is the following. Without $M = O$, the relevance of Gödel's and Cohen's work on the independence of the continuum hypothesis is completely intra-mathematical (the local relevance of Gödel-Cohen). If set theory is somehow concerned with "being *qua* being," a term coined by Aristotle, on the other hand, this will make their results more universally relevant – given some philosophical guidance (the global 'philosophical' relevance of Gödel-Cohen). This is the work that the identification of mathematics (set theory) and ontology does for Badiou's philosophical project in *Being and Event*.[17]

It is quite natural to question the claim of the global relevance of set theory to themes from classical philosophical ontology. Modern set theory arose as a response to the increasing use of an intuitive (naïve) concept of collection/set in mathematics (sets of objects, sets of numbers, sets of functions, extensions of concepts, etc.). This led mathematicians to investigate infinite sets and the discovery of a framework for distinguishing different sizes of infinite sets (Cantor). Of course, classical ontological thinkers had also concerned themselves with infinity, insofar as they tried to elucidate the foundational concepts of mathematics (e.g. Hegel's *Science of Logic*, the section on *Quantity*).[18] But at the foreground

17 See Badiou's remark that Cohen's results should become an "intellectual *topos* at least as famous as Godel's [sic] famous theorems [...]. They resonate well beyond their technical validity." Badiou, *Being and Event*, p. 16.

18 Georg Wilhelm Friedrich Hegel, *The Science of Logic*, trans. George di Giovanni, Cambridge University Press, Cambridge 2010. With regard to infinity, one should probably separate two aspects. The first concerns the elucidation of different *concepts* of infinity. In this regard, Cantor and the set theorists are of course important for showing that a certain conceptualisation of infinity (in the context of sets/collections) leads us to accept a typology of different types or sizes of infinity – a typology that is of considerable mathematical complexity and utility. But this conceptual innovation should not be conflated with metaphysical or ontological questions that are concerned with the finite or infinite nature of the universe or of any fragment of reality, let alone of being *qua* being. This second aspect *presupposes* some concept of infinity and then asks regarding certain entities whether they are finite or infinite. The cultivation of concepts of infinity and the investigation of the 'size' of certain ontologically relevant entities are two separate but related intellectual

of classical ontology is the elucidation of the concepts of being, entity, object, nature, substance, quality, necessity and possibility, space and time, concept, matter, subject, agency, etc. – concepts that seem presupposed in most, if not all, of our conceptual dealings and behaviours, regardless of the precise matter at hand.[19] Insofar as mathematics sometimes develops formal counterparts of these concepts (classically: space and quantity), it offers tools for answering questions posed by philosophers. However, it is of utmost importance to differentiate Badiou's approach from the more typical mingling of philosophy and mathematics. What makes his approach unique is that he approaches *the concept of being itself* via the notion of multiple, which he then identifies with the mathematical notion of set.

Returning to set theory, one should keep in mind that the naïve concept of set is grounded in our basic experience with collections of objects that are not collections themselves. For example, we might consider *the collection of chairs in room 101* – a collection that contains basic objects of our everyday experience. It is only after a second step that mathematicians after Cantor started to focus on collections of abstract objects (numbers) and on collections of collections (subsets of the set of natural numbers), which led to the development of a formal set theory that does not involve any non-set objects. The most well-known example of such a theory is ZFC. In any case, it is not at all obvious how the concept of set/collection (in whatever stage of formalisation) can be used to elucidate any classical ontological category not directly concerned with quantity or extension, such as the concepts of object, being, or substance. We can use set-theoretic tools to *model* metaphysical categories. Still, we should not identify the domain of discourse of ZFC with the realm of being *qua* being (without an intricate argument).

In contrast, the widely held (and, in my opinion, correct) view is that formal set theories are axiomatisations of the naïve concept of collection – nothing more

enterprises. It is certainly possible to wholly affirm the conceptual innovations of the set theorists without also having to submit to the much more contentious view that being *qua* being (or any other metaphysical or physical category!) is infinite.

19 The preference for the label 'ontology' over the label 'metaphysics' here merely shows the prioritisation of the concept of *being* in the wider investigation. Also, needless to say, classical ontology also often goes hand in hand with theological themes (onto-theology), something which I have not emphasised in my discussion here.

and nothing less (the *common sense scope* of set theory).[20] Whenever we are concerned with talk of collections, extension, and cardinality, set theory can become relevant. But it is certainly not *prima facie* evident that the very concept of collection is of *foundational* significance to classical ontology. But this is precisely Badiou's central claim in *Being and Event* when he declares that mathematics *is* ontology. How does his argument work?

It seems to me that, in Badiou's view, the central notion of ontology is the notion of *any being whatsoever*. (Other notions that could play a role are those of object and entity, although Badiou avoids these terms. He often uses the Aristotelian phrase "being *qua* being".) I take it that the task of ontology is to characterise being *qua* being adequately. Now, one can undoubtedly pause here to ask whether this even constitutes a sufficiently clearly circumscribed theoretical field – a certain scepticism about this project is widespread even among philosophers, myself included. But Badiou is not agnostic on these matters; he brings a surprising and strong *desideratum* into play at this level: being *qua* being must not be *one* (this is captured by the slogan "the one *is not*").[21] There are two conceptual ingredients to this *desideratum*. First of all, the concept of *parthood* (pure being must have several *parts*, components, constituents, etc.). Second, the ban on unity (pure being must have *several* parts, pure being is not to be approached through the theme of unity). But as I will show, we should be careful to not conflate different types of part-whole relations here.

20 The naïve concept of collection has several origins. On the one hand, instead of considering the objects on the table individually, we can reify this into the set of objects on the table. This spontaneous talk of collections of objects (however concrete or abstract) is one source of intuition regarding the concept of collections. Another, related, background aspect is the notion of an extension of a concept (Frege). The extension of the concept 'dog' is not a spatio-temporal object but a collection of dogs. But neither of these are in an obvious way related to the ontological category of being *qua* being. Rather, they are related to everyday talk of quantities and extensions. Presumably, our competence with the notion of set/collection builds on our familiarity with the embodied practice of putting several objects inside of a container, allowing us to treat them as one object whilst also retaining the distinctness of the objects inside of the container. The mathematical concept of set is an abstraction of this embodied concept. See George Lakoff and Rafael E. Núñez, *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York 2000, pp. 140–54.

21 Badiou, *Being and Event*, p. 23.

My challenge to Badiou is that this *desideratum* is poorly motivated philosophically (*arbitrariness*) and that it does not get us to *set theory* on the side of mathematics (*poor fit*). I will work backward here and start by explaining why "the one is not" may seem to pave the way to a set-theoretic ontology, only to problematise this trajectory afterward. In the second step, I will question whether there is an intrinsic ontological motivation for "barring oneness from being" at all.

According to Badiou, being must be devoid of all oneness. The practical consequence of this claim is that if we can find a theory describing (formalising) entities that are multiple but not one, we may proceed to treat it as our new ontology, and hence, as a theory with broad philosophical consequences. Here is a key fact about ZFC which contributes to the impression that it is a "theory of the pure multiple": (*ZFC has no 'atoms' or urelements*).[22] *The entities of ZFC are pure sets. That is, there are only sets of sets, but no primitive entities that are not sets.*[23] *Hence, the entities of ZFC are 'multiples' composed of further 'multiples'. They do not decompose to an atomic base-level of non-set objects.*

Let us summarise. On the side of ontology, Badiou identified a demand for a theory of being without oneness; on the side of mathematics, he came across a formal logical theory of multiples that appear not to reduce to atoms (multiples without 'the one'). It seems like a perfect fit. But there are two open questions:

1) it is unclear what exactly motivates the ontological desire for a multiple without the one;

[22] Terminologically, 'urelements' is really more accurate here than 'atoms'. Even in set theories that do admit urelements, the relation between sets and urelements is not the one between a spatio-temporal object and its smallest constituent parts. Any talk of atoms in the context of set theory is metaphorical, which is why the more technical terminology of 'urelements' is preferable.

[23] Badiou seems to make much of the fact that formal set theories (ZFC and its extensions) talk of sets only, without needing to refer to non-set objects. If we take a theory such as ZFC in isolation, it seems to commit us only to a universe of sets, and nothing else. However, this is simply a side effect of the fact that in formal logical theories we consider certain conceptual systems in isolation. Another formal theory, such as Peano Arithmetic (PA), considers the system of natural numbers in isolation. But neither ZFC nor PA should lead us to the idea that "there are only numbers" or that "there are only multiples." Badiou, *Being and Event*, p. 61.

2) we also have not sufficiently explored whether or not sets are the type of multiples that can play the role of Badiou's ontological 'multiple without the one'. What kind of multiples are sets exactly?

It is undoubtedly true that the objects of ZFC, developed out of the need for a more rigorous concept of collection than the quotidian (naïve) one, can be characterised as 'multiples'. The word 'multiple' itself suggests little more than that the object in question is composed *of many*. Indeed, most sets have *many* elements. If they have exactly one element, that element is a set itself, so one level deeper it decomposes into many elements. Some synonyms for 'set' are 'aggregate', 'collection', '*Menge*', and '*ensemble*'. These all emphasise the aspect of plurality and de-emphasise the aspect of unity, that which holds the elements together. This is certainly an important part of the set concept, since nothing much is required in order to keep the elements together to yield a legitimate set.[24] This stands in stark contrast to the type of unity that holds together the parts of a spatio-temporal object, for example. But is the set-theoretic notion of a collection the kind of multiple that is adequate for being *qua* being? Why would it be? Let us proceed by comparing and contrasting what is known about set theory with Badiou's description of the pure multiple as an ontological figure.

One important aspect of set theory, which seems quite alien to ontology as a theory of being *qua* being, is the following: sets (or 'collections') have a distinctly *combinatorial* flavour. In short, the idea is that any *combination* of elements whatsoever that does not lead to paradoxical situations should yield a legitimate set. A simple example helps to demonstrate the combinatorial wealth of set theory. The set $X \coloneqq \{5, \{1,2,5\}, \{\{5\}\}\}$ has three elements: 5, $\{1,2,5\}$, and $\{\{5\}\}$. Here, the number 5 occurs three times, on several levels: once as an element of X, once as an element of an element of X, and once as an element of an element of an element of X. Since these are all viably different combinations, X is a legitimate set. Also, notice that 2 is not an element of X, even though it is an element of an element of X. It is no exaggeration to claim that set theory was created to encompass these types of embedded ('nested') membership systems. But this does not seem to be a feature of being *qua* being on any available interpretation of the term. It seems to be a unique and defining feature of sets, which differentiates them from pretty much any other type of entity.

---

24 Except for the care needed to prevent paradoxical sets.

Another formalism needs to be introduced here: *mereology*. Whereas modern logicians and mathematicians developed set theory to axiomatise the notion of collection, they also developed the theory known as mereology to axiomatise the part-whole relationship. Oddly, mereology is never mentioned by Badiou. Introducing mereology prepares the second step of my argument, in which I aim to show that Badiou's reading of classical ontological arguments suggests a mereological, not a set-theoretic interpretation. My point will be that in his reading of philosophical authors such as Lucretius and Plato, Badiou problematically conflates these quite distinct concepts into a single concept of 'multiple', which seems to be a mixture of the two. To a large degree, the identification of ontology with set theory can only arise due to the conflation of the collection concept (set theory) with the part-whole relation (mereology).

We can familiarise ourselves with the mereological notion of parthood by taking a Volkswagen Golf and its parts as an example.[25] The steering wheel is a *part* of the car. The car is a whole comprised of such parts (a 'multiple'?). The relationship between a mereological whole and its parts should be kept distinct from the relation between a set and its elements. To see that they are different relations, consider the mereological example of the driver's seat and its headrest. The headrest is *part* of the seat, and the seat is *part* of the car. By virtue of this, the headrest is a *part* of the car as well. This parthood relation is *transitive*.[26] Axiomatisations of the mereological parthood relation usually include transitivity either as an axiom or as a direct consequence of other axioms. Comparing this to the set-theoretic axiomatisation of membership (∈), we note that the elementhood relation is not transitive. To see an example of this, consider a flutist named Allen, who is a member of a marching band (viewed as a collection of musicians). The marching band itself is a member of the set of active musical groups in France. But Allen himself is not a member of the set of musical groups. Set-theoretic elementhood is *intransitive*. Sets and mereological wholes are different types of multiples.[27] There are several other essential dissimilarities between the two notions, which is why they yield different axiomatisations.

[25] For a more extensive introduction, see Achille Varzi, "Mereology", Edward N. Zalta (ed.), *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2016, https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/mereology/.

[26] A relation R is *transitive* if: $\forall a \forall b \forall c (Rab \land Rbc \rightarrow Rac)$.

[27] That said, a subset of a set is like a mereological part of a set. (Sets have *parts* analogous to how mereological wholes have parts.) However, this should not allow us to infer the

To summarise: mereological axioms, *not set-theoretic ones*, formalise the material parthood relation. Soon, we will see that the thinkers that Badiou discusses (aiming to establish the necessity of a set-theoretic ontology) use what look like mereological concepts. Hence, their propositions regarding such matters are best formalised using mereology.

It should be pointed out that as a family of formal theories, mereology does not come with such surprising results as the independence of the continuum hypothesis. Unlike set theory, mereology is not replete with paradoxical niceties that might invite philosophical interpretation. My suggestion here is not to replace Badiou's set-theoretic ontology with a mereological one with similar ambitions (and then to offer philosophical interpretations of meta-theorems about the mereological theories). Instead, my point is simply that the parthood vocabulary used in certain philosophical discussions (and as we will see, in Badiou's treatment of ancient sources such as Lucretius and Plato) is best formalised using mereological theories.[28] Set theories are simply not what is called for when formalising these ideas since they do not concern the extension of sets, but the parthood structure of mereological objects. As we will see, Badiou seems unaware of this.

Now that we have introduced the distinction between *collection-multiples* and *mereology-multiples*, we can return to Badiou's claim that a theory of the pure multiple is needed in contemporary ontology. We must now ask which flavour of formal theory fulfils his ontological *desideratum*. As stated earlier, Badiou's ontological demand is that being *qua* being is a multiple without unity. In other words, being *qua* being ought to be some sort of multiple whose parts are also

inverse statement: that all parthood relations reduce to set theory. This is clearly not the case even at an intuitive level, since we can employ the mereological vocabulary of parts and wholes without treating our objects as collections. For example, nothing obliges me to treat my car as a set just because I want to talk about its parts. I might be able to name many mereological parts of the car. My description may exhaust our knowledge of the car, including its subatomic particles. Set-theoretic elements are not needed on any level. Similarly, I might use a list to describe the components of the car. But this does not commit me to the view that the car itself is list-structured. There is a difference between what is cognitively salient and what is ontologically real.

28 There is considerable literature that applies modern mereological thought to reconstruct ancient doctrines. One example is: Verity Harte, *Plato on Parts and Wholes: The Metaphysics of Structure*, Clarendon Press, Oxford 2002.

multiple. We have already seen why Badiou believes that this description fits the set-theoretic framework. However, let us study some of the passages in which he describes what conceptual innovations are needed in ontology, passages where he engages in a reading of classical ontological texts. We will see that a mereological concept of part-whole is more suited.

On several occasions Badiou presents his ontology of the pure multiple as a modern realisation of the ontological programmes of ancient thinkers such as Parmenides, Plato, and Lucretius. In a companion essay to *Being and Event*, entitled *The Question of Being Today*, Badiou quotes the following lines from Lucretius' *On the Nature of Things:*

> Such is the nature of the place, of the gigantic space:
> Were it to slide, forever drawn away by time,
> Lightning would never see distance reduced
> The whole enormous reservoir of things is open
> In all directions.[29]

He describes Lucretius as "the one who directly confronts thought to subtraction from the One, which is none other than inconsistent infinity, that is, what nothing can collect."[30] This requires some critical commentary. First of all, let me repeat that Badiou's goal in this passage is to establish that ontology requires a theory of the multiple without oneness (i.e. set theory). Presumably, he cites Lucretius as an early adherent of (a pre-modern anticipation of) such a doctrine. We must ask two questions here: a) What *kind of multiple* is Lucretius describing? b) What role does the *subtraction of the one* play for Lucretius?

Turning to the first question: it is quite clear, despite the brevity of the passage, that Lucretius is describing the nature of a *spatial* whole ("the whole enormous reservoir of things") – something like the universe or the cosmos. His main claim here seems to be that it is infinite in size ("open in all directions"). However, such a spatial structure should not be mistaken for a set! *A spatial whole*

---

29 This is a translation of Lucretius, *De Rerum Natura*, 1.1002-8. Cited in Alain Badiou, "The Question of Being Today", in *Briefings on Existence: A Short Treatise on Transitory Ontology*, trans. Norman Madarasz, SUNY Press, New York 2006, p. 35. Madarasz bases his translation on "the French version used by Badiou." Footnote 6, p. 174.

30 *Ibid.*

has (mereological) parts, not set elements. So, if one were to capture Lucretius' theorising up to this point in some kind of formal logical system, it would be a mereological (or mereo-topological) theory, not a set-theoretic one. Set-theoretic vocabulary may of course come in when we need to discuss how many parts (extension!) a spatial whole has. But in that function it serves to formulate quantitative (or extensional) statements about objects which are themselves not sets, but spatial wholes. So this would lead us away from Badiou's idea that set theory speaks directly to the ontological category of being *qua* being.

With regard to the second question, concerning the subtraction of the one, we have seen that Lucretius claims that there is no outside border of the universe, that it is open in all directions. This is akin to saying that the universe is not a finite ('closed') mereological whole (or unity). Paraphrasing, one could claim that the universe is not 'one' in the sense that a finite object is one (if we identify unity with boundedness). So, on this route we may indeed come to the conclusion that Lucretius "confronts thought to subtraction from the One," as Badiou writes, although it remains a tendentious formulation. Most importantly, Lucretius' description is indicative of a mereological vocabulary (parts, wholes, boundaries), not a set-theoretic one. He considers the universe from the perspective of its mereological structure. It is not clear how to paraphrase Lucretius' specific view in the language of sets, since it is about a spatial whole, not a set. Instead, we should probably read him as claiming that the universe is unlike any cognitively more familiar region of space, insofar as it is unbounded.[31] His claim is primarily preoccupied with the existence of outer boundaries, and not with questions of extension or numerosity. Although this is certainly a revolutionary position by the standards of Lucretius' contemporaries, it remains opaque how he can be cited in favour of a connection between being qua being and set theory.

Here, I would like to make a final remark as regards understanding Lucretius from a contemporary perspective. As stated, his main concern in the cited passage seems to have been the boundlessness of the physical universe. Spatial

31 This is not to say that mereological or mereo-topological statements cannot be modelled in a set-theoretic context. The point is that the specific "subtraction of the one" that Badiou finds in Lucretius concerns a very specific claim about the boundedness of the universe, which simply does not contribute anything to the much more outlandish claim that the ZFC axioms codify something about being *qua* being.

boundlessness is a variation on the theme of infinity, but not quite the same as the extensional infinity of sets. Since the idea of actually infinite extensions was unknown to the Greeks, we cannot expect Lucretius to have also explored the correlative idea that an unbounded universe (spatial infinite) may have infinitely many (extensional infinite) parts. However, from a modern point of view, this question comes naturally. *How many* parts does this unbounded universe have? This type of question mixes mereological and set-theoretic vocabulary. We are now considering the cardinality of a set of parts of a material whole. This is a totally natural situation, which motivates the presence of set-theoretic vocabulary. But notice that this is a set of non-set entities (the parts of space). So, it does not suggest that being qua being is set-theoretically legible. Rather, it merely suggests that when considering questions of cardinality (and combinatorics), set theory is a natural conceptual tool.

Very similar criticisms apply to Badiou's take on Plato's *Parmenides* in meditation two of *Being and Event*. Here he focuses on unity not at the largest level, but at the smallest, atomic level. Badiou goes on to conclude that ZFC set theory, which has no urelements, is a description of the kind of multiple without the one that Plato considers, but fails to elaborate, in the *Parmenides*. Let us take a look at the passage from *Parmenides* to see whether the key propositions have a set-theoretic or a mereological character.

One of the questions that Plato investigates in the *Parmenides* is whether we can describe being if we drop the characteristic of unity – the hypothesis "if the one is not."[32] For Plato (or at least for the *dramatis personae* of the *Parmenides*), the result is deeply aporetic. The interlocutors in the *Parmenides* abandon the option that being without unity can be thought at all. But for Badiou, in contrast, the way the *aporia* is spelled out by Plato unwittingly indicates a new way forward, which he labels "the multiple without the one." Although Plato did not see a way to theorise being without the one consistently, Badiou believes that modern set theory delivers precisely such a theory. Here is the passage from the *Parmenides* that Badiou believes indicates a set-theoretic opportunity:

> If one took the point of being which seemed to be the smallest, much like a dream within sleep, it would immediately appear multiple instead of its semblance of

[32] Plato, *Parmenides*, 160b-166c, as quoted in Badiou, *Being and Event*, p. 31.

> one, and instead of its extreme smallness, it would appear enormous, compared to the dissemination that it is starting from itself.[33]

This line of thought is an outlandish consequence of the hypothesis of being without the one. More specifically, the idea seems to be that if there are no smallest parts, then every part must contain more parts, *ad infinitum*. Another way to phrase this is that if there is no fundamental unity to being, then there is no level at which one will encounter undecomposable atoms. The image is one of infinite zoom levels – at each level there are more parts to discover.

This view may be hard to fathom for Plato's interlocutors (and possibly for Plato himself) because they tacitly subscribe to an atomistic picture of spatio-temporal objects. Without there being smallest units, there is nothing the bigger composites can be composites *of*. So they reject this position as aporetic.[34]

We should now keep two concerns separate. First of all, it is essential, once more, to firmly establish that the type of parthood relation that occurs in the cited passage is mereological. We take some fragment of being (we quite literally 'take' some chunk of reality and examine it), then try to find its *smallest* part, only to discover that it has many parts all over again. This type of language, used in the passage cited above, is indicative of spatial mereological wholes and parts, not of sets, since only spatial wholes have *smaller* parts.[35] By way of contrast, there is no guarantee that an element of a set is 'smaller' than the set itself (if we understand 'smaller' in the sense of cardinality – but that is the only notion of size available for sets). Although any interpretation of Plato's *Parmenides*

33 Plato, *Parmenides*, 164d, as quoted in Badiou, *Being and Event,* p. 34. Parmenides addressing Aristotle.

34 A similar sentiment is found in Leibniz, in one of his letters to Arnauld: "I maintain that there is no better way to put philosophy back on its feet and turn it into something precise than by focusing on individual substances or complete entities that have genuine unity, their changes all being caused from within themselves; everything else is mere phenomena, abstractions or relationships. We'll never find any rule or recipe for making a genuine substance out of many entities by aggregation." Gottfried Wilhelm Leibniz and Antoine Arnauld, *The Correspondence between Leibniz and Arnauld*, trans. Jonathan Bennett, 2017, https://www.earlymoderntexts.com/assets/pdfs/leibniz1686a_1.pdf, p. 62.

35 In fact, the Greek word root μέρ- (part) occurs over 50 times in the discussion between Parmenides and Aristotle, concerning the different hypotheses about being and the one. 'Mereology' takes its name from this Greek root.

is bound to be contentious – I certainly do not aim to develop my own here – my goal has been merely to point out that more work is needed to cast the central propositions in set-theoretic terms.

It is undoubtedly true that Plato's interlocutors (Parmenides and Aristotle) consider the idea of an atomless reality hard to swallow. However, modern mereology teaches us that we *can* introduce an axiom that states that all objects are atomless into a mereological theory without running into any mathematical inconsistencies:

The axiom of atomlessness: Every object has at least one proper part.

If an atom is an object without proper parts, then this axiom bars the existence of atoms.[36] A mereological theory that includes this axiom would perhaps be a 'theory of the pure multiple without the one' in the spirit of the above passage of the *Parmenides*. From a contemporary mathematical perspective, such theories are known to be consistent.[37] However, since this question concerns the make-up of our physical universe, one would have to leave the final word to physicists. But modern atomic physics has long surpassed any sort of simple mereological approach to atoms, shifting its focus instead to the forces at work in keeping matter together. And even if quarks are the smallest (indivisible) particles, it still does not mean that physical objects *are sets* (unstructured collections) of quarks. Instead, they are some sort of structured constellations of them. The structure of such constellation is what modern physics aims to understand. The mereological aspect plays little to no role.

To summarise, if one wanted to pick up the argument where the interlocutors of Plato's *Parmenides* leave it, one would do so with mereological ideas (supplemented by physical theories), not set-theoretic ones. (Set-theoretic cardinality concerns can come in later, but do not imply that the entity in question, a spatial fragment of reality, is a set.) So, it is quite unclear how any reading of the *Parmenides* can lend support to the proposal that set theory is a privileged site

---

36 'Atom' is here used in the sense of 'smallest indivisible part', not in the sense of contemporary physics, where atoms have smaller constituents.

37 The open sets of a Euclidean space are a model of an atomless mereology. See Varzi, "Mereology".

of *ontological* speculation. More specifically, the proposition of excluding unity at the microscopic level of being (the idea explored in the *Parmenides*) is not at all captured by ZFC set theory, which is not a medium for theorising about the part-whole structure of being at all, but a theory of collections. ZFC, as a theory of sets of sets, has no real purchase on the entities discussed by the ancients.

The above objection is more or less independent of the role that *unity* plays in Badiou's argument. As I have indicated, the propositions a) that there is no universal whole (Lucretius) and b) that there are no atoms (Plato's thought experiment in *Parmenides*) are stated in mereological vocabulary. The broader class of mereological theories includes theories that affirm or deny these theses. So, at the outset, mereology (the study of a class of formal theories that isolates the part-whole relation) is neutral with regard to these propositions, and can hence serve as a vehicle for further investigation.

Now, regarding the matter of the barring of the motif of unity from ontology: my position is that there is no strong philosophical reason for assuming that being *qua* being *does or does not have the characteristic of unity*. Also, as we have seen, Badiou's framing of the passages from Plato and Lucretius is somewhat tendentious, since he frames the specific questions of totality and atomicity as matters pertaining to the broader rubric of unicity.

Regardless of these minor framing concerns, one can also ask whether Badiou gives a substantial and independent ontological motivation to bar 'the one' from being *qua* being. Although unity is sometimes more projected than real, it is nonetheless a fundamental (yet not fully understood!) facet of our conceptual (and perceptual) apparatus. Although Badiou claims the opposite, modern set theory can equally be construed as an extension of our cognitive talent at unifying heterogeneous substance into a whole (in an extended sense) – set theory as a consequence of the human talent for unification. Returning to Badiou, we have already seen that when it comes to his ancient references, it is not straightforward why a contemporary ontological programme *must* avoid the theme of unity, since a close reading of these texts invariably leads to a discussion of issues within the purview of modern physics (atoms, the universe, etc.).

Apart from these analyses of ancient philosophical texts, Badiou gives several other reasons to push the pure multiple to the foreground of the ontological agenda. Some of these build on interpretations of other philosophers (e.g. Hegel, Nietzsche, Heidegger, Spinoza), and some of them have a more argumentative character. For example, meditation one of *Being and Event* concerns itself with establishing the necessity of postulating that being *qua* being must be pure multiplicity.[38] However, upon closer inspection, Badiou gives no independent argument here. Rather, he introduces the maxim "the one is not" as a sort of philosophical axiom. If anything, the indirect argument is that those ontological programmes which made unity a strong characteristic of being *qua* being failed. However, there are reasons to doubt that Badiou demonstrates this. At best, he establishes that one may attempt the alternative. It appears to me that there is no independent framing of the theme of ontology here, one not designed with the final goal in mind of recognising set theory as a theory of the pure multiple. In subsequent parts of the book he does not dwell on whether $M = O$ has been successfully established.

Let us close this examination by looking at one of Badiou's remarks on Nietzsche. Nietzsche famously declared that God is dead. Insofar as theology sees in the monotheistic God of Christianity a figure of the one, we could interpret Nietzsche's intervention as a warning against the theme of unicity in ontology. This is what Badiou indeed does in an instructive passage of *Number and Numbers*, which compresses his proof of $M = O$ to the point of extreme brevity:

> Modernity is defined by the fact that the One is not (Nietzsche said that 'God is dead', but for him the One of Life took the place of the deceased). So, for we moderns (or 'free spirits'), the Multiple-without-One is the last word on being qua being. Now the thought of the pure multiple, of the multiple considered in itself, without consideration of what it is the multiple of (so: without consideration of any *object* whatsoever), is called: 'mathematical set theory'. Therefore every major concept of this theory can be understood as a concept of modern ontology.[39]

We can undoubtedly embrace Nietzsche's healthy scepticism towards monotheism. But does that get us all the way to the claim that the ZFC axioms codify being *qua* being? It seems not. As we have seen throughout this paper, the leap

[38] Badiou, *Being and Event*, pp. 23–30.

[39] Alain Badiou, *Number and Numbers*, trans. Robin Mackay, Polity Press, Cambridge 2008, para. 7.16.

is enormous. Why do we need to *replace* the monotheistic God (a figure of the one) with another ontological figure (the pure multiple)? Should set theory take the place of onto-theology? If God does not exist, then it would appear that no specifically theological word on being *qua* being needs to be spoken at all. And even if we were to accept the necessity of a replacement figure, the subtraction of oneness from being would not get us to the sets of ZFC. It would get us to atomless mereology, a position that might be of interest to some logicians, but not to someone like Badiou, who wants to bridge ontology with the theory of subjectivity.

What is most important about the cited passage, however, is the final sentence, its outcome. If the identification succeeds, then Badiou can treat the fruits of set theory ("every major concept") as direct ontological insights. This indeed seems to be the real justification of "mathematics is ontology": it serves to disguise the rather loose and analogical nature of Badiou's use of mathematics. Instead of using mathematical tools to answer questions about the nature of reality, Badiou instead interprets mathematical results directly. He presents his idiosyncratic interpretations as rigorous consequences of the work of Cantor, Gödel, Cohen, etc. The complicated intermediate steps have been compressed by way of a direct identification. This makes it exceptionally difficult to evaluate his ontology on a strictly philosophical basis, since most, if not all, of his central concepts are elaborated through complex analogies between philosophical themes and the theory of sets. Instead of giving his reader a guide to interpreting his analogies as analogies, he continues to present his work as a rigorous mathematical ontology. A philosophical project that is in truth experimental and heuristic in nature is presented as a faithful unpacking of the consequences of the innovations of others (Cantor, Gödel, etc.).[40] It is this meta-philosophy itself (i.e. an informal model or picture of philosophical activity) to which I object most strongly (insofar as it opens the door to extreme forms of dogmatism).

[40] This stylisation of philosophical activity through the heterogeneous field of mathematics is not entirely innocent. It has recently been characterised as a "*project of the re-education of philosophy through mathematics*," in François Laruelle, *Anti-Badiou: On the Introduction of Maoism into Philosophy*, trans. Robin Mackay, Bloomsbury Academic, London and New York 2013, p. vii. Similar complaints have been lodged in Ian Hunter, "Heideggerian Mathematics: Badiou's Being and Event as Spiritual Pedagogy", *Representations* 134 (2016), pp. 116–56. Despite their observant remarks, both authors frequently lapse into caricature.

A final remark on how I believe we should read Badiou. Despite his great love for mathematics, he is probably most known for philosophical ideas that do not fall within the purview of classical ontology. His central doctrines concerning events and truth procedures are perhaps better understood as falling within the fields of philosophical anthropology or social ontology since they are ultimately concerned with the possibility of certain types of (collective) human action.[41] The central question is always what it means to be a human being situated in a socio-historical cultural field of artistic, scientific, political, and amorous innovations. Perhaps it is time we read Badiou on that level, letting go of the idea that his anthropological claims are mathematical *consequences* of a deeper involvement with ontology (which is how he, at least part of the time, describes his systematic endeavours in the *Being and Event* trilogy). What if we turned Badiou on his head and finally understood that his ontology is analogical and heuristic in nature, yet ultimately indexed to his avant-garde anthropology, and not the other way around?

* * *

Postscript

At the 2018 conference in Prague where I presented a shorter and less critical version of this paper, Badiou gave a response paper (addressed to all the contributors) in which he explicitly addressed the role of his formula "mathematics is ontology." An edited version of this response is included in this volume.[42] Since his talk was rather surprising, I would like to end with a brief response.

In his talk, Badiou admitted ("confessed") that the formula *M = O* is only "a sort of mediatic formula," or "a propagandist formula" which is "condemned to a terrible failure."[43] He furthermore claimed that he brought ZFC set theory into ontology because he saw a new tool to continue the ontological orientation of

---

[41] Badiou occasionally describes his work as having an anthropological scope. See Alain Badiou, "Affirmative Dialectics: From Logic to Anthropology", *The International Journal of Badiou Studies* 2 (1/2013), pp. 1–13.

[42] Alain Badiou, "Ontologie et mathématiques : Théorie des Ensembles, théorie des Catégories, et théorie des Infinis, dans *L'Être et l'événement*, *Logiques des mondes* et *L'immanence des vérités*", pp. 15–34.

[43] Alain Badiou, "Five Points – Final Speech", Youtube, 2018, https://www.youtube.com/watch?v=iWws287P1OU.

such thinkers as Lucretius and Democritus in it. But on the other hand, therein he also admitted that he "forced" something onto mathematics, since ZFC is not a theory of the multiple in any available ontological sense of "multiple."

Despite these admissions, it is my view that Badiou falls short of providing a satisfactory alternative narrative with regard to the exact role of mathematics for his systematic philosophical works. In any case, he seems far from recasting his interpretations as extended examples of analogical reasoning, which is my present view. I have already discussed why the alleged connection between the ontologies of Lucretius and Democritus, on the one hand, and modern set theory, on the other, is a spurious one. And Badiou admits that the connection is rather loose. However, he continues to describe the study of ZFC and its extensions as the study of "all possible forms of the multiple," where the concept of multiple is taken to have a direct ontological resonance. Furthermore, he emphasises that his ontological decision can be appreciated "at the level of the consequences," e.g. upon consideration of his interpretation of Gödel's and Cohen's theorems. But if the basis of the analogical argument is spurious, how can we accept or appreciate the consequences? The whole project revolves around using mathematical proofs in support of anthropological propositions. It seems that Badiou's auto-criticism falls short of admitting the creative and analogical nature of his interpretations.

References

Badiou, Alain, *Being and Event*, trans. Oliver Feltham, Continuum Books, London and New York 2005

— "Five Points – Final Speech", *Prague Axiomatic Circle*, Prague 2018 [Youtube], available at: https://www.youtube.com/watch?v=iWws287P1OU

— *Theory of the Subject*, trans. Bruno Bosteels, Continuum Books, London and New York 2009

— "The Question of Being Today", in *Briefings on Existence: A Short Treatise on Transitory Ontology*, trans. Norman Madarasz, SUNY Press, New York 2006

Baki, Burhanuddin, *Badiou's Being and Event and the Mathematics of Set Theory*, Bloomsbury Academic, London and New York 2015

Bartlett, A. J. and Justin Clemens (eds.), *Alain Badiou: Key Concepts*, Acumen Publishing Limited, Durham 2010

Corcoran, Steven (ed.), *The Badiou Dictionary*, Edinburgh University Press, Edinburgh 2015

Cohen, Paul, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Dover Publications, Mineola 2008
— "The Discovery of Forcing", *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 32 (4/2002), pp. 1071–1100
Leibniz, Gottfried Wilhelm and Antoine Arnauld, *The Correspondence between Leibniz and Arnauld*, trans. Jonathan Bennett, 2017, available at: https://www.earlymoderntexts.com/assets/pdfs/leibniz1686a_1.pdf
George Lakoff and Rafael E. Núñez, *Where Mathematics Comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York 2000
Harte, Verity, *Plato on Parts and Wholes: The Metaphysics of Structure*, Clarendon Press, Oxford 2002
Hegel, Georg Wilhelm Friedrich, *The Science of Logic*, trans. George di Giovanni, Cambridge University Press, Cambridge 2010
Varzi, Achille, "Mereology,", *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), 2016, available at: https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/mereology/

Filozofski vestnik | Volume XLI | Number 2 | 2020 | 143–178 | DOI: 10.3986/FV.41.2.07

Tzuchien Tho*

Sets, Set Sizes, and Infinity in Badiou's *Being and Event*

Introduction

In 2006, Lucca Fraser published the article "The Law of the Subject: Alain Badiou, Luitzen Brouwer and the Kripkean Analysis of Forcing and the Heyting Calculus."[1] Still one of the best Anglophone commentaries on Badiou's *L'Être et l'Événement*, she argued that Kripke forcing was sufficient to render the theory of the subject in Badiou's *L'Être et l'événement* within an intuitionistic framework. This pluralization of logical frameworks allowed us some insight into the possibilities of mathematical ontology of which Badiou was not aware. That is, it forced us, and eventually Badiou, to recognize that his commitment to classical logic, where the principle of excluded middle was true, was unnecessary to the claims about the subject within his project. In turn, Badiou agreed and acknowledged this point but argued that this only applied to the subjective dimensions of mathematical ontology.[2] Classical logic was still needed to express the core of the ontological analysis, based on Zermelo-Frankel set theory with the axiom of choice (hereafter ZFC).[3]

The paper here follows in Fraser's example. Yet instead of dealing with the theory of the subject in *L'Être et l'événement*, I turn to the theory of the "count", the fundamental aspect of Badiou's theory of Being and beings in *L'Être et l'événement*. Further, I am not interested here to challenge the classical logical framework upon which the work is couched, although it is far from unassailable. What is in question here is instead the relation between the count and multiplicity. In particular, I argue that Cantorian transfinite cardinality, a method of reckoning

1 Zachary Luke Fraser (Lucca Fraser), "The Law of the Subject: Alain Badiou, Luitzen Brouwer and the Kripkean Analyses of Forcing and the Heyting Calculus", *Cosmos and History: The Journal of Natural and Social Philosophy* 2 (1-2/2006), pp. 94–133.

2 Alain Badiou, "New Horizons in Mathematics as a Philosophical Condition: An Interview with Alain Badiou [with Tzuchien Tho]", *Parrhesia* 3 (2007), pp. 1–11.

3 *Ibid*., p. 7.

* University of Bristol

the measure of the sizes of sets, is not a necessary feature of the coherence of the project of mathematical ontology in *L'Être et l'événement*. The implication of this for Badiou's project is that the "subtraction of the one" also implies a pluralism of the one. That is, the pluralization of how unity is constituted, located, and operational. While subtraction is a rejection of the givenness of the one, the rejection of a view entrenched in traditional metaphysics, it retains the form of the one as the result of the count. Here the one is not a given but a result. From this count, the set theorical universe is populated by the entities generated by the count. However, these entities need not be measured in the standard Cantorian way and can be subject to different forms of measurement.

As will be argued, the implication of the pluralism of the one is that the count-as-one of finite and transfinite sets is indifferent to Cantorian cardinality. This indifference is crucial because the count is responsible for the count of the inconsistent multiple at the very heart of the project. This initial count is one that formally introduces the set (within the discourse of ZFC) as the basic term of Badiou's mathematical ontology. This renders questions of measure and, in particular, the measure of the infinite orthogonal to this theory. Badiou emphasizes this in his work, noting that the infinite has no intra-mathematical meaning. Badiou's ontological project is thus not only a subtraction from the metaphysics of the "one" but also a subtraction from the metaphysics of infinity, which is dependent on it. What results instead is a pluralism of these terms based on the more fundamental distinction, as Badiou himself puts it, between concept and existence.[4] A pluralism with respect to the unfolding of the ontological concept is thus no challenge to dimension of existence. This orthogonality reveals that Badiou's ontological project is free to embrace a pluralism about unity and infinity unanticipated by Badiou and the founders of set theory. This pluralism of the one reveals new contours of theoretical possibility previously unexamined by Badiou and his commentators.

Counting and the inscription of the void

The central goal of Badiou's *L'Être et l'événement* is to employ the structures provided by set theory (especially ZFC) to analyze existence. What this means is not at all straightforward. Badiou argues neither for a Pythagorean-Platonic ontology in the vulgar sense, where existence reduces to sets, nor mathematical

4 Alain Badiou, *Being and Event*, trans. O. Feltham, Continuum, London 2005, p. 159.

reality as ultimate reality, nor for set theory as a model for existence. Rather, no structure, be it mathematical, or something else, could serve as a direct map of ultimate reality since any ontology must first reckon with the fact that Being is itself unstructured. Any ontology must first force Being to relate to a structure that would be alien to it. Hence, for Badiou, since Being is itself unstructured, in order for ontology to be possible, it must be drawn into structure by the means of the count. Hence, this first step into the possibility of a mathematical ontology cannot be given by set theory itself. This "drawing in" is operated by "inscription", the localization of unstructured being into the structure of set theory. Basically, the unstructured is inscribed within structure by the count of the void, since whatever is not already within the structure must appear as, or be a presentation of, a "nothing".

The basic picture then is that Badiou makes the link between set theory and unstructured Being by counting it (Being) as a set containing the void. The positivity of the void in set theory therefore stands in for what is "underneath" structure but nonetheless localized within the set theoretical discourse. This bridge between unstructured Being and the structures of set theory rejects the two traditional tendencies in ontology. The first tendency is that ontology or metaphysics in general is a rational description of the fundamental structures of being. This presumes that Being has an inherent structure that is knowable and reducible to some basic form. We can set this aside because Badiou maintains the view, shared by a lineage of thinkers since the Platonists that Being is inaccessible to us through the means of the categories we apply to beings or the senses. The second notion is that ontology plays the role of drawing out the immanent but obscure qualities of Being-as-such. Badiou similarly rejects this path of analyzing the "deep" allure of the Being by cutting off our relation to the "presence" of Being in favor of reducing it to a count of the void. In short, all that is "above" and "beyond" cannot appear as a "one" (i.e. an entity), therefore it is counted as a "void". This act, which we may term "subtraction", produces nothing mysterious. It is simply the count of the void. This is the null set {} or Ø, the void after it has been counted, that forms the basis of the arithmetic counting of pure sets. From this Ø, we count its successor {Ø}, and its successor's successor {Ø, {Ø}}, and {Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}}, and so on. The success of this process allows Badiou to provide a key distinction in the mathematical ontology of *L'Être et l'événement*. That is, the arborescent branching of the count of the null set (the count of the void), allows us to retroactively designate Being, seen through the lens of consistent structure, as “inconsistent”. Hence, instead of subordinating Being to the logic of beings (the unit entity), or searching for a non-rational presence of the Being behind and beyond being, unstructured Being is taken up into ontology (the realm of consistent multiplicity) as “inconsistent multiplicity”. This is wholly dependent on the existence of a structurally coherent (and well-ordered) consistent multiplicity.

Badiou’s act of ontological subtraction may be seen as deflationary to any metaphysics. It is certainly fair to judge it so from the perspective of the traditional goals of ontology. Yet, it is not deflationary of ontology insofar as the subtraction does not restrict ontology to consistent multiplicity. Instead, the distinction between consistent and inconsistent multiplicity provides the central materials for analysis in *L’Être et l’événement*. Ontology, in Badiou’s sense, has therefore the task of unfolding the unexpected relations between consistent and inconsistent multiplicity. More importantly, the fundamental aim of the book, the claim that truths and events exist, is the claim that, because of the incompleteness to any sufficiently strong set theory, there are sets that can be proven to exist but cannot be constructed (non-constructible sets). Hence, the inscription of Being into set theory through the count of the void will entail the unfolding, albeit incomplete, of the inconsistent multiple within the structure of consistent multiplicity.

From the point of the inscription of Being, qua inconsistent multiplicity, the operation of the count is crucial in distinguishing between ordered and structured presentation (sets in set theory), and inconsistent multiplicity (the inscribed void). In this way, structured presentation, what Badiou calls “consistent multiplicity” is given by the ordered universe of pure sets. With the inscription of the count, further counts produce a structure of sets that are recursive counts of the inscription. We can illustrate this with the sequence of natural numbers (0,1,2,3, etc.).

We can note that this counting structure maps succession order with size. However, this correspondence between order and size will not be so obvious when it comes to counts that go beyond the finite numbers. What is conspicuous here is that Badiou’s ontology in *L’Être et l’événement* relies on the count and therefore ordinality. Cardinality plays a much less important role. Why does this difference matter? It matters insofar as the count cannot be subordinated to the difference between the finite and the non-finite (or infinite). The oneness of the set is indifferent to whether the set is the void qua inconsistent multiple, a defined quantity (such as the keys on a qwerty keyboard), or the uncountably many points on a continuum. Badiou's use of set theory to anchor mathematical ontology relies fundamentally on ordinality. We shall underline this claim and its stakes further.

What is the difference between cardinality and ordinality?

Now, the two concepts of cardinality and ordinality are not determined by the axioms of ZFC. The axioms indicate and restrict the kinds of sets that can exist. Cardinality and ordinality are instead structures we use to analyze these sets in terms of "how many" and "which one", respectively, of a given set. In other words, they measure and count sets, respectively. Cardinality can be determined by matching or mapping (measurement) a set onto another pre-given set (i.e. numbers) or itself while ordinality is determined by ordering. Under normal finitary circumstances, cardinality and ordinality correspond neatly to each other, a set of five marbles has a cardinality of five because the five marbles can be mapped to a set of five entities in a pre-given set or to the first five natural numbers. On the other hand, putting the marbles in order will get us to the "fifth" marble, thereby completing the ordinal count of the marbles.[5] Given the set of finite natural numbers, which does not terminate, any arbitrarily large number will be finite and the ordinal that counts the sequence that allows us to arrive at that number will also tell us the size (cardinal) of the set that is given. The situation is slightly different for non-finite sets.

For finite cases, we can arrange the natural numbers in order and map them to their subsets (e.g., the squares, cubes and fourths, etc.). This one-to-one mapping is the structure of cardinality that allows us to see that these sets are the same size.

Naturals n	1	2	3	4	5	...
Squares n^2	1	4	9	16	25	...

5 There are ways to deliberately distinguish cardinality and ordinality in finite sets, exploiting the fact that ordinalities are pertinent to ordering while cardinalities are indifferent to order as we shall later examine.

Cubes n^3	1	8	36	64	125	…
Fourths n^4	1	16	81	256	625	…

This is a principle known at least since Thābit ibn Qurra but better known through Galileo who puts forth this mapping in the first day of the *Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences*.[6] The point here is that, through mapping, we can clearly see that the measure of these different sets of numbers are equivalent even though square, cubes, and fourths are subsets of the set of natural numbers. In other words, they share the same cardinality.

Now it is possible to demonstrate the difference between ordinality and cardinality in finite sets as well. If we take two subsets of the natural numbers, say, odds and evens, we can make a new set of the union of the two. This maps to the natural numbers and thus allows us to claim equal cardinality. However, since we remain within the context of the finite, if we start with the odds, there will be no way to "reach" the evens.

[1, 3, 5, 7, 9 … 2, 4, 6, 8…]

Regardless of any assumptions about the infinite, there would be no determinate "which one" except for the odds since the ordering does not allow access to the evens in a finite number of steps (i.e. the order means that we would never access the evens since the first ellipsis implies a non-terminating sequence). In other words, we will not know where the number "2" arises in the sequence.

This problem accentuates the conceptual difference between ordinality and cardinality in order to underline why size and order are distinct structures even

6 For a reconstruction of the "alternative" history of the infinite, involving figures likes Ibn Qurra, please see Mancosu's 2016 essay collection. Paolo Mancosu, "Measuring the size of infinite collections of natural numbers: Was Cantor's theory of infinite number inevitable?", *Abstraction and Infinity*, Oxford University Press, Oxford 2015, pp. 116–153. This paper was earlier published as Paolo Mancosu, "Measuring the size of infinite collections of natural numbers: Was Cantor's theory of infinite number inevitable?", *Review of Symbolic Logic* 2 (4/2009):612-646. For Galileo's demonstration see Galileo Galilei, *Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences*, trans. H. Crew and A. de Salvio, Macmillan, New York 1914, pp. 31–37.

within the finite cases. In non-finite cases, this difference is accentuated following a similar kind of reasoning.

Without giving its demonstration, let us assume that there are non-finite cardinalities and ordinalities. For the cardinal, we designate $\aleph_0$ as the size of the finite *ordinals* collected as a set. This is not a finite number because if it were finite, it would be part of the set being measured. It is non-finite. It is transfinite and infinite in technical and common parlance respectively. However, we hesitate in using the term "infinite" because it is significantly different from traditional notions of infinity as the completion of a non-terminating sequence. By "traditional" I mean here the wavering notions of the infinite as either the "potential" infinite of an unending sequence of successive finite terms, or the "number of numbers", the "actual" totality of numbers qua termination of the succession of finite terms. Here, the traditional ideas concerning the infinite is indeed a family of ideas and intuitions that runs the spectrum from the negative imagination of the "very large" but only ever finite, to an infinite totality that, at the pain of contradiction, must invoke a transcendence over numbers themselves. Variations across this spectrum run the gamut in the history of the infinite since antiquity. The origins of set theory offers an alternative. This alternative breaks with the traditional dialectic of the infinite with the one: either the infinite is not one, and therefore a negative entity, or the infinite is a one, and therefore a totality. As neither a potential infinite nor a totality of finite terms, the modern infinite affirms the non-termination of the count and therefore its non-totality.

By the time of the formalization of ZFC, this break with the traditional dialectic of the one and the infinite has already been accomplished by the innovations of Cantor and Dedekind. However, it is clarifying to see its canonical expression in the ZFC axioms. The axiom of infinity in ZFC specifically bars us from this archaic attachment of the infinite to the one.
The axiom of infinity[7] states:

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x))$$

The axiom states that there is an infinite set in the sense that there is a set with Ø as its element, and also the successor of that set which is the union of that set

7 Kenneth Kunen, *Set Theory*, revised edition, College Publications, London 2011, p. 17.

and its subset. Therefore, there is at least one infinite (or non-finite) set in the sense that it collects the set of the null set and all its successors. This expresses infinity neither as termination nor even transcendence of a non-terminating sequence. Rather it expresses a limit. Regardless of the size of the set offered, there is a set to which it and its successor belongs.

While being one of two of the ZFC axioms that assert the existence of a particular kind of set, the other one being the axiom of the void or null set, it does not assert that the infinite set terminates some non-terminating sequence (i.e. there is no "last" finite number). In the ZFC axiom of infinity, there is no "last one" that counts the series for the series to be measured. In fact, the very existence of a "last one" indicates a finite, rather than an infinite set according to this very axiom.

Traditionally, the infinite could only be defined against the backdrop of its relationship to the "one". This dialectic of the one and the infinite pushed the traditional notion to polarize between a potential infinite (an indefinite, non-terminating term), and a contradictory notion of a "number of numbers" that counts all the numbers. That is, either a negation of the one-total (hence potential), or the embrace of the one-total (hence contradictory). In this modern ZFC context, this dialectic fails to hold. There is neither a "greatest" finite number that counts all the finite, nor is there a completion of the non-terminating series of finite numbers. That is, it elides both the actual and potential infinity. The cardinal $\aleph_0$ is instead a measure of that non-terminating series of finites. Hence, the natural numbers, the squares, cubes, etc., are all measured by the same cardinal. Adding a finite number to the cardinal $\aleph_0$ returns the same cardinal, moreover, adding squares, cubes, fourths (though there are some shared numbers), each measuring the cardinal $\aleph_0$ also returns the same cardinal. This feature of the cardinal matches up with intuitions of inexhaustibility traditionally associated with the infinite, where the subtraction of a finite from an infinite returns an infinite, and the addition of an infinite returns an infinite. This was Galileo's observation in the text related to the principle noted above:

> Salviati. So far as I see we can only infer the totality of all numbers in infinite, that the number of squares is infinite, and that the number of the roots is infinite; neither is the number of squares less than the totality of all the numbers, nor the

> latter greater than the former; and finally that the attributes "equal," "greater," and "less," are not applicable to the infinite, but only to finite quantities.[8]

However, whereas Galileo presented this feature of the infinite as a kind of puzzlement, Cantor and his faction took it up as a positive property of the infinite. Dedekind, the other founder of modern set theoretically based mathematics (arriving at results independently from Cantor), took the Galilean puzzle instead as the positive definition of the infinite.

> A system *S* is said to be infinite when it is similar to a proper part of itself; in the contrary case S is said to be a finite system [...] My own realm of thoughts, the totality *S* of things, which can be objects of my thought is infinite. For if *s* signifies an element of *S*, then the thought *s*', that *s* can be object of my thought, is itself an element of *S*.[9]

For Dedekind, the system S was his terminology for a set S, "similar" here means "equal in size". The infinite set he denotes here is a set where the proper subset is equal in size (ie. "similar") to itself. In turn, the set that Dedekind gives as an example is the set of his "thoughts". Since every thought can be thought of, thoughts of thoughts provide a simple way to generate a subset that is equinumerous to the original set. The thought of a thought is a thought which already belongs to the original set. Hence, any set that expresses this same feature can be considered infinite. What is crucial here is that the finite sets are determined negatively only as those that are contrary to this case. It is worth remarking that the finite here is the negative case of the prior definition of the infinite set. The ground has shifted from a constructive move from the finite to the infinite to that of a prior infinite multiplicity.[10]

Let us designate this shifting of ground by naming this kind of measurement as "Cantor-Dedekind measure". This can be contrasted to "Euclidian measure" which designates that proper subsets must always be smaller than the origi-

8 Galileo, *Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences*, pp. 32–33.

9 Richard Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications, Mineola 1963, pp. 63–64.

10 Cf. Alain Badiou, *Number and Numbers*, trans. R. Mackay, Polity Press, Boston 2008, pp. 38–54.

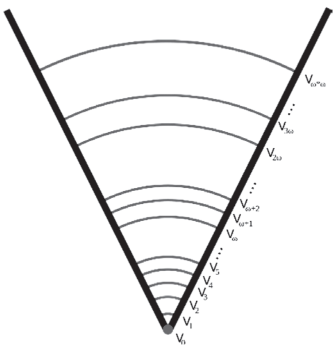
nal set. We recognize that Euclidian measure applies for finite sets. The set of odd numbers in a finite set will be strictly less than the original set (composed of elements other than odd numbers) because it is a proper subset. In turn, as Dedekind argues, the property of infinite sets is to have proper subsets that measure up to the original set.[11]

Ordering and transfinitude

Now, we can shift focus away from measurement and turn to ordering. Ordering or ordinality identifies a very different structure. If given a set, say the empty set, we can always move up in order by counting that set to produce a new set that is a successor of that set. By doing this, we can model the ordering of numbers.

Number	Von Neumann ordinal
0={}	Ø
1={0}	{Ø}
2={0,1}	{Ø, {Ø}}
3={0,1,2}	{Ø, {Ø},{Ø, {Ø}}}
...	...

The ellipsis at the bottom of the chart indicates that this constructive process of the ordinal "count" is non-terminating and therefore opens up into the transfinite sphere as a well.



[11] Cantor argues roughly the same thing in *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*. Georg Cantor, "Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* 91 (1887–1888), pp. 81–125, 240–265. Quoted in Mancosu, *Abstraction and Infinity*, p. 132.

This hierarchy produced by the ever-widening elements contained in each successor. The "V" shape is due to this. Hence, it is proper to ask the measure of each of these sets that identify the ordinality of the set. In this way, measure and order inform each other. For instance, the first number 0 contains no elements while the third number contains three elements constructed from previous counts of the set with no elements. However, the difference here is that ordinality requires a correspondence to a well-ordering of the elements, a property independent from measurement. Measurement, whether in the Cantor-Dedekind sense or in the Euclidian sense, requires no appeal to the "least" element. However, for ordinality to make any sense, it must begin with a least element. In the example above drawn from the natural numbers, this least element is 0, denoted by the empty set. In other words, in order to "arrive" somewhere in the sequence, it must "begin" somewhere. This difference of structure means that the transfinite ordinals, denoted by ω_n, function in a different way to the transfinite cardinals $\aleph_n$. The main difference can be reflected by the properties of the traditional infinite mentioned earlier. If we add a finite to the infinite, we get back the infinite. This principle holds in the domain of cardinality. Adding something finite to a set with a transfinite measure does not change its measure. However, adding something finite, like 1, to a transfinite ordinal, can indeed make a difference. The point here is rather simple. The first transfinite ordinality is a border between two orders of succession. Whatever comes before it can be subsumed under it, whatever comes after it moves beyond the border. This is simply what follows from the property of well-ordering between orders. Hence, the addition of an element at the start of the sequence is not the same as the addition of an element at the end of the sequence.

$$z+\omega = \omega < \omega + z$$

Though ordinality and cardinality differ in structure, they are not opposed. They are tools that capture different structures in the analysis of sets, especially non-finite sets, which cannot be collapsed into one another. However, insofar as Badiou privileges the count over measure, it is ordinality, not cardinality, that is the guiding structure of his mathematical ontology in *L'Être et l'événement*. The count is the count of succession rather than that of measurement. Hence, although Badiou accepts the entire machinery of ZFC set theory, the work in *L'Être et l'événement* nonetheless selects different aspects of the theory to demonstrate certain ontological claims. What is clearly primary is the structure of order, the feature of ZFC that grants the “count” of the inconsistent multiplicity entry into the status of being an “ontology”. What is secondary is the analysis of their measure, which pertains only to the representations of this primary structure. The key indication of this is the obsolescence of the notion of “infinity” in the text. While we have already hinted at this, we shall turn to make this point more concrete in what follows.

The obsolescence of infinity

The aim of distinguishing between cardinality and ordinality as structures in the previous section aims at pluralizing the notions of the non-finite (or infinity) that results from the advent of the Cantorian revolution. The goal of this section is to draw out how this implies an obsolescence of the “infinite”. This will in turn highlight the pluralization of the “one” in Badiou’s ontological project in *L’Être et l’événement*.

What are the ontological implications for Badiou in distinguishing cardinality and ordinality? First, this distinction between measure and order indicates two different kinds of structure. Cardinality is operated by the one-to-one mapping of one set to another or itself. In non-finite cases, a set is equal in measure to at least one of its proper subsets. Second, ordinality requires a least element, the constructive hierarchy of sets admits to no termination and, more importantly, is indifferent to the properties of traditional infinity. Badiou identifies the structure of ordinals (from finite to the transfinite), and not cardinals, as the arborescent domain of ontology. The parallel but independent structure of cardinality is not rejected but taken up in a secondary role. This point is best viewed through what I shall call the obsolescence of infinity at work in *L’Être et l’événement*.

The argument here is simple at first glance. Cardinality and ordinality deal with infinity in very different ways. A non-finite or transfinite cardinal is one where a proper subset is equal measure to the original set. A non-finite or transfinite ordinal marks the border between the finite and non-finite in a non-terminating sequence. However, the addition of an element from the “left” of the sum returns the same ordinal but an addition to the right does not. This is also true of non-terminating sequences in the finite case. For ordinals, the “count” or the ordering of succession determines the order of transfinitude to which a given set corresponds. The count, as succession, is entirely indifferent to whether it is progressing in the finite or non-finite domain.

There are two crucial implications here. First, the count is indifferent to the distinction of the finite and non- or trans- finite. The count, in Badiou's sense, is not restricted to the countable (denumerable) sets. This means that such a distinction, between the denumerable and indenumerable is only a secondary analysis made upon the count. We shall examine this later on. The second implication is that the traditional dialectic between the one and the infinite loses all significance in this context. What we get in return is a theory of the "count" that, through "counting-as-one", is neither finite nor infinite in the traditional sense. This installs a reckoning of ontological consistency subtracted from both the notion of the one-consistent as finite and the many-inconsistent as infinite. Badiou's act of "subtraction of the one", as he calls it, is not only a move to privilege the multiple against "the one" but also to thoroughly withdraw the relation of the one and the infinite. We shall later examine what this obsolescence of the infinite means for infinity.

Let us treat the first implication first. The traditional paradoxes of infinity concern the one and the many. The infinite arises in cases where the many cannot be reduced to the one or some rule of the one. Hence, traditionally, the infinite cannot be real because it cannot be reduced to a sum of entities (definite parts) that are actual. More importantly, it cannot be a totality except in a non-quantitative sense. Therefore, appeals to actual infinity from Antiquity until the late modern period tend to be what the Scholastic medievals called "hypercategorematical". The hypercategorematical may be some ultimate Being (God) or absolute reality that outstrips the discursive resources of the very notion of quantity. Alternatively, to speak of an infinite or infinitesimal quantity in the early modern period, theorists like Leibniz used a "syncategorematical" notion of infinity which corresponded to a "fictional" or "manner of speaking" to designate objectivity to the infinite within a restricted domain of discourse (ie. a differential ratio). This allows for the engagement with the structures available through a commitment to the infinite or infinitesimal without a commitment to its reality.[12]

[12] Richard T.W. Arthur has argued for Leibniz's commitment to the actuality of syncategorematical infinities. However, the point here is simply that the syncategorematical use of infinity does not commit us to its actuality. Richard T.W. Arthur, "Leibniz's Syncategorematic

In brief, the primacy of the one is the reason why the infinite cannot be actual. The infinite is neither reducible to "ones" nor can the "ones" form a totality (a whole) in any quantitative sense. The implication to be drawn here is that the irreducibility of the infinite to the one is what forbids its actuality. In turn, the difference between finite and infinite is simply marked by this property of the quantitative reducibility to the one either as part or totality. The limits of this discourse to the reducibility to the one is precisely what is rejected in *L'Être et l'événement*. This is of course what is meant by Badiou's notion of the "subtraction of the one". However, this means the subtraction of the infinite as well. Since the concept of the infinite is grasped as the transcendence from the domain of the one, the subtraction of the one implies the obsolescence of the infinite as well. From this, Badiou's ontological use of the count is also subtracted from the one and the infinite. The count-as-one is therefore the designation of an entity (i.e. a set) that does not fall into the traditional dialectic of the one and the infinite (many). The further implication is that Badiou's count does not respect the border between the quantities made up of ones (the realm of finitude) and the counts of non-finite multiplicities.

This indifference of the count to the finite and non-finite is subject to possible misunderstandings. If the count is understood under the aegis of the traditional relation between the one and the infinite, the distinction between the countable and uncountable (denumerable and indenumerable) quantities would present a challenge to Badiou's project. If this were the case, the count could not be universally or generically applied across finite and non-finite cases. That is, the count would itself be subject to the dialectic of the one and the infinite. Instead what Badiou introduces with the count is the creation of the border between the consistent and the inconsistent. The count is therefore orthogonal to the distinction between the finite and non-finite (i.e. the transfinite) and produces, rather than be produced by, the distinction between the consistent and inconsistent.

Actual Infinite", in O. Nachtomy, R. Winegar (eds.), *Infinity in Early Modern Philosophy*, Springer, Cham 2018, pp. 155–179. Richard T.W. Arthur, "Leibniz's syncategorematic infinitesimals", *Archive for History of Exact Sciences* 67 (5/2013), pp. 553–593. David Rabouin and Richard T.W. Arthur, "Leibniz's syncategorematic infinitesimals II: their existence, their use and their role in the justification of the differential calculus", *Archive for History of Exact Sciences* 74 (5/2020), pp. 401–443.

What this implies is that the count is the border between inconsistency and consistency, rather than the distinction between the finite and non-finite. This fact indicates that the count privileges ordinality as its primary functional role. Just to be explicit, if, for the sake of argument, we take Badiou's count to be cardinal measure, we would have to apply some measure to the inconsistent multiple. This is impossible since the inconsistent multiple cannot be measured unless it is first counted-as-one. As such, the inconsistent multiple would have the cardinality of the void. The void stands as what is "before" any count and therefore any measure. Insofar as the inconsistent is neither finite nor non-finite, this does not identify any relation between the finite and non-finite.[13]

The ordinal structure through which the count functions, on the other hand, operates on succession. For the domain of pure sets, the count, outside of the "first" count of the void, operates only by the recursive counting of the predecessor. Hence, nothing about the inconsistent multiple has to be assumed for the count to function. As such, the inconsistent multiple can be taken as a void or really any other kind of ground suitable for an ur-set. There is hence no need for the assumption of any distinction between the finitary status of the count itself. Further, as the count moves up the hierarchy of successors, the count itself does not distinguish between finite and transfinite. That is, while it is true that ω_0 must be handled in a different way than a finite ordinal (i.e. it does not commute), the count itself, the process of succession operates indifferently between the finite and infinite.

From this we must assert the fact that the count-as-one does not distinguish between the finite and infinite. This is crucial because the basis of Badiou's ontological project in the *L'Être et l'événement* does not begin from finite cases that slowly build towards transfinite cases. The count-as-one does not imply finitude or denumerability for either what is counted or what results from the count. Most importantly, it does not imply the difference between denumerability and indenumerability.

[13] It should be noted that Badiou has, in *L'Immanence des vérités* (2018) introduced another approach to inconsistent multiplicity. Here, he uses the Von Neumann universe of sets (V), which is not itself a set but a class, to handle the relation between inconsistent multiplicity and its relationship to sets. The later work certainly implies a more committed relationship to the positivity to the infinite. I reserve my analysis only to the structure worked out in *L'Être et l'événement*. Alain Badiou, *L'Immanence des vérités*, Fayard, Paris 2018.

This indifference of the count to denumerability and indenumerability of the one lead us to the second implication here, the obsolescence of the dialectic between the one and the infinite. The traditional dialectic rejects any "actual" or "determinate" infinity because it cannot be made a one-totality. In its traditional Pre-Cantorian form, the infinite can only be hypercategorematical, a "one" transcending quantity, or syncategorematical, a stipulated infinity (ie. a fiction) based on a restricted domain. Of course, from this traditional perspective, the post-Cantorian transfinite would not qualify as "infinite". However, the transfinite can be considered "infinite" in the sense that the modern view remains the (very useful) distinction between the denumerable and the indenumerable. Insofar as the cardinal $\aleph_0$ and the ordinal ω_0 identify the measure and count of the denumerables (respectively), thereby forming the limit between the denumerable and indenumerable, the transfinites can be considered "infinite" in a meaningful way. This is however gained only by correlating the transfinites with some pre-given (and familiar) sequence of numbers (the rationals vs. the reals) and with geometrical properties (e.g., the continuum). These are legitimate applications of ZFC but correlations of this sort are not intrinsic to it. The axiom of infinity describes a limit through the operator of belonging and the principle of succession. Denumerability and non-denumerability are applications of this construction.

The main implication here for the purposes of understanding Badiou's count-as-one from the axiom of infinity is that the oneness of any set is granted regardless of its finiteness or non-finiteness. From this, unity and infinity do not form a determinate negation. Transfinitude or the form of non-termination is a robust form of the count-as-one rather than its exception.

Given that the Cantor-Dedekind definition of infinity is encoded in a less quantitative way in the axiom of infinity in ZFC, the analysis of sets moves away from a reliance on number fields as a form of correlation. Hence, the move away from the traditional dialectic between unity and infinity does not take place in the form of a mere rejection of this dialectic but rather as an orthogonal side-stepping of this relation. Within the framework, the one and the infinite are not opposed. Instead, transfinite orders are successive orders of limits which correspond neither to the concept of the one nor the infinite (in the traditional sense). We hence assert the obsolescence of infinity through its replacement by a non-terminable but well-founded hierarchy of successive sets.

If we take this view retrospectively back into the history of mathematics, it seems that this obsolescence of infinity does not really come at any cost to mathematics. The idea of an absolute infinite never had any real mathematical content (even while sustaining a metaphysical and theological importance). The infinite either remained thoroughly potential or had to be, for the most part, fictionalized.[14] Instead, where this obsolescence of infinity matters most is in the transformed status of the "one". It is unfortunate that the Cantorian transformation of mathematics is sometimes reduced to a reform of the concept of the infinite and a declaration of its actuality. The "one", through the count qua succession is formally retained. However, the one no longer plays the role of the distinguishing mark of the finite, and thus no longer separates the finite from and non-finite. Instead it plays the role of marking consistent multiplicity across these traditional distinctions. With this subterranean transformation of the "one", we make a more thorough reckoning with this guiding concept of the "subtraction of the one". That is, as Badiou argues elsewhere, the act of subtraction is characterized by the retaining of the positivity of a negation.[15] In the case of ontology, the subtraction of the one is not a rejection but rather the retaining of its positive role in ontology through the rejection of its traditional dialectic with the infinite. This notion, in parallel to the obsolescence of the infinite does play an important mathematical role. The most crucial of these is the availability of the transfinite ordinals, the use of unity without totality in treating non-finite terms. What this implies is the pluralization of the notion of the "one". We shall examine this further on.

Cardinality as representation

Before turning to the pluralization of the one, we turn briefly to the positive role played by cardinality in *L'Être et l'événement*.

If, as we have seen, the ontological project in *L'Être et l'événement* proceeds through the structure carved out by ordinality, it is also important to indicate what remains of cardinality in the project. As has been emphasized multiple

---

14 Mancosu points to some exceptions to this mainstream history of the infinite. *Cf.* Mancosu, "Measuring the size of infinite collections of natural numbers: Was Cantor's theory of infinite number inevitable?", pp. 117–119.

15 See Alain Badiou, "Destruction, Negation, Subtraction – On Pier Paolo Pasolini", *Lacanian Ink*, https://www.lacan.com/badpas.htm, accessed Aug. 2020, Los Angeles 2007.

times, Badiou does not reject cardinality, but treats it as a secondary structure. In fact, for Badiou the structure of cardinality is appropriate for the analysis of representation.

For *L'Être et l'événement*, presentation and representation differ in their grafting onto two kinds of operations we can make on sets. Presentation is associated with "belonging" ($\in$). Therefore, whatever is presented in a situation are the elements of the set.[16] Representation, on the other hand, is associated with "inclusion" (either as subset $\subseteq$ or proper subset $\subset$). This inclusion is an operation that recognizes subsets of the situation (situation qua set). Of course, all the elements of a set can be considered as what "is included" in the set but the subsets also involve all possible combination of those elements. This concept of representation involves mere subsets up to the set of all the subsets of the situation. This is the set of all subsets produced by the operation of inclusion is the powerset.

This takes us to Cantor's theorem. The theorem states that given a set A, its powerset P(A) is of a strictly higher cardinality than A. For finite cases, this is obvious. A set of three elements {x, y, z} will have subsets {Ø}, {x},{y},{z}, {x,y},{x-,z},{y,z}, {x,y,z}. Hence, a set of three elements, a cardinality of 3, will have a powerset made up of 8 sets, hence a cardinality of 8. The basic reckoning here is that the powerset will have a cardinality of 2^n, where n is the cardinality of the original set. For non-finite sets, Cantor argued, the same follows. Hence the powerset of all finite numbers, $\aleph_0$, is $2^{\aleph_0}$. This powerset of $\aleph_0$ is therefore also of a strictly greater cardinal. The implication here is that there are cardinalities higher than the set of all infinite numbers that can be indicated by the application of the powerset operation P(A). Furthermore, for any set, finite or nonfinite, the application of the powerset will render a set of strictly higher cardinality.

This feature of the main development in set theory is interpreted by Badiou as the difference between presentation and representation. Badiou refers to the powerset as the "state". One could find reasons to quarrel about this description

16 Although Badiou credits Lyotard for the terminology of "situation", he cites Barwise and Perry on treating a set as a situation. Cf. Jon Barwise, "Situations, Sets and the Axiom of Foundation", Logic Colloquium 1984, J.B. Paris, A.J. Wilkie, G.M. Wilmers (eds.), Elsevier Science Publishers, Amsterdam 1986, pp. 21–36. Cited in Badiou, *Being and Event*, p. 484. Thanks to Julian Rohrhuber who carefully pointed out this passage recently.

of the state but we take it up here only as a technical term. Given a situation, there is a state of the situation. This is the difference between a set and its powerset. This also lines up with presentation and representation. On this account, Badiou offers two analyses. The first is that given the operation of the powerset, the sequence of cardinal numbers is interminable. The second is that the general application of the powerset results in an outstripping, not only of the quantity of the sets involved in the operation, but the outstripping of the scale of measurement. That is, insofar as one moves upwards in cardinality by the powerset of all the sets in that cardinality, each new powerset installs a new scale of quantity (the hierarchy of transfinites) that is irreducible to the "how many" of the lower scale. Here, Badiou notes that, "the natural measuring scale for multiple-presentations is not appropriate for representations. It is not appropriate for them, despite the fact that they are certainly located upon it. The problem is, they are unlocalizable upon it."[17] The point here is that for non-denumerable sets (non-finite cases) cardinality locates lower sets within them but cannot localize them due to the expansion in cardinality. Reinterpreting Galileo's demonstration, all sets of natural and rational numbers are of the same cardinality $\aleph_0$. In the same way, any mapping of transfinite cardinalities to their powersets will result in this same "unlocalizability". The distinctions of a lower dimension are "lost" in the higher dimension. The "state" of a situation, whose constituents are subsets of the situation is therefore always at a higher cardinality than the set of the constituents itself.

The resources of cardinality are employed in *L'Être et l'événement*. However, they are used in order to address the difference between presentation (governed by belonging), and representation (governed by inclusion). This gap, for Badiou highlights what he calls the "impasse of ontology". This is undergirded by Easton's theorem which roughly states that the cardinality of the powerset $2^{\aleph_0}$ of $\aleph_0$ is arbitrarily greater than $\aleph_0$.[18] Essentially, this means that the cardinality of the given powerset of a cardinal $\aleph_0$ and greater is any cardinal arbitrarily greater than $\aleph_0$. Badiou puts it in the following way:

[17] Badiou, *Being and Event*, p. 278.

[18] A few conditions apply here. Crucially, the set in question is regular (ie., obeying the axiom of regularity/foundation).

> This theorem roughly says the following: given a cardinal λ, which is either ω_0 or a successor cardinal, it is coherent with the Ideas of the multiple to choose, as the value of $|p(\lambda)|$ —that is, as quantity for the state whose situation is the multiple— any cardinal π, provided that it is superior to λ and that it is a successor cardinal.[19]

Easton's theorem here is a deepening of the Galilean "paradox". It turns out that the immeasurability of quantities beyond the finite is a general condition that goes beyond the gap between the denumerable and the indenumerable. This is what Badiou will call the "quasi-total errancy". The scales of cardinal infinites interplay with an uncontrollable degree of arbitrariness.

To what degree is this an impasse of ontology then? Badiou argues that,

> Consequently, Easton's theorem establishes the quasi-total errancy of the excess of the state over the situation. It is as though, between the structure in which the immediacy of belonging is delivered, and the metastructure which counts as one the parts and regulates the inclusions, a chasm opens, whose filling in depends solely upon a conceptless choice.[20]

The "quasi-total errancy" that Badiou refers to here is precisely the role of cardinality in *L'Être et l'événement*. That is, given well-ordered sets and consistent multiplicities beyond the finites, the application of cardinality reveals a field of arbitrariness. In other words, all questions of quantity and measure fall into a state of underdetermination where measure is stipulated (chosen) rather than deduced. From this Badiou offers an interpretation of this arbitrariness of the domain of the infinite consistent with our pluralist argument:

> Being, as pronounceable, is unfaithful to itself, to the point that it is no longer possible to deduce the value, in infinite extension, of the care put into every presentation in the counting as one of its parts. The un-measure of the state causes an errancy in quantity on the part of the very instance from which we expected-precisely-the guarantee and fixity of situations. The operator of the banishment of the void: we find it here letting the void reappear at the very jointure between itself (the capture of parts) and the situation. That it is necessary to tolerate

[19] Badiou, *Being and Event*, p. 279.
[20] *Ibid.*, p. 280.

> the almost complete arbitrariness of a choice, that quantity, the very paradigm of objectivity, leads to pure subjectivity; such is what I would willingly call the Cantor-Gödel-Cohen-Easton symptom. Ontology unveils in its impasse a point at which thought-unconscious that it is being itself which convokes it therein-has always had to divide itself.[21]

The pluralization of the "one"

Through examining the difference between cardinality and ordinality, we saw that Badiou's count-as-one is expressed in a transformed concept of the "one". It no longer forms part of the dialectic between the one and the infinite, where the infinite, if it is in any sense actual, must be presented as a totality. What results is a pluralization of the "one".

The argument so far has been the following. The Cantor-Dedekind revolution, while traditionally interpreted as the actualization of infinite sums, should instead be understood as the obsolescence of infinity. The key reason for this is that the "one" as repetition and totality, within this new domain, ceases to play the role of distinguishing between the finite and the infinite. From a cardinality perspective, although denumerability and non-denumerability sustains the traditional border between the finite and infinite as measure, the "infinite" in this sense fails to correspond to the traditional notions of the infinite. Even if we take the infinite to be non-denumerability, we see the problems of the indefinite reproduced via Easton's theorem. Hence the "infinite" in this case, or the realm of the "infinite", fails to be "actual" if we understand this actuality as conditioned, at least, by determination. If we take this question from the perspective of ordinality, we do recover the border between denumerability and indenumerability. The transfinite ordinal as a limit ordinal is logically prior to transfinite cardinalities.[22] But here, as we have argued, the structure of ordinality does not require

21 Badiou, *Being and Event*, p. 280.

22 It should be noted here that Cantor saw ordinality and its well-ordering to be more fundamental than cardinality. Georg Cantor, "Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten", in E. Zermelo (ed.), *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel*, J. Springer, Berlin 1936; reprinted Olms, Hildesheim 1966, pp. 165–209, p. 169. Although the advent of the cardinal approach to infinity was historically prior, the priority of the ordinal is asserted from a logical perspective. Cf. Hans Niels Jahnke, "Cantor's cardinal and ordi-

the infinite in order to stipulate a transfinite limit ordinal. In turn the primacy of ordinality in Badiou's ontological project in *L'Être et l'événement*, based on the count-as-one ordinality, renders infinity an obsolete concept for ontology. The claim here is to focus instead on the pluralization of the "one".

The pluralization of the notion of the "one" is simply rendered by the notion of the set. The set is a "one" in that it is counted in the ordinal sense. It therefore matters that this count is not confused with measurement. Sets that are built out of the ZFC axioms are placed within a family of branching sets that fulfils the condition of well-ordering.[23] The basic structure that this ordinality analyses is therefore the structure of succession (i.e. for any set, say a pure set, there is a successor set that counts that set). However, this only gets at the structure and not the existence of sets, the notion of a "one" produced by counting (succession). What then accounts for this parallel structure of existence?

For the project in *L'Être et l'événement*, Badiou asserts throughout that it is the count that produces the one, eschewing the notion of the "one" as a given. Hence it is the count, an *act* of counting, that introduces the existence at the basis of the analysis. To stave off misunderstanding, mathematical ontology does not go around counting what exists. Instead it is a rational and logically classical analysis of the result of the act of the count, the unfolding relation between inconsistent multiplicity, what is counted as void, and consistent multiplicity, the aggregation of counts following on the count of the void and its successors (ordinals). What constitutes the grounds of this ontological project theorized by the two "seals" [*sceaux*] that Badiou introduces in Meditation 14 of *L'Être et l'événement*. Badiou's approach pluralizes the "one" treated as the product of the count and thereby concretizes the subtractive aspect of the ontology by revising its traditional basis.

The two "existential seals" occur as limits. The first limit is that which seals off inconsistent multiplicity from consistent multiplicity. Hence, this is the count of the void. Whatever is or is in inconsistent multiplicity is excluded from the

nal infinities: An epistemological and didactic view", *Educational Studies in Mathematics* (48/2001), pp. 175–197.

23 Note that while not all sets per se can be well-ordered, in ZFC, Zermelo's theorem shows the equivalence between the axiom of choice and the well-ordering theorem.

domain of set theoretical entities by inscribing the inconsistent as the void *of* the consistent structure carved out by sets in their ordinal arrangement. From this, as we have already discussed, sets branch off in ordinals by counting the void. This results in a well-ordered tree of sets grounded in this first seal. Now, the second seal is the limit between the finite ordinals, the first transfinite ordinal, and the transfinite orders that follow after the limit as successors. Since the structure of ordinality is constructed by succession, nothing within this structure offers a distinction between the finite and transfinite. The first tranfinite ordinal is stipulated rather than given from the background structure. This border between the finite and transfinite is thus the limit of the finite series and the start of the transfinite series, a second existential seal.

We have discussed the first seal previously and thus set it aside. The second existential seal has also been briefly addressed. However, it is important here to underline that although, under a traditional reading, this limit ordinal introduces an "actual" infinite in the practice of set theory, what it actually provides, in Badiou's reading, is a further application of the subtraction of the one. Here, what is crucial is that the transfinite ordinal is not a new "one" that counts the finite series in completeness. Rather, it is an inscription of a consistent multiplicity beyond finitude. In this sense, the infinite and the transfinite limit do not coincide. As Badiou argues:

> *[W]e have not yet defined infinity*. A limit ordinal exists; that much is given. Even so, we cannot make the concept of infinity and that of a limit ordinal coincide; consequently, nor can we identify the concept of finitude with that of a successor ordinal. If α is a limit ordinal, then $S(\alpha)$, its successor, is 'larger' than it, since αÎ $S(\alpha)$. This finite successor — if we pose the equation successor=finite — would therefore be larger than its infinite predecessor — if we pose that limit = infinite — however, this is unacceptable for thought, and it suppresses the irreversibility of the 'passage to infinity'. If the decision concerning the infinity of natural being does bear upon the limit ordinal, then the definition supported by this decision is necessarily quite different. A further proof that the real, which is to say the obstacle, of thought is rarely that of finding a correct definition; the latter rather follows from the singular and eccentric point at which it became necessary to wager upon sense, even when its direct link to the initial problem was not apparent.

> The law of the hazardous detour thereby summons the subject to a strictly incalculable distance from its object. This is why there is no Method.[24]

Badiou moves on from this to define infinity according to this limit ordinal. Any set where the limit ordinal belongs is infinite, any set belonging to the limit is finite. The ontological significance here is not captured by this distinction. What this second seal indicates is that it replays the distinction between the inconsistent and consistent multiples by treating the finites as the inconsistent (because interminable) multiples. That is, just as nothing within consistent finitude can generate the limit transfinite ordinal, nothing in inconsistent multiplicity can generate the count-as-one of the void. This leads us to the key distinction of our investigation. Here Badiou argues,

> In the order of *existence* the finite is primary, since our initial existent is Ø, from which we draw {Ø}, S{Ø}, etc., all of them 'finite'. However, in the order of the concept, the finite is secondary. It is solely under the retroactive effect of the existence of the limit ordinal ω_0 that we qualify the sets Ø, {Ø}, etc., as finite; otherwise, the latter would have no other attribute than that of being existent one-multiples.[25]

What Badiou goes on to develop here, at the end of Meditation 14, is the conceptual effect of the Cantorian revolution. This is the distinction between existence and concept. According to the criterion of the order of existence, there is no relation between the finite and infinite, since, qua ordinals, the sets succeed each other. If $\{\alpha\}$ is finite, so is its successor $S\{\alpha\}$. It is only with the limit ordinal ω_0 that the limit between the finite and non-finite is marked. Yet, as Badiou argues, this limit is stipulated, and it is only through this stipulation that the finite and infinite can be distinguished. As Badiou argues here in the passage above, what this reveals is not so much a realm beyond the finite, that is, the infinite, but rather a region of the infinite classified as the "finite". This second seal is therefore a repetition of the first seal. Just as the inconsistent multiple can be recognized as inconsistent only after the first seal which designates consistent multiplicity, finitude can only be recognized (and defined) by the designation of the transfinite limit ordinal.

---

24 Badiou, *Being and Event*, p. 157.

25 *Ibid.*, p. 159.

Badiou's argument here reflects onto our earlier discussion of Dedekind's argument for the non-finite by means of infinite cardinality. In both cases, the finite is treated as a special case for the ordinary "infinitude" of sets. Hence, finitude is only available as a concept with respect to the definition of the infinite. Here, we can quibble with Badiou on the elaboration of this point. Just as the inconsistent multiple is not inconsistent before the forming of consistent multiplicity, the existence of sets and their successors are not finite before the transfinite limit ordinal. It is therefore incorrect to treat the finitude as primary in the order of existence. The crucial difference here is that the count, the structure analyzed by ordinality, is fundamentally indifferent to the distinction between finite and infinite whereas cardinality is fundamentally sensitive to this difference.

Badiou here reinforces the subtraction of the one by drawing out the further implication that the one, the counting-as-one (and forming-into-one) as a result of an act of counting rather than a given. The one, the concept through which being must be analyzed, will always be alien to what is analyzed. This holds in the case of the original count (the count of the void) as well as within consistent multiplicity. That is, the one, within the post-Cantorian context, is released from its association with finitude. The forming-into-one of a set is shown to be finite only in specific contexts but generically non-finite. The limit ordinal demonstrates this in Badiou's interpretation because it shows finitude to itself be a result of a "one" that is formally outside of it and thus capable of "counting" it (qua ordinal) and standing as a limit, a "one" that stands beyond the "ones" that populate finitude.

The new "one" within the post-Cantorian context is thus completely transformed. Another way of saying the same thing is to reaffirm that the dialectical relationship between the one and the infinite no longer holds. The one is no longer distinguished from the infinite but rather part and parcel of it. Just as the infinite is no longer the "beyond" of finitude, the one is no longer the obstacle of infinity.

The reasoning here concerning the one indicates a deep rift between treating ontology by means of ordinality or cardinality. Cardinality relies on the one-to-one mapping between sets (or a set to itself) and therefore relies on a traditional notion of the one as a pre-given unit-entity. Here, the infinite or the transfinite involves the equal cardinality of wholes and parts, a suspension of the identity between oneness and wholeness (or totality). Hence despite the general coherence in set theory between ordinal and cardinal treatments of the transfinite, Badiou's emphasis on ordinality, via the structure of the count, implies the accommodation of different means of reckoning the measure (i.e. cardinality) of any given set. Hence Badiou's ontological interpretation of ordinality and the limit ordinal implies a pluralization of the one in the sense that the ordinal structure can accommodate different theories of cardinality.

In what follows, we will examine an alternative non-Cantorian treatment of cardinality and revisit the primacy of ordinality in the mathematical ontology of *L'Être et l'événement*. What we aim to underline is the pluralization of the "one" as the consequence of the ontological project of *L'Être et l'événement*.

Numerosity and ordinality

If we go back to the traditional problems of infinity and the Cantorian revolution, we find that the hallmark of the new "infinity" (in cardinal terms) was the conceptual break with Euclidian measurement. Recall that for Dedekind, an infinitely sized set is one where at least one subset is equal in size to the original set. Cantor's transfinite cardinal also has this property. Also recall that this is logically independent of transfinite ordinality, a question that is relevant but not determinant in questions of measurement per se. However, an alternative approach to infinity has always existed in the sub-currents of mathematics and its philosophical expositors even in the Cantorian age. This is an alternative approach that rejects the relinquishing of traditional Euclidian measurement. Hence, to deepen our inquiry into the pluralization of the one, we should examine the recent resurgence of this Euclidian approach. The refusal to relinquish Euclidian part-whole relations is to express a commitment to the notion of the oneness as wholeness. Its friction with the canonical Cantorian view will allow us to grasp what the pluralism of one offers us.

In what its proponents call "numerosity theory", the Euclidian principle, which maintains that the part is always lesser than the whole, is maintained. Although Bolzano, a senior contemporary of Cantor and Dedekind, developed some features of a concept of the infinite that maintains the Euclidian principle in his 1851 *Paradoxes of the Infinite* [*Paradoxien des Unendlichen*], numerosity theory is a distinct recent development.[26] This emerged in a series of papers since 2003 by Benci and Di Nasso around "Numerosities of labelled sets: a new way of counting."[27] Since 2003, the research program has grown significantly to include several aspects of mathematics including probability. It has also sparked harsh criticism in the philosophy of mathematics notably by Parker.[28] Significantly, it has also been taken up philosophically and historically by Mancosu, moving beyond the narrow domain of non-standard analysis and set theory.

Numerosity theory, from Benci and Di Nasso's 2003 paper, extends the Euclidian principle standard from finite cases to infinite cases. Citing from Mancosu's reconstruction of the paper[29], we take Benci and Di Nasso's theory as operating from the maintenance of three principles:

1. if there is a bijection between A and B then v (A) = v (B)
2. if A ⊂ B then v (A) < v (B)
3. If v (A) = v (A') and v (B) = v (B') then the corresponding disjoint unions (∇) and cartesian products (x) satisfy:

    v (A ∇ B) = v(A' ∇ B')
    v (A x B) = v (A' x B')

The first is simply the definition of equivalence from bijection, a standard principle of cardinality. The third is a definition of sums and products in numerosity also standard to sets of this kind. What is distinctive is the second principle that maintains the strictly "lesser than" difference between a set and its proper subset. This is what is under contention.

[26] Bernard Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, C. H. Reclam, Leipzig 1851.

[27] Vieri Benci and Mauro Di Nasso, "Numerosities of labeled sets: A new way of counting", *Advances in Mathematics*, 173(2003), pp. 50–67. Cf. V. Benci, M. Di Nasso, and Marco Forti, "An Aristotelian notion of size", *Annals of Pure and Applied Logic*, 143 (1–3/2006), pp. 43–53.

[28] Matthew Parker, "Set size and part-whole principle", *The Review of Symbolic Logic*, 6 (2013), pp. 589–612.

[29] Mancosu, "Measuring the size of infinite collections of natural numbers: Was Cantor's theory of infinite number inevitable?", p. 139–145.

How does numerosity work? Intuitively, what the theory does is provide labels to sets such that subsets can be indexed (labelled) together in finitary way. Mancosu uses, as an illustration, the Italian game of Tombola, a version of Bingo. On a master board with numbers 1–90, pegs are placed when a number is drawn from a well at random. If a called number corresponds to a number on one's own board (an arbitrary rearrangement of 1–90), one pins the number down. The goal is to cover the board with pegs corresponding to the master board. In the middle of the game, how does one check one's progress in the game? There are three options.

First, one could ignore the order of the numbers and simply check if the number of pegs on one's board corresponds with the number of pegs on the master board. This bijective function would be equivalent to the Cantorian approach to cardinality. Second, one could list the pegs in order such that the numbers 1-90 are listed in order. This corresponds to an ordinal approach. Finally, one could label the pegs by designating the numbers by decades: 1-10, 11-20, 21-30, etc. Each label would be partial, given we are in the middle of the game. Under practical circumstances, this would indeed be an odd way to see how one is progressing in the game of Tombola. Nonetheless, what this does is the breakdown of a potentially linear sequence into incomplete partial sums.

The third approach is thus an intuitive image of numerosity. The goal, as Mancosu argues, "is to split a set of objects into boxes each one containing only finitely many objects. The metaphor of putting things in box number 10, 20, and so forth will be captured by the idea of a labelled set. From now on we deal only with countable sets."[30]

A potentially confusing point here is the fact that in a game, each of the boxes (ie. labels), will be incomplete as we have not finished the game. The point is that each of these partial sums constitute an approximation of the cardinality marked by each label. The whole sum will be the sequence of these approximations. The formal definition of numerosity will then rely on how one is to operate these sequences of approximation. Here, I will again cite Mancosu's simplified outline of a "calculus" for numerosities.

30 *Ibid.*, p. 139.

Def. 3.1
The sum of two labeled sets A, B is
$A \oplus B = <A \nabla B, l_A \oplus l_B>$ where $l_A \oplus l_B$ (x) = l_A (x) if x is in A and l_B(x) if x is in B.
[Caveat: take disjoint unions of A and B only]

Def. 3.2
The product of two labeled sets A, B is
$A \otimes B = <A \times B, l_A \otimes l_B>$ where $l_A \otimes l_B$ (x,y) = max { l_A (x) ; l_B(y)}.

Def. 4 Definition of numerosity
A numerosity function for the class L of all countable labeled sets is a map num: L -> N onto a linearly ordered set < N, ≤ > such that the following properties are satisfied[31]:
(1) If $\#A_n \leq \#B_n$ for all n, then num(A) ≤ (B)
(2) x<num(A) iff x= num(B) for some B⊂A
(3) If num(A) = num(A') and num(B) = num(B') then
num (A ⊕ B) = num(A' ⊕ B') and similarly for ⊗

What is beyond the purposes of this paper is to prove the existence of this numerosity function defined here in Def. 4. Benci and Di Nasso do so in their 2003 paper and they show that it is done with a selective ultrafilter.[32] The implication that they draw from this is that this fact shows that numerosity theory is independent of ZFC according to its standard interpretation. However, the authors also acknowledge, citing Booth (1969), that selective ultrafilters are compatible with ZFC (for denumerable sets). The independence of numerosity theory from ZFC is thus left as an open corollary in the 2003 paper.

Regardless of the independence of numerosity from ZFC, it is clear that the numerosity approach to counting is distinct from both the standard cardinal and ordinal approaches. The additional labelling structure imposed onto the count makes good on the part-whole distinction characteristic of finite sums (ie. the

---

31 Where # means the approximation of the labelled set.

32 An ultrafilter "filters" some set for subsets containing some element. A selective ultrafilter obtains when the partition of a set into two pieces results in a homogenous set in the ultrafilter. The existence of this kind of ultrafilter is implied by the continuum hypothesis. Cf. Kenneth Kunen, "Ultrafilters and Independent Sets", *Transactions of the American Mathematical Societies*, 172 (1972), pp. 229–306.

Euclidian property). The implication here is that if we put aside ordinality and cardinality, we can analyze at least some transfinite sets in a way that respects this property. This means, in turn, that Cantorian counting is not necessary to our ability to operate with transfinite magnitude or numbers. The impact of Benci and Di Nasso's work is thus an alternative conception of counting that, though independent from ZFC, analyses and measures sets of transfinite magnitude.

It is important to emphasize that though numerosity is an alternative rather than a direct challenge to Cantorian conceptions of the transfinite, it does indeed challenge the philosophical treatment of the infinite received from the standard exposition of set theory. That is, modern infinity (ie. transfinitude) is gained at the expense of the Euclidian principle. More precisely, it challenges Gödel's opinion that Cantor's views on cardinal number was "uniquely" correct. Critics of numerosity like Parker do not dispute Benci and Di Nasso's work on the basis of its cogency but find fault in it as mathematically arbitrary in the sense that numerosity, as an alternative to Cantorian cardinal counting, presents measurements according to a wholly different notion of size.[33] It turns out that the view, though logically impeccable, presents an alternative whose sole motive is to affirm the Euclidian principle and does little else. Of course, this is not the place to access Parker's criticism or adjudicate the significance of numerosity theory. Yet it is nonetheless pertinent that this alternative challenges the supposed "inevitability" of Cantorian cardinality.[34] However, this is a historical and philosophical argument, not a mathematical one. Hence, although there were historical detractors, the canonical embrace of the Dedekind-Cantor cardinality approach to measurement of sets was indeed responsible for the emergence of set theory and the transfinite, there was no necessity attached to this development of the history of the infinite. More importantly, Mancosu traces the history of this notion of the infinite back to Ibn Qurra (9th century), Grosseteste (13th century), and Bolzano (19th century). However, our concern here is not the historical, logical, and mathematical legitimacy of this version of the infinite (the non-finite that respects the Euclidian property) and this approach to measurement (numerosity). The motivation here is instead to identify and concretize the notion of the

33 Matthew Parker, "Set size and part-whole principle", p. 20.

34 This argument against inevitability is precisely Mancosu's interest in numerosity theory. Mancosu, "Measuring the size of infinite collections of natural numbers: Was Cantor's theory of infinite number inevitable?", p. 116.

pluralization of the "one" through the different ways that set theory has reconfigured the very concept of counting.

Consistent with Parker's criticisms and Mancosu's analysis, it is correct to view numerosity theory as itself the result of Cantorian measurement and the complex maturation of set theory throughout the 20^{th} century. The general historical effect of the delinking of measurement from a pre-given oneness or completeness of what is measured indicates that numerosity bolsters rather than detracts from the impact of the Cantorian reconfiguring of the traditional dialectic between the one and the infinite. Hence, the terms of the dispute between Numerosity and canonical ZFC set theory, does not concern the status of the transfinite but rather how the "one" is to be conceived within it, a dispute that occurs without thereby disturbing the inherent multiplicity of what is counted-as-one. This indicates at least one example of a pluralization of the one adjacent to the counting by ordinals that Badiou takes as canonical in *L'Être et l'événement*.

The aim in this section was to examine a case for the pluralization of the one. It may have at first seemed that numerosity would undermine some of the fundaments of Badiou's ontology of the count-as-one modelled after ordinality. After all, Badiou's reliance on the standard interpretation of ZFC suggests that the transfinite could only be won at the expense of the relinquishing of the Euclidian principle. This is not the case. There are two ways to parse this issue. The first is that numerosity theory is independent and therefore not contradictory to ZFC, it constitutes a method of measurement that sits alongside cardinality and ordinality which are themselves not equivalent forms of counting. The second, more important, is that it is itself a result of the primacy of the multiple. In this sense, numerosity theory reintroduces the concept of the part-whole into a theoretical domain that no longer sustains the opposition of the one and the infinite.

How does numerosity allow us to reinterpret Badiou's second ontological seal? Insofar as the second ontological seal is based on an interpretation of the first limit ordinal, the theory of numerosity does not affect the status of the order of transfinites. Indeed, numerosity is a theory primarily concerning how the sizes of sets are measured and therefore does not directly imply any critique of ordinality (the order of sets). However it is clear that the Euclidian structure to which numerosity aims at is generated neither by Cantorian cardinality nor ordinality. From this independence or orthogonality, numerosity introduces a new kind of "count" reliant on a theoretical aim, the Euclidian property, that engenders a new consistency between the count, multiplicity, and the transfinite. As an alternative theory of measurement, it is not a criticism of traditional set theory but a critique of it. As critique, it demonstrates some limits of the Cantorian theory of measurement, setting forth its own but stops short at the refutation of the standard means of measurement. The emergence of numerosity therefore indicates the further maturation of the pluralization of the "one" in the pluralization of counting. The "one" in this context is therefore neither based on the givenness of the one nor is it subject to the Cantorian "one" of isomorphic mapping.

Within the context of numerosity, Badiou's second seal, the identification of a limit ordinal, is reproduced in a minor way, across the field of the countables. The labels are themselves stipulated limits which have no other justification than being stipulated in a convenient way for the sake of satisfying the Euclidian property. Each partial sum constituting the numerosity function is a diffraction of the limit ordinal akin to that which allowed Badiou to claim the second seal as the transfinite limit ordinal separating the finite and the non-finite (or transfinite) ordinals. The method of numerosity therefore radicalizes the decisionistic or voluntaristic character of the stipulation of the first limit ordinal (the second seal). In other words, the function of the second existential seal is only illustrated by the emergence of the first limit ordinal but not exhausted by it. Numerosity, as a species of the one, proliferates this limit through labelling. It therefore extends the pluralism of the one identified by the second ontological seal.

Ultimately, Badiou's mathematical ontology in *L'Être et l'événement* relies on the functional relations between the one, the many, and what is beyond, the transfinite or the infinite. However, the content of the ontology does not reduce to the structure exposited by these relations. Hence, the various alternatives presented here about measurement, and therefore the count, are not alternative ontological presentations. They are rather instances of the complex relationship between the inconsistent multiple and the consistent multiple. Numerosity theory provides some friction for the reconsideration of Badiou's project when it is treated from the perspective of the pluralization of the one. Consistent multiplicity is inaugurated by the structure of the ordinals but its measurement, its representation is subject to different modalities of analysis.

Some concluding remarks

Though Badiou and his commentators often emphasize the role of the infinite qua transfinite in the project of mathematical ontology, the fundamental structure that guides the ontological project in *L'Être et l'événement* is the count.[35] If we examine the count through its difference with its parallel mathematical structure, the measure, what we find is that the heart of the project consists in the pluralization of the figure of the one. This pluralization subtracts the count-as-one from the traditional framework of the dialectic between the one and the infinite and places positively in the role of operating the distinction between inconsistent and consistent multiplicity. The work of mathematical ontology, its analysis and (re)invention of structure can be reduced to the task of bringing inconsistent and consistent multiplicity into new forms of relation. Hence, at the center of this project is the proliferation of new "ones". The one qua the result of the count identifies the "other" (the non-one) within the "one", in other words, the immanence of the inconsistent within the consistent. Hence, the "subtraction of the one" can be reinterpreted as a proliferation of the one.

This leads us to three general conclusions:

First, in the general argument, we have seized on an interpretation of Badiou's decisionism (or voluntarism) about the infinite as stipulation. Clarifying the fundamentality of ordinal structure helps make more sense of the skepticism about method that Badiou introduces in the *L'Être et l'événement*. The "anti-method" concerning the infinite in *L'Être et l'événement* can thus be understood as a rational consequence of this distinction between ordinality and cardinality. This allows us to affirm the transfinite as a decision at the same time as limiting this decisionism in *L'Être et l'événement* to the dimension of representation, or measurement. The ontological basis of this representation instead turns on the relation between consistency and inconsistency, operated by the count, rather than finitude and the infinite.

---

[35] Badiou introduces a different approach to mathematical ontology in *L'Immanence des vérités*, one that relaxes some of his earlier restrictions concerning the exclusive use of sets. Further work must be done to see the degree to which the new approach conflicts and extends his arguments in *L'Être et l'événement*. The fundamental difference is the stronger approach to some interpretation of infinity and the engagement with classes over and above sets. The argument in this paper only relates to *L'Être et l'événement*.

Second, the figure of the transfinite can be held at a certain distance from the Cantorian measurement. The examination of numerosity theory bolsters the fact that the trade-off between the Euclidian principle and Cantorian cardinality need not also be so. Hence, as Mancosu argues, numerosity reevaluates the apparent "inevitability" of Cantorian measure. The traditional part-whole relation can therefore be regained alongside the expanded powers of extension brought about by the ZFC paradigm. The historical effect of the advent of Cantor's ordinal and cardinal transfinite had the effect of rupturing the traditional relation between the one and the infinite. Hence the "one" in the Post-Cantorian context can be pluralized across cases where the count can be interpreted through the part-whole relation without sacrificing the actuality of the transfinite. The actuality of the transfinite, a stand-in for an "actual" infinite, is not, however, the basis of the work in *L'Être et l'événement*. Instead, what is crucial is the reconfiguration of the finite as a species of the infinite instead of the infinite as a transcendence of the finite. This concretely asserts that the count as indifferent to finitude and the infinite.

Third, the pluralization of the one here implies its virtuality. For any analysis of the consistent multiple, the pluralism of the one reveals the multiple facets by which any consistent multiple can be brought into relation with inconsistent multiplicity. The virtual force of the one is therefore operative in this pluralism. The one via the count remains the only means by which the inconsistent and consistent multiple are brought into conceptual relation. If the one is not treated as a given, but instead the result of an act of counting, the resultant one of the count is therefore subject to a pluralism. The one is therefore virtual, insofar as it is indispensable for the very possibility of consistent multiplicity but subject to widely differently forms.

What we have only briefly mentioned is that the second part of *L'Être et l'événement*, concerning truth, the event, and the subject is possible only by a negation of the first part, concerning mathematical ontology. That is, after having laid out an intricate and complex ontological structure, it is argued that the event is an exception of that structure. Hence Badiou's aim for slowly developing the ontological structure in the first part of the book is precisely to exploit the limitations that can only be grasped if it is sufficiently built up. The discourse on the event and truth is predicated on the fact that set theory is incomplete (it cannot prove its own consistency) and that, in the treatment of this incompleteness, non-constructible sets had to be developed. Hence, the range of sets must include those that fall outside the well-ordered sets constructed by the count of pure sets and the ordinal structure of succession. This is a further case of the pluralization of the count, but further work will be needed to draw out its implication with respect to the present investigation.

Beyond the central claim of this paper, the argument for the plurality and virtuality of the one in Badiou's *L'Être et l'événement*, the case is made for the ongoing development of mathematical ontology with respect to developments in the field beyond set theory's main achievements ending with Cohen's independence results in the 1960s. It is sometimes argued that Badiou's use of set theory is locked into the state of set theory in the 1988, when the book was written.[36] Set theory itself, it seems, no longer represented the cutting edge of mathematics in the 21st century. There is obviously some truth to the notion that the wealth of energy dedicated to set theory in the 20th century has significantly abated since. However, new research continues in this field and the project of mathematical ontology should be revisited on the basis of these developments. The key here is that the attention that we must pay to set theory is only due to its insights into the relation between inconsistent and consistent multiplicity, and not about some special ontological status of sets themselves. In this way, new insights in the practice of set theory can contribute new concepts in mathematical ontology.

References

Arthur, Richard T.W., "Leibniz's Syncategorematic Actual Infinite", in O. Nachtomy, R. Winegar (eds.), *Infinity in Early Modern Philosophy*, Springer, Cham 2018, pp. 155–179.

— "Leibniz's syncategorematic infinitesimals", *Archive for History of Exact Sciences* 67 (5/2013), pp. 553–593

Badiou, Alain, *L'Être et l'Événement*, Seuil, Paris 1988

— *Being and Event*, trans. O. Feltham, Continuum, London 2005

— "New Horizons in Mathematics as a Philosophical Condition: An Interview with Alain Badiou [with Tzuchien Tho]", *Parrhesia* 3 (2007), pp. 1–11

— *Number and Numbers*, trans. R. Mackay, Polity Press, Boston 2008

[36] Badiou's *L'Immanence des vérités* is his own riposte to this criticism, dealing with the latest developments in set theory. This paper offers another kind of response, rooted in *L'Être et l'événement*.

— "Destruction, Negation, Subtraction – On Pier Paolo Pasolini", Art Center College of Design in Pasadena, 2007, available at: https://www.lacan.com/badpas.htm

Barwise, Jon, "Situations, Sets and the Axiom of Foundation", Logic Colloquium 1984, J.B. Paris, A.J. Wilkie, G.M. Wilmers (eds.), Elsevier Science Publishers, Amsterdam 1986, pp. 21–36

Benci, Vieri, and Di Nasso, Mauro, "Numerosities of labeled sets: A new way of counting", *Advances in Mathematics*, 173(2003), pp. 50–67

— Benci, Vieri, Di Nasso, Mauro and Forti, Marco, "An Aristotelian notion of size", *Annals of Pure and Applied Logic*, 143 (1-3/2006), pp. 43–53

Bolzano, Bernard, *Paradoxien des Unendlichen*, C. H. Reclam, Leipzig 1851

— The Paradoxes of the Infinite, trans. D. A.Steele, Routledge, London 1950

Cantor, Georg, "Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* 91 (1887-1888), pp. 81–125, 240–265

— "Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten", in E. Zermelo (ed.), *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel*, J. Springer, Berlin 1936; reprinted Olms, Hildesheim 1966, pp. 165–209

Dedekind, Richard, *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications, Mineola 1963

Fraser, Zachary Luke (Lucca Fraser), "The Law of the Subject: Alain Badiou, Luitzen Brouwer and the Kripkean Analyses of Forcing and the Heyting Calculus", *Cosmos and History: The Journal of Natural and Social Philosophy* 2 (1–2/2006), pp. 94–133

Galileo, Galilei, *Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences*, trans. Crew and de Salvio, Dover, New York, pp. 31–37

Jahnke, Hans Niels, "Cantor's cardinal and ordinal infinities: An epistemological and didactic view", *Educational Studies in Mathematics* (48/2001), pp. 175–197

Kunen, Kenneth, "Ultrafilters and Independent Sets", *Transactions of the American Mathematical Societies*, 172 (1972), pp. 229–306

— *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, Elsevier, Amsterdam 1983

Kenneth Kunen, *Set Theory*, revised edition, College Publications, London 2011

Mancosu, Paolo, "Measuring the size of infinite collections of natural numbers: Was Cantor's theory of infinite number inevitable?", *Abstraction and Infinity*, Oxford University Press, Oxford 2015, pp. 116–153

Parker, Matthew, "Set size and part-whole principle", *The Review of Symbolic Logic*, 6 (2013), pp. 589–612

Rabouin, David, and Arthur, Richard T. W., "Leibniz's syncategorematic infinitesimals II: their existence, their use and their role in the justification of the differential calculus", *Archive for History of Exact Sciences* 74 (5/2020), pp. 401–443

Le « Voir » et le « dire »: théorie des ensembles / théorie des categories
“Seeing” and “Saying”: Set Theory / Category Theory

Filozofski vestnik | Volume XLI | Number 2 | 2020 | 181–198 | DOI: 10.3986/FV.41.2.08

Charles Alunni*

Relation-objet et onto-logie, ensembles ou catégories. Identité, objet, relation

For Billy Nomates and the Sleaford Mods

I. L'ontologie d'Alain Badiou

« Ce qui tissait la déréliction de l'inventeur Cantor n'était rien moins qu'une errance de l'être. »[1]

« Au pied du mur de l'être, l'ontologie savante, ou constructible, est ascétique et acharnée. »[2]

« Pour le philosophe, la mathématique est simultanément ontologique et logique. Disons qu'elle est onto-logique : le trait d'union sépare ici Platon et Aristote. »[3]

« Le mode propre sur lequel une philosophie convoque une expérience de pensée dans son espace conceptuel relève strictement, non de la loi supposée de l'objet, mais des objectifs et des opérateurs de cette philosophie elle-même. »[4]

« L'axiome de discrimination qu'il faut alors introduire est à mon sens le suivant : une philosophie est aujourd'hui largement décidée par la position qui est la sienne sur le

1 Alain Badiou, *L'Être et l'événement*, Seuil, Paris, 1988, Méditation 29. « Pliage de l'être et souveraineté de la langue », p. 327.

2 *Ibid.*, p. 343.

3 Alain Badiou, *Court traité d'ontologie transitoire*, Seuil, Paris 1998, p. 116.

4 *Ibid.*, p. 119.

* École normale supérieure de Paris

> rapport des deux autres sommets du triangle, la mathématique et la logique. »[5]

Aujourd'hui, je m'intéresserai plus particulièrement à *un habitant* de l'univers *entier* de la théorie des ensembles qui quantifie et paramètre sans restriction. Pour lui, l'habitant d'un ensemble α a une *vision* tout à fait *limitée* des choses. Mais lui *voit* cet habitant du dehors. Cet habitant qui voit l'autre habitant du dehors, c'est bien sûr l'*ontologue* Alain Badiou, tel qu'il se définit lui-même dans le *dictionnaire* de *L'Être et l'événement*. Ce personnage *ubiquitaire* réapparaît explicitement au cœur de *Topos ou Logiques de l'onto-logique*, au chapitre 20 intitulé *Les Topos comme lieux logiques* : « L'univers de type Topos *n'est pas extensionnel* : un *nom* n'a pas pour référent l'extension du concept qu'il nomme, ou, comme dit Frege, la totalité des "cas" du concept ».[6]

C'est là une *différence décisive* entre l'univers ensembliste et l'univers de type Topos, différence *dans la pensée*. « Les éléments de C » n'est pas un énoncé *existentiel* pour l'habitant du Topos. Ce qu'il y a, c'est *cette* flèche, dont on pourra dire qu'elle est un élément de C. *Le concept identifie sans collectiviser.*

La voie que nous allons suivre est *ambiguë*. C'est une version qu'on peut dire « externe » de la logique immanente d'un Topos. Ou encore, c'est parler du Topos *dans le langage des ensembles*.

Il est possible de serrer de plus près l'immanence, et de continuer invariablement à ne traiter que des diagrammes commutatifs (la commutation d'un diagramme est typiquement ce que *voit* un habitant du Topos). Mais la *puissance* (*externe et métaphorique*) de l'élucidation langagière ensembliste permet mieux de *soutenir l'investigation onto-logique*. On se souviendra cependant constamment que bon nombre de nos expressions, *si elles désignent du dehors* des réalités du Topos, seraient *inintelligibles pour un habitant du Topos*.

C'est dire que nous adoptons la position de celui que, dans *L'Être et l'événement*, j'ai appelé « l'ontologue ».

---

5 *Ibid.*, p. 120.

6 Alain Badiou, *Topos ou Logiques de l'onto-logique*, Tome I, tapuscrit, p. 101.

Je reviendrai par la bande sur certaines notions impliquées ici par Badiou, telles que « *ambigüité* », « *métaphore* » et « *vision* », sur leur *réversibilité* possible (passant des ensembles aux catégories et *vice-versa*), ainsi bien sûr que sur les couples « dedans » / « dehors », *interne* / *externe*, local / global, le tout en liaison directe avec le couple primordial *relation* / *objet*.

Je terminerai mon propos par une série de *questions* non nécessairement homogènes, mais qui feront soudure avec d'autres articles de ce recueil, tel celui de René Guitart[7].

Dernières précisions *préambulatoires* concernant, d'une part, les textes d'Alain Badiou qui ont été essentiels pour moi dans ces quelques réflexions ; de l'autre, le statut de mon propos. Pour les textes :

1. *Topos ou Logiques de l'onto-logique. Une introduction pour philosophes*.[8]
2. Le *Séminaire sur la théorie des catégories*, tapuscrit, 1993–1994. Complément à *Topos*.[9] *Séminaire sur la théorie des catégories par Alain Badiou* (1993–1994).[10]
3. Le *Court traité d'ontologie provisoire*.[11]

En ce qui concerne le statut de mon propos, il n'est bien évidemment pas celui de l'*épistémologue* patenté si « l'épistémologue est celui qui, changeant la science en histoire des sciences, et l'histoire des sciences en objet séparé de la philosophie, tue, purement et simplement, la saisie de la philosophie par la vitalité des sciences ».[12] C'est ainsi que Badiou commente le mot d'ordre de Gilles Châtelet « Feu sur l'épistémologue », autre manière de dire : « Vive la philosophie ». Sur la connivence des historiens des sciences et de la pensée analytique

[7] René Guitart, « L'infini entre deux bouts. Dualités, univers algébriques, esquisses, diagrames », pp. 199–247.
[8] *Ibid.*, (Tome I), tapuscrit, 1993, passim.
[9] Disponible sur http://fr.scribd.com/doc/133157958/Theorie-Des-Categories-1993-1994-Tran-Alain-Badiou.
[10] Alain Badiou, *Séminaire sur la théorie des catégories par Alain Badiou* (1993–1994), Notes de Daniel Fischer.
[11] Badiou, *Court traité d'ontologie transitoire*, Seuil, Paris 1998.
[12] Alain Badiou, *Petit Panthéon Portatif*, La Fabrique, Paris 2008, p. 151

la plus « réactionnaire » – toujours *contre* la philosophie –, je l'ai moi-même illustrée dans ma longue présentation de *L'Enchantement du virtuel*.[13]

Je commencerai par une citation, tirée de *Logiques des mondes*, concernant la théorie des catégories et son statut *phénoménologique* chez Alain Badiou :

> Ici s'insère une thèse fondamentale, dont l'argumentaire et l'exposition détaillée occupent tout le centre de *Logiques des mondes* : de même que l'être en tant qu'être est pensé par la mathématique (ce qui est argumenté tout au long de *L'Être et l'événement*), de même l'apparaître, ou être-là-dans-un-monde, est pensé par la logique. Ou, plus exactement : « logique » et « consistance de l'apparaître » sont une seule et même chose. Ou encore : une théorie de l'objet est une théorie logique, entièrement étrangère à toute doctrine de la représentation ou du référent. De là que les livres II, III et IV sont tous sur-titrés « Grande Logique ». Ces livres explicitent entièrement ce que c'est qu'un monde, un objet de ce monde, une relation entre objets. Tout cela est corrélé à des constructions purement logiques, homogènes à la théorie des catégories, qui « absorbent » la logique au sens courant (prédicative, langagière).
>
> Je crois pouvoir dire que, de même que *L'Être et l'événement* bouleversait l'ontologie des vérités, en la mettant sous la condition de l'événement-Cantor et de la théorie mathématique du multiple, de même *Logiques des mondes* bouleverse l'articulation du transcendantal et de l'empirique en la mettant sous la condition de l'événement-Grothendieck (ou Eilenberg, ou Mac Lane, ou Lawvere…) et de la théorie logique des faisceaux. Si *Logiques des mondes* mérite le sous-titre de *L'Être et l'événement, 2*, c'est pour autant que la traversée d'un monde par une vérité, saisie d'abord dans son type d'être, s'y trouve cette fois objectivée dans son apparaître, et que son incorporation à un monde déplie le vrai dans sa consistance logique.
> […]
> On tente ici *une phénoménologie calculée*.[14]

[13] Gilles Châtelet, *L'Enchantement du virtuel, Mathématique, Physique, Philosophie*, Editions ENS Rue d'Ulm, Paris 2011.

[14] Alain Badiou, *Logiques des mondes,* Seuil, Paris 2006, pp. 47–48.

On notera ici la centralité pour *Logiques des mondes* d'un double mouvement : I) une *objectivation* dans l'apparaître ; II) un *dépli du vrai* dans sa consistance logique, cause (et clause) d'une restriction de l'étude à la théorie des *topoi*, plus qu'à une analyse de la théorie générale des catégories, que Badiou avait opérée antérieurement et précisément dans le tapuscrit *Topos*.

Dans *Logiques des mondes*, l'usage des formalismes mathématiques est très différent de celui qu'on trouvait dans *L'Être et l'événement*. Quelle est cette différence ? C'est celle qui passe entre l'*être-en-tant-qu'être*, dont le principe réel est *l'inconsistance du multiple pur (ou multiple sans-Un*), et de l'apparaître, ou *être-là-dans-un-monde, dont le principe est de consister* :

> On dira aussi : différence de l'*onto*-logie et de l'onto-*logie* [...] Disons que l'ontologie demande une compréhension plus profonde des formalismes, cependant que la Grande Logique exige un suivi plus vigilant des consécutions. Reste qu'il faut accepter la discipline des formes. Elle est condition de la vérité, pour autant que l'acception du vrai se détache de l'ordinaire du sens. Comme le dit Lacan, « *mathématique* par excellence », cela veut dire « transmissible hors sens ». Je ne me suis pas soucié d'assurer en tout point une continuité entre les deux projets, ontologique et logique.[15]

Il n'en reste pas moins une « raison » philosophique profonde gouvernant ce protocole :

> le traitement le plus moderne qui soit (ou peu s'en faut) de la logique [...] ne se fait plus du tout de façon langagière et grammairienne. On s'établit d'emblée dans des constructions beaucoup plus générales — je dirais volontiers idéales —, qui appartiennent à la théorie des catégories et à une de ses spécialisations : la théorie des topoi. Comme mon but est purement philosophique, je n'ai aucunement cherché à restituer tout le contexte catégoriel. J'ai coupé droit vers ce dont j'avais besoin et qui est en fait une catégorie spéciale : celle qu'on obtient en liant les ensembles à une algèbre de Heyting complète, donc à ce que j'ai renommé un transcendantal.

[15] *Ibid.*, p. 48.

> En somme, ce qui est ici philosophiquement traité est un fragment théorique d'un vaste édifice mouvant : la reformulation catégorielle de la logique. Ce fragment a un nom mathématique : théorie des **Ω**-ensembles. **Ω** désigne une algèbre de Heyting complète sur laquelle on mesure le degré d'égalité de deux éléments d'un ensemble.[16]

Je ne traiterai pas ici de manière explicite du problème de la position *décisionniste* du philosophe, qui tranche dans la mathématique au nom d'intérêts spéculatifs qui lui sont tout à fait propres et spécifiques :[17] ici, non pas la mathématique qu'attend le mathématicien, « la » mathématique de sa communauté, cette *working mathematics* qui ne saurait connaître ou reconnaître aucun déplacement, aucun écart, aucun pas de côté, mais une mathématique telle que passée au crible conceptuel *de la philosophie* : une « mathématique *métaphysique* » – comme la nomme Badiou –, une mathématique *déplacée* et *autrement* complexe, une mathématique non exclusivement annexée et contrôlée par un producteur jaloux, non plus assujettie au diktat *sévère* de la seule « technique » de ses calculs. Une mathématique dont se sert, à ses propres fins, le philosophe ; et Alain Badiou nous en a déjà avertis dans l'exergue, sur « le mode propre » de la philosophie.

Dès l'ouverture de *Topos*, et sous le titre d'« ambition générale », Badiou pose sans ambages le statut de la question toposique *pour la philosophie* :

> Dans le langage épistémologique dominant, on dira que [théorie des ensembles et théorie des catégories] sont aujourd'hui *rivales* quant au (pseudo-problème) du “fondement des mathématiques”. Il serait beaucoup plus ajusté de dire qu'elles définissent des orientations de pensée très différentes quant aux prescriptions *relatives au fondement de la philosophie*. Si bien que l'examen de ce qui est en jeu dans leur opposition est un problème immédiatement décisif pour qui s'engage dans la construction du lieu de pensée qu'est une philosophie.[18]

[16] *Ibid.*, p. 563.
[17] Je pense que ce sera l'un des objets de nos discussions à venir.
[18] Badiou, *Topos*, p. 1.

Il est important de noter ici une opération de *déplacement* fondamentale de la position philosophique de l'*ontologue*, ainsi que l'enregistre le début du *Cours* du 20/11/1993 (version Fischer) :

> J'ai proposé l'année dernière (cf. 21/11/92) une présentation du rapport entre la théorie des ensembles et la théorie des catégories qui différait de celle que j'avais donnée *initialement* (et dans laquelle *les deux théories apparaissaient comme deux entreprises concurrentes de fondation du langage mathématique*). Ma nouvelle thèse s'énonce ainsi : la théorie des ensembles relève de la décision ontologique, elle *prescrit* un univers ; elle ne contient pas le concept d'univers qu'elle ne fait qu'effectuer. La théorie des catégories est un protocole de *description* des univers possibles ; la prescription ontologique (la décision d'existence) y est en un certain sens *suspendue*.[19]

La question des « fondements » de la mathématique, même si elle n'a pas disparu de l'horizon ontologique, ne détermine plus, en tout cas, la schize et la bifurcation des deux théories.

Pour *Topos*, dans le cas *ensembliste* comme dans le cas *catégoriel*, la théorie « s'avère détenir une telle puissance universelle qu'elle se développe comme exposition de l'ontologie (de la mathématique) tout entière. Ce mouvement institue ces théories comme *formes compactes du biais par lequel les mathématiques conditionnent la philosophie. »*

L'ontologie prescrite par la théorie des ensembles détermine l'être en tant qu'être comme pur multiple « sans nom », et la *suture* du langage de cette ontologie à la position présentative en général se donne dans *l'ensemble vide* comme nomination.

L'ontologie *prescrite* par la théorie des catégories détermine l'être comme *acte*, *rapport*, *mouvement*. Ici, l'ontologie *catégorielle* est bien, elle aussi, *prescriptive*. Cependant le vocabulaire de l'objet ne doit pas nous égarer : un « objet », en théorie des catégories, est au départ un simple *point* (voire, une simple *lettre*), sans intérieur déterminé, alors qu'un ensemble n'est précisément, que le compte-pour-un de ce qui lui appartient, donc de son « intérieur ». Cette ap-

19 *Ibid.*

proche duplice de l'*objet* est inductive d'un premier dual constitué par le partage *intérieur / extérieur*. Badiou reprend ici la distinction de Desanti pour qui l'ontologie *ensembliste* est « intrinsèque », alors que l'ontologie *catégorielle* est « extrinsèque ». Entendons par extrinsèque que *la détermination d'un objet*, dans l'univers d'une catégorie, se fait exclusivement par les *rapports* ou *mouvements* dont cet objet est la source ou la cible. Même les *catégories de l'immanence* (ce que sont les « éléments », ou les « sous-objets » d'un objet) sont définies par des *flèches* qui « vont » (ou opèrent) vers (ou sur) l'objet concerné.

Par *l'axiome d'extensionalité*, la théorie des ensembles permet à l'identification d'une présentation multiple (donc d'*un* être) de se faire *sans ambigüité*. Cet axiome repose sur la détermination *intrinsèque* (immanente) du multiple pur.

En théorie des catégories, il n'en va pas de même en général. Car « deux » objets peuvent, quoique comptés-pour-deux « en soi » (c'est-à-dire *dans une version ensembliste*), être source et cible des mêmes types *d'actions*, ou *rapports*, dans la catégorie où ils figurent. Dans ce cas, leur identité *extrinsèque* est la même. Or, cette identité, c'est elle et non *la pure différence de position* (qui en fait une *différence littérale* : un des objets s'appelle *a*, et l'autre *b*) qui, *pour le catégoricien*, est essentielle. On dira dans ce cas que les deux objets sont *isomorphes*, et on les considèrera en fait comme « les mêmes ». Il y a donc en théorie des catégories, *une ambigüité essentielle de l'identité*. Pris dans des réseaux *de rapports et d'actions* externes semblables, « deux » objets sont indiscernables – sauf comme *lettres vides*. (Je reviendrai brièvement sur le concept catégoricien *d'isomorphie*).

Pour Badiou, c'est ici le dispositif *aristotélicien* qui développe ses racines, car la théorie des catégories tente d'ordonner l'ontologie à une vision « naturelle » de l'être ; d'où que le concept-clef de cette théorie est celui de « transformation *naturelle* ». Quant à l'ontologie ensembliste, elle relève de *l'intelligible a*-naturel, s'édifiant du seul *vide*, et subordonnant le mouvement (les fonctions) à une position *fixe* de la présentation.

De même que pour Aristote « *Ens dicitur multipliciter* »[20], de même, en théorie des catégories, un concept est, quant à sa portée et à ses composantes, entièrement

[20] Aristote, *Métaphysique*–, Livre Z, 1028 a.

tributaire de l'univers catégoriel où il est défini. C'est inévitable, puisque l'identification d'un concept (ou d'un objet) se fait *à partir des mouvements qu'il supporte*, des opérations où il est pris, mouvements et opérations qui engagent *tout l'univers* (tous les autres « objets », mais surtout toutes les « forces » ou flèches qui sillonnent cet univers). Ici Deleuze et Nietzsche ne sont jamais très loin !

En revanche, en théorie des ensembles, il existe *un univers de référence « absolu »*, la hiérarchie cumulative des ensembles, qui est *suturé* à l'être en tant qu'être *par le nom du vide*, et qui déploie des niveaux successifs que la pensée peut parcourir du biais des opérations fondamentales : passage d'un ensemble à l'ensemble de ses parties, ou à l'ensemble-union. Cette *hiérarchie cumulative* des ensembles pourrait faire penser à la stratification en échelles de la relativité *scalaire* de Laurent Nottale. Cependant, c'est la théorie des catégories que Badiou va définir comme *pleinement relativiste*, et exhibant *des* univers *possibles* (appelés *Topoi*). Car, seule la théorie des ensembles présente l'ontologie dans le déploiement d'un monde intelligible *unifié*.

Cette opposition d'une pensée *axiomatique* et d'une pensée *définitionnelle*, d'une pensée *prescriptive* et d'une pensée *descriptive* réitère en philosophie l'opposition Platon/Aristote. *Ontologiquement*, du simple fait qu'en théorie des ensembles il y ait *un concept « absolu » de l'être*, ce qui n'est pas non-être *doit* être. L'absoluité de la détermination de l'être est aussi *l'absoluité de la délimitation entre être et néant*. Dans la théorie des catégories, *la pluralité relativiste* des univers et le caractère « extrinsèque » des immanences entraine que la *négation du non-être* n'équivaut pas, en général, à *l'affirmation de l'être*. La logique « naturelle » est ici l'*intuitionnisme* : le raisonnement par l'absurde admis en théorie des ensembles n'est pas recevable dans de nombreux *Topoi*. Il n'existe donc pas, dans ce type de pensée, de preuve *indirecte* (ou *oblique*) d'une existence ou d'une vérité. Nous ne sommes tenus de croire que ce que nous « voyons » (ou *construisons*). De là, *une pente empiriste*, au sens large, s'opposant une fois encore à la contrainte exclusivement *intelligible* de la théorie des ensembles, *détachée par le vide de toute présupposition de présence*.

Dès lors, sur toutes les questions décisives de la pensée de l'être (actes de la pensée, formes de l'immanence, identité et différence, cadre logique, rationalité admissible, rapport de l'expérience et de l'existence, infinité, unité ou pluralité des univers…), théorie des ensembles et théorie des catégories proposent *des voies disjointes*. C'est dire comme elles engagent chez Badiou des conditions *différentes* pour la philosophie : c'est un débat central pour la construction du *lieu philosophique*.

Je me concentrerai maintenant sur les spécificités de la théorie des catégories. D'abord en ce qui concerne *flèches* et *diagrammes*, avant de conclure sur la *lettre* et l'*immanence* (ou l'*immanence de la lettre*).

Une flèche étant une action *orientée*, l'usage de schémas ou diagrammes y est essentiel. Il s'agit toujours de *montrer dans l'espace* la figure d'une définition. Le diagramme correspond à la conviction *naturelle* et *intuitive* de l'ontologie catégorielle. Il exhibe *dans l'expérience*, et « d'un seul coup » (*uno intuitu*, dirait Descartes), *la consistance présentative de la définition*. La seule chose qui compte dans un diagramme, c'est la *disposition* de la composition des flèches, et ces mouvements n'altèrent en rien cette disposition. *Il faut exercer son œil à suivre les invariants de connexion dans des diagrammes d'apparences très différentes*. Si on appelle « géométrie » l'étude de ce que des *déformations* perceptibles dans l'espace laissent *invariant*, la présentation diagrammatique des enchainements de flèches est bien un exercice géométrique.[21]

Dans ce cadre, un personnage clef inscrit son nom au panthéon catégoriel : c'est René Descartes. Il est ainsi décrit dans le *Court traité* : « Descartes, pour qui l'univers, sorte de graphe matériel de la mathématicité, fixe Dieu dans la ponctualité transmathématique de l'infini actuel, ce qui n'est vivre que dans la mort littérale ».[22] Or, ce qui, selon Badiou, fait tout le génie de la pensée catégorielle c'est, *fidèle en cela à Descartes*, qu'elle installe l'exposition mathématique dans une constante *ambigüité* entre l'*algébrique* (les *équations*) et le *géométrique* (les diagrammes). *Ambigüité* liée au fait qu'en définitive la théorie des catégories est essentiellement une *logique intuitionniste* (comme l'est aussi bien la logique cartésienne). Ce qui veut dire que les catégories organisent la pensée autour de *constructions effectives*, lesquelles peuvent être en effet, soit des équations explicites, soit des configurations « spatiales ».

[21] Sur ce point, Badiou renvoie dans *Topos* à l'exemple paradigmatique donné par le « lemme du pullback » ou *produit fibré*, p. 66. Sur cette dimension *géométrique* essentielle, il faut consulter l'ouvrage de Jean-Pierre Marquis, *From a Geometrical Point of View. A study of the History and Philosophy of Category Theory*, Springer, Berlin 2009.

[22] Badiou, *Court traité d'ontologie transitoire,* p. 10

Plus explicite encore, Descartes inscrit son nom au cœur même de la théorie, dans ce qui se dit « catégorie à clôture *cartésienne* ». Que vient faire Descartes, à la lettre, dans cette affaire ? C'est qu'une catégorie doit toujours être pensée comme *un univers géométrique*. Et en théorie des catégories *limites* et *co-limites* sont des *consistances* de cette *disposition* géométrique. Et ces consistances, qui reposent finalement sur des équations (celles qui règlent la *commutation des diagrammes*), peuvent être dites *algébriques*. En ce sens, l'existence des limites pour tous les *diagrammes finis* réalise l'univers comme une *consistance de type géométrie algébrique*. Or Descartes est l'inventeur de la géométrie algébrique et le nom « catégorie cartésienne » provient d'une généralisation des « produits cartésiens ».[23]

Explicitons encore le statut catégoriel du *diagramme*. Un diagramme n'est pas une catégorie. C'est *un morceau quelconque*, ou *arbitraire*, d'une catégorie. Or, arbitraire comme il l'est, un diagramme est en général *fort peu structuré*. Les compositions qui y sont réalisables peuvent être très peu nombreuses. Pour avoir une mesure de la « consistance » d'un diagramme, il est tout à fait crucial de savoir ce que peut être *un diagramme « très » structuré*. Étant un morceau de catégorie consistant, il y a des marquages multiples *de la même action*, l'opération « structurante » étant la composition des flèches. Un exemple paradigmatique : un triangle *structuré* est en fait *un double marquage* de la *même* action, selon sa forme décomposée (l'action f, puis l'action g), ou, selon sa forme *synthétique* (l'action h qui est l'action $g \circ f$).

On touche ici à la notion de *dimension* d'une catégorie et à la *consistance du « voir »*. Le problème de la *dimension* d'une catégorie est celui du « recul » qu'on peut y avoir *par rapport à un diagramme* ; il s'agit donc de définir la métaphore du « voir », ou du « recul », de façon consistante, avec des *diagrammes consistants*. Il y a ici deux *réquisits* : a) étant donnés les *objets* du diagramme, il existe *un objet de la catégorie* d'où tous ces objets sont « *visibles* ». C'est un objet de la catégorie qui n'est pas en général un *objet du diagramme* ; b) étant donnée une *flèche* du diagramme, tous les objets du diagramme sont visibles d'un point de la catégorie, mais les flèches du diagramme sont « capturées » par ce voir, au sens où *toute flèche du diagramme entre dans la composition d'une flèche venue de ce point*. Le système de ce point et des flèches est un *voir analytique du diagramme* :

[23] Je remercie ici David Rabouin pour cette précision.

c'est ce qu'on appelle un « cône ». Une catégorie sera « grande » si beaucoup de diagrammes, donc beaucoup de morceaux de la catégorie, admettent des cônes (i.e. sont *analytiquement visibles de l'intérieur de la catégorie*).

Ce point touche ici au statut de l'*universalité* et à la question initiale *de la lettre*.

Un diagramme peut bien entendu admettre *plusieurs cônes différents* (on « voit » *analytiquement* le diagramme depuis plusieurs objets, ou points de la catégorie). Il s'agit alors de savoir si l'on peut *isoler*, parmi ces points, *l'un d'entre eux* comme point de vision « universel ». Ce concept d'*universalité*, typiquement catégoriel, est à nouveau *géométrique*. C'est une position universelle que nous cherchons. Soit un point d'où l'on voit le diagramme *du plus près possible*.

L'idée est que le point « universel » est lui-même *visible* depuis les autres points d'où l'on voit le diagramme. *Il est comme l'avant-poste de tous les points de la catégorie d'où l'on voit le diagramme*. Je rapprocherais volontiers ce point de la notion d'*avant-postes de l'obscur* : « Une philosophie offensive [...] doit se situer résolument aux avant-postes de l'obscur [...] comme ce par quoi des dimensions neuves peuvent advenir. » [24]

Être en position *universelle* au regard d'une propriété (la vision *analytique* d'un diagramme, matrice en théorie des catégories de *toute* propriété) engage un *effet de position* et un *principe d'unicité*. Toute universalité est un composé de *subsomption* et d'*Un*. Cependant, l'Un ne peut en théorie des catégories être l'*Un de l'objet*. Ce doit être *l'Un d'une action*. C'est le concept de *limite*.

Qu'est-ce qu'une unicité « objective » de l'universel (ou de la limite) ? Il y en une *au sens catégoriel*. Pour un diagramme donné, *deux objets* qui ont la propriété *universelle* sont *isomorphes*. Or, deux limites (c'est la même chose que la *propriété universelle*) *ne sont pas discernables extrinsèquement*, donc par des propriétés « actives » (ou en termes de *flèches*) qui les déterminent, *même si elles le sont « littéralement »*. Deux objets *isomorphes* sont « littéralement » *différents*, mais catégoriellement *identiques*. Car l'*identité catégorielle* est spécifiée par les réseaux d'actions dont un objet est la source ou la cible. Or, si *a* est dans un tel

[24] Gilles Châtelet, *Les enjeux du mobile*, *Mathématique, physique, philosophie,* Seuil, Paris 1993, p. 22.

réseau, et que *b* est *isomorphe* à *a*, *b* est *aussi* dans le réseau : la nullité latente de l'action supplémentaire ne change rien.

La question de la *lettre*, comme celle de *l'immanence*, est ici philosophiquement décisive, raison pour laquelle j'y terminerai mon analyse.

Nos concepts fondamentaux spécifient des objets comme *uniques* (dès lors qu'ils existent dans une catégorie) *à un isomorphisme près*. Ce qui nous situe dans la *méditation sur l'Un*. On démontre que, dans une catégorie donnée, deux *pullbacks* (produits, égalisateurs, co-produits, *pushouts*, co-égalisateurs) pour les mêmes *objets* ou *flèches* sont *isomorphes*. Ainsi s'accomplit *l'ambigüité de l'Un* dans la pensée catégorielle. Deux objets « différents » (*au sens ensembliste*) peuvent être *identiques* en ceci que les *concepts structuraux* sous lesquels ils tombent sont les mêmes. Ils auront les mêmes *noms* conceptuels. Aussi bien ne sont-ils finalement distincts *que comme lettres*. Ce qui amène à penser la différence du rapport *signifiant/lettre* de façon différente, *selon que l'ontologie sous-jacente est ensembliste ou catégorielle*. Pour la théorie des ensembles, *toute lettre est virtuellement un nom*. Tandis que pour la théorie des catégories, *le règne de l'ambigüité par isomorphie* entraine que des noms peuvent *indifférencier des lettres distinctes*.

Quiconque parle de la lettre doit préciser dans quelle présentation ontologique il opère.

Dans l'ontologie *ensembliste*, *l'immanence est originelle*. Dans l'exposition catégorielle, l'immanence est *un résultat*, pour partie *métaphorique*. Il s'agit de déterminer progressivement *la singularité d'un objet*, lequel au départ est une *simple lettre*. On parlera donc *comme si* on procédait peu à peu à sa spécification immanente, comme si *on « remplissait » la lettre de déterminations* qui la rendent capable de fonctionner *comme un nom* (« sous-objet », « élément d'un objet »). Mais le réel de ces déterminations sera *toujours pensé* avec des objets extérieurs et des flèches dont l'objet considéré sera la source ou la cible.

Ainsi, les structures de l'*immanence*, dont l'originarité fait toute la portée de l'ontologie ensembliste, apparaissent plutôt, dans l'exposition catégorielle, comme *des entames extrinsèques de la lettre*, qui la singularisent à la fin comme *quasi-nom*. L'*intrinsèque* est, en théorie des catégories, *une saturation locale* (sur une lettre) *de l'extrinsèque*.

À propos de la *lettre*, Badiou note que chez Gilles Châtelet, grâce à la dissymétrie, une sorte de *géométrie du contenu* vient hanter la *discontinuité littérale* ; la lettre elle-même, sans renier son austérité algébrique, y devient *géométrique* et *dansante*, si bien que le mathématicien s'empare créativement d'une *nouvelle cinétique* : « En liant le libre ballet des lettres à un continuum où des circuits peuvent se déformer l'un dans l'autre, le géomètre gagne des figures cinétiques ».[25] On sait que pour Châtelet c'était là tout « l'enjeu du *mobile* ».

Finalement, pour Alain Badiou, il y a bien une « habileté catégoricienne » quand il s'agit de reprendre une prescription de l'ontologie ensembliste, et de *l'étaler dans l'équivoque* : ce qui était *donation immanente* d'une fonction comme élément d'un ensemble devient ici *nomination d'une flèche* par un élément (lui-même *extrinsèque*) d'un *objet*.

Pour finir, je rappellerai *l'orientation générique* de Badiou : « Elle privilégie les zones indéfinies, les multiples soustraits à toute recollection prédicative, les points d'excès et les donations soustractives ».[26] Et cette merveilleuse formule : « toute existence est prise dans une errance qui fait diagonale pour les montages supposés la surprendre ».[27] Sur le plan de la *politique générique*, c'est celle d'une existence comme soustraction à l'État ou de ce qui existe seulement de *n'être pas calculable*.

Dès lors, la tâche contemporaine de la philosophie sera de comprendre comment il est possible qu'une situation de l'être quelconque soit *à la fois* multiplicité pure aux lisières de l'inconsistance, et intrinsèque et solide liaison de son apparaître. C'est ainsi une théorie de l'*événement* qui, pour la pensée, est *à la jointure intérieure* de la mathématique et de la logique mathématique : « On est alors, dirait Mallarmé, dans ces parages du vague où toute réalité se dissout. Mais on est aussi là où il y a une chance que surgisse, aussi loin qu'un endroit

[25] Badiou, *Petit Panthéon portatif*, p. 156.

[26] Badiou, *Court traité d'ontologie transitoire*, p. 53.

[27] *Ibid.*

fusionne avec au-delà, c'est-à-dire dans l'avènement d'un autre lieu logique, brillante et froide, une Constellation ».[28]

L'être, événement, identité, objet, relation/Questions à Alain Badiou

> « L'homme raisonnable s'adapte au monde, l'homme déraisonnable persiste à chercher à adapter le monde à lui-même. Par conséquent, tout progrès dépend de l'homme déraisonnable »
> Georges Bernard SHAW

Pour Alain Badiou, les réels descendants d'Aristote sont *les empiristes anglo-saxons* qui font valoir, *contre Platon*, que les objets mathématiques sont *construits*. Entend-il cette « *construction* » en un sens spécifiquement délimité, ou bien y inclurait-il ce que, par exemple, Lautman, Cavaillès, Bachelard, Hermann Weyl ou Aldo Giorgio Gargani entendent eux-mêmes par *construction de l'objet mathématique*, qui n'est jamais donné ? Serait-il prêt à accorder une certaine place à la dimension *constructive* d'un platonisme *dynamique* rectifié, comme celui de Léon Robin, Oskar Becker ou Julius Stenzel, tous trois références fondamentales de Lautman ? Quel lien pourrait-on faire avec ce qu'il dégage lui-même comme « retournement » (j'irais jusqu'à dire, « détournement ») du Platonisme dans le *Court traité d'ontologie transitoire* à propos de *l'effet de l'apparaître comme captivité de l'être*. Il y affirme que, par combinaison de *l'ultra-platonisme* et du *citra-platonisme*, s'éclaire une certaine forme de *renversement* :

> *Le platonisme* semble dire que l'apparence est équivoque, mobile, fuyante, impensable, et que c'est l'idéalité, y compris mathématique, qui est stable, univoque, exposée à la pensée. Mais nous pouvons soutenir, nous, modernes, l'évidence contraire. C'est le monde immédiat, le monde des apparences, qui se donne toujours comme solide, lié, consistant. C'est un monde de la relation et de la cohésion, où nous avons nos repères et nos usages, un monde où l'être est en somme captif de l'être-là. Et c'est bien plutôt l'être en soi, pensé comme mathématicité du multiple pur, ou même comme physique des quanta, qui est anarchique, neutre, inconsistant, délié, indifférent à ce qui signifie, n'entretenant nul rapport avec ce qui n'est pas lui.[29]

[28] *Ibid.*, p. 200.
[29] *Ibid.*, p. 193.

Dans le *Court traité*, Badiou parle d'une *défection d'axiome* en ces termes :

> Pour ma part, je maintiens [...] que la multiplicité est axiomatiquement homogène. Il faut donc que je rende raison de l'être de l'événement à la fois comme rupture de la loi des multiplicités étalées, et comme homogène à cette loi. Cela passe par une défection d'axiome : un événement n'est rien d'autre qu'un ensemble, ou un multiple, mais son surgir, sa supplémentation soustraient un des axiomes du multiple, nommément l'axiome de fondation. Ce qui, pris au pied de la lettre, signifie qu'un événement est proprement un multiple in-fondé.[30]

Parlerait-il, à ce propos, d'un rapprochement possible, entier ou partiel, avec la stratégie d'un *Savoir sans fondement*, tel qu'Aldo Giorgio Gargani l'a développé ?[31] J'y vois personnellement un *lien* strict dès lors que l'on prend en compte son « *détournement* » platonicien : le « savoir des apparences » comme pratique d'un rituel fétichiste de la stabilité…

Me faisant, un instant, l'avocat du diable, je serais tenté de poser la question suivante. Dans le cadre des événements et procédures de vérité comme non-relation et soustraction, ma première question porte sur savoir *comment le changement peut prendre place dans cet espace* ? La question ne serait pas de savoir comment nous passons de la non-relation des pures multiplicités en tant que multiple sans relation, à la relation en tant qu'apparaître, mais plutôt *comment passer de la relation à la soustraction*. En d'autres termes, Badiou place la non-relation avant la relation, là où la relation pourrait avoir une primauté ontologique (≠ Gaston Bachelard : « Au commencement était la relation »).[32] Dès lors le mystère ne se nicherait plus dans la question « *comment les choses en viennent à être reliées ?* », comme *Logiques des mondes* en déploie minutieusement les mécanismes, mais dans la question « *comment quelque chose en vient à être soustrait d'un réseau de relations ?* ».

Logiques des mondes semble s'orienter dans cette direction tout en maintenant la thèse *ontologique* difficilement tenable de la primauté de la théorie des

30 Badiou, *Court traité d'ontologie transitoire*, pp. 57–58.

31 Aldo Giorgio Gargani, *Le savoir sans fondements. La conduite intellectuelle comme structuration de l'expérience commune*, trad. fr. de Charles Alunni, Vrin, Paris 2013.

32 Gaston Bachelard, *La valeur inductive de la relativité*, Vrin, Paris 1929, p. 210.

ensembles, où n'interviennent aucunes relations d'ordre intrinsèque parmi les éléments de l'ensemble, et où chaque élément est sans relation à tous les autres. Serait-ce que la notion de Vérité soufre d'une *notion de vérité ontologique implicite*, à la manière dont les éléments d'un Événement réfléchissent ou manifestent la situation de l'Être en théorie des ensembles, à savoir comme pures multiplicités non codées par l'encyclopédie. *Qu'eût signifié d'entamer ou d'initier l'ontologie badiousienne avec la théorie des catégories* et tenter d'*obtenir la non-relation à partir de cette théorie de la relationalité ?*[33]

Si le travail sur l'apparaître et sur la théorie des catégories est si excitant, c'est précisément dans la *conception des objets comme pures relations ou morphismes*. Dans ce cadre, l'identité d'un objet s'épuise entièrement dans son statut en tant que pure source d'une action et comme pure action sur un autre objet qui est sa cible.[34] En bref, *l'identité d'un objet* est une identité *étendue*,[35] tel un assemblage sous-terrain s'étendant à toute une variété d'autres objets, qui puisse inclure ses propres transformations sur les autres objets du groupe. Là où un derridien ou un lacanien pourraient prétendre, par exemple, que l'objet est toujours subverti par son « semblable », se dédoublant dans sa relation à un autre objet *qu'il requiert* comme pôle pour « être lui-même », le catégoricien pourrait affirmer que c'est *juste ça* (et rien d'autre) l'identité de l'objet.

L'identité de l'objet, ce sont *uniquement* ces morphismes fonctionnels entre source et cible. Ici, la description de l'objet dénie une quelconque intériorité, quelle qu'elle soit, ou un quelconque retrait (une *soustraction* dirait Badiou à la consistance) indépendant de ces relations ou morphismes. *C'est ici le point intéressant, car la nature relationnelle d'un objet catégorique peut aussi bien être réflexive*. En d'autres termes, il n'est pas besoin ici d'avoir des flèches partant d'un objet source pour aller vers un objet cible, mais *des flèches ou des mor-*

33 De manière surprenante il y a peu de théorie des catégories (au sens où il y a peu d'illustrations diagrammatiques ou de discussion de catégories autres que la Catégorie Set). La question peut sembler tout aussi pertinente qu'impertinente. La remarque me fut faite par Alain Connes en 2003 lors de ma soutenance d'HDR qui portait fortement sur le concept de diagramme.

34 Cf. Cours de Badiou sur les Catégories ; Jiri Adamek *et alii*, *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats*, Dover Publications Inc., New York 2009.

35 Cf. Sur ce point je renvoie à la notion d'*abstraction extensive* de Whitehead. Cf. également la position de Bachelard sur ce point et sa notion de « sur-objet », in Charles Alunni, *Spectres de Bachelard*, p. 134, note 241, p. 284, note 557.

phismes partant d'un objet pour revenir à cet objet dans une fonction identité.[36] L'objet peut être à la fois source et cible. En d'autres termes, on pourrait avoir ici une sorte de « rigid designators » (Saul Kripke) sous régime relationnel au titre d'auto-relations réflexives. C'est une manière ici de penser les objets comme *actes* plutôt que comme *substances* avec prédicats. Il n'existe pas ici de structure interne à l'objet impliqué ; c'est une affaire de pure relation sans relation interne. L'objet n'est pas quelque chose de plus, une entité qui serait au-dessus (ou au-dessous) de cette auto-relation ou de l'*actualité* de ce qui prend place dans cette auto-relation.

Références

Adamek, Jiri, et all., *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats*, Dover Publications Inc., New York 2009

Alunni, Charles, *Spectres de Bachelard. Gaston Bachelard et l'école surrationaliste*, Hermann, Paris 2019

Aristote, *Métaphysique* – Livres Z à N, trad. Bernard Sichère, Àgora, Paris 2010

Bachelard, Gaston, *La valeur inductive de la relativité*, Vrin, Paris 1929

Badiou, Alain, *Court traité d'ontologie transitoire*, Seuil, Paris 1998

— *L'Être et l'événement*, Seuil, Paris 1988

— *Logiques des mondes*, Seuil, Paris 2006

— *Petit Panthéon portatif*, La fabrique, Paris 2008

— *Séminaire sur la théorie des catégories par Alain Badiou (1993–1994)*, Notes de Daniel Fischer, disponible sur : http://www.entretemps.asso.fr/Badiou/93-94.2.htm

— *Topos, ou Logiques de l'onto-logique: Une introduction pour philosophes*, Tome 1, 1993 [dactylographié non publié]

— *Theorie Des Categories (1993–1994)*, disponible sur : http://fr.scribd.com/doc/133157958/Theorie-Des-Categories-1993-1994-Tran-Alain-Badiou

Châtelet, Gilles, *Les enjeux du mobile, Mathématique, physique, philosophie*, Seuil, Paris 1993

Gargani, Aldo Giorgio, *Le savoir sans fondements : La conduite intellectuelle comme structuration de l'expérience commune*, trad. fr. de Charles Alunni, Vrin, Paris 2013

Marquis, Jean-Pierre, *From a Geometrical Point of View. A study of the History and Philosophy of Category Theory*, Springer, Berlin 2009

[36] La flèche identité semble fixer les frontières pour les objets, fixant leur structure ou leur forme.

Filozofski vestnik | Volume XLI | Number 2 | 2020 | 199–247 | DOI: 10.3986/FV.41.2.09

René Guitart*

L'infini entre deux bouts

Dualités, univers algébriques, esquisses, diagrammes

1. En guise de synopsis : ce que je veux penser de l'infini

Ici, en contrepoint de mes lectures d'écrits d'Alain Badiou, je construis ce que je veux penser sur l'infini, au départ entre l'ontologie et la phénoménologie, c'est-à-dire, à mon sens, au lieu de la geste mathématicienne structurante. Je suggère d'en *voir* le questionnement au regard d'une photographie qui comporte son propre nom : « *bivue* » (voir en section 3.1). Il s'agit d'une rumination, sur l'infini, en rapportant les mathématiques qui m'importent contre, tout contre ce que Badiou avance. En conclusion on lira la différence ainsi dégagée.

Conséquemment, je propose quelques « scrupules techniques » à ronger, en au moins deux points mathématiques : la puissance du *foncteur parties* P — véritable générateur d'infinis et de structures, et la commodité naturelle des *constructions par limites* — constructions catégoriciennes de structures et théories. Proposition relative donc au questionnement sur l'infini, puisque d'une part les cardinaux découlent de la structure de P (je le montrerai en section 5) et que, d'autre part, les même cardinaux sont ce qui permet le contrôle d'existence des constructions par limites, lesquelles, en l'absence de ce contrôle pourraient être postulées (par un axiome de diagramme localement libre). Avec *in fine* une indication très allusive à l'unification de ces deux aspects : la construction des « parties » et la spécification de « limites », en la notion du foncteur « diagrammes » D qui étend le P ensembliste aux catégories. Ingrédients d'une recherche encore en progrès, mais qui, à ce point, permet de comprendre comment dissocier la pensée de l'infini de la pensée de la logique et de la « parole », comment la rattacher à la pensée du géométrique et du « voir », de la structure, du diagrammatique.

L'originalité de ce nouveau travail est de faire très explicitement la liaison avec la question de l'infini, que je ne veux réduire ni à la question des cardinaux d'ensembles ni à celle du continuum de l'espace ; pour le dire en bref, je veux

* Université Paris Diderot Paris 7

tenir la pensée de l'infini comme pensée des structures alliées avec les ensembles, de leurs dualités ; mais on ne confondra pas l'idée mathématique de dualité, instituant comme donnée première une unité dialectique, comme la pièce fait entre ses deux faces, ou le fleuve entre ses rives, avec un certain dualisme philosophique instaurant une coupure et une alternative, le négatif d'un impossible choix. L'infini est ce qui apparaît, implicitement et explicitement, dans l'analyse *et* la synthèse des structures, et de leurs dualités donc, et qui se considère et « se mesure » à l'aide d'isomorphismes.

Ce sont des questions que je creuse depuis longtemps, et le lecteur pourra chercher nombres d'articles sur mon site[1]. Cela intéresserait le philosophe que la technicité obligée ne rebuterait pas, celui qui sait que la contrainte des formalismes en calcul est somme toute moindre que celle, souvent inaperçue, de la grammaire en langue.

En lisant Badiou sur les multiplicités, j'entends bien sa décision philosophique assumée du choix du Multiple contre l'Un. D'ailleurs, Badiou se dit foudroyé par la remarque de Quentin Meillassoux sur son nom propre, la transcription de son nom « Alain Badiou » en : « À bas l'Un Dieu », voire, ajoute Badiou, en « À bas l'Un Diou »[2].

Et alors il maintient, à propos de son livre médian *Logiques des mondes*[3] : « J'ai tenté un déplacement vers l'aval, vers la situation, le monde. Mon geste va de l'ontologie vers l'agencement relationnel et la logique, du langage vers le corps, de la mathématique des multiplicités pures vers la logique des relations, de l'événement vers le système de la cohésion des conséquences »[4]. Ce déplacement, qu'il dit « vers l'aval », est-il donc un retour ?

Tel est son excellent résumé de ce que réussit ce livre, comme mouvement, des multiplicités pures — soit pour lui les ensembles, vers les mondes phénoménaux — soit, pour lui, les relations structurantes ; ou bien, dirais-je un peu dif-

1 René Guitart, à l'adresse : http ://rene.guitart.pagesperso-orange.fr.

2 Alain Badiou, « Épilogue », in David Rabouin, Oliver Feltham et Lissa Lincoln (dirs.), *Autour de « Logiques des mondes » d'Alain Badiou*, Éditions des archives contemporaines, Paris 2011, p. 174.

3 Alain Badiou, *Logiques des mondes. L'Être et l'événement, 2*, Seuil, Paris 2006.

4 Alain Badiou, Épilogue, in *Autour de «Logiques des mondes » d'Alain Badiou*, p. 174.

féremment, un déplacement des ensembles aux structures, des ensembles aux catégories ou plutôt, plus spécifiquement, aux topos. On touche ici à un choix décisif : prendre les structures en sus des ensembles, comme structurations relationnelles d'ensembles, ou bien, en sens inverse, les ensembles comme supports invariants sous les structures. Qu'est-ce qui existe, qu'est-ce qui est ? Y a-t-il une substance sous la toile des phénomènes ? Et puis, suivant la réponse choisie, comment s'y pense l'infini, non pas comme théorie et connaissance, mais comme moteur du penser.

Cela dit, dans la **section 2**, j'expose donc, faisant valoir symboliquement le terme qui s'écrit : « intégrateur », soit un anagramme de mon nom propre : « René Guitart » — principe dont s'organisent d'une ligne mélodique distincte de celle de Badiou, les idées directrices de mon projet, avec la question de la dualité en fil conducteur pour l'étude de l'infini, au point d'articulation de l'Un et du Multiple.

Pour autant que l'« intégration » signifie la prise en charge organisatrice de la tension ou dualité entre les extrémités ou les contraires, soit, à la place du seul départ orienté de l'une vers l'autre ou bien de l'autre vers l'une, la prise en charge de l'éternel retour de l'un *et* l'autre. C'est que — soutiendrais-je — la mathématique tient son principe de déploiement de cette tension ou dialectique ; lequel principe on peut bien nommer l'*Infini*. Au-delà de la seule mesure en nombre ou en cardinaux, *l'infini est ce qui contrarie l'organisation des structures*, l'institue sans fin, se donne à calculer en structures encore et encore.

Pour Badiou, Parménide est crucial, lui qui — dit-il — fonda la philosophie en proposant le nœud des concepts d'être, de pensée, de non-être[5]. Eh bien dans la **section 3** je souligne la source historique qu'est son « élève » Zénon d'Élée, au point de fondation du souci mathématique, en nouant de ses paradoxes, l'énumération et la continuité, le dire et le voir ; et je poursuis jusqu'à la théorie de **2** dont s'écrira la logique classique — bien après l'invention par Parménide du raisonnement par l'absurde ; et, partant de là, s'aborde la dualité induite par cet objet **2**.

---

5 Alain Badiou, *Le Séminaire. Parménide. L'être 1 — Figure ontologique. 1985-1986*, Fayard, Paris 2014, p. 9.

Ce n'est pas que **2** représente les deux valeurs de vérité, le vrai et le faux, mais bien qu'autour de lui se développe la dualité que la mathématique interroge à l'infini entre le dénombrable et le continu.

Ainsi se fonde la mathématique, en dépit de la logique qui en est la corruption nécessaire (l'hygiène, dira André Weil). Le mathématicien au travail n'est ni parménidien ni héraclitéen, ni du parti du « même » ni de celui du « change », mais de la dialectique entre les deux : il met en scène la variation fonctionnelle entre les diverses structures invariantes. Par suite l'infini-du-mathématicien y réside.

Il ne faut pas confondre ce point avec quelque théorie mathématique *de* l'infini, notamment celle des infimes à la Leibniz ou des fluxions à la Newton, le calcul des ordres de contacts de courbes, etc., ni même celle des ensembles de Cantor. C'est justement parce que la mathématique s'empare de la question de l'infini par tous ces bouts, et à propos de toutes les dualités ou construction de structures libres, qu'il convient d'en nommer « structuralisme » la problématique ; bien entendu, on ne confondra pas ce structuralisme mathématicien, principe créatif, avec l'autre souvent mal venue, idéologie d'une prétendue mainmise des mathématiques en science humaine.

Badiou a bien la notion de l'importance, au niveau des cardinaux, de la construction du foncteur parties P, et notamment de l'excès qui s'y inscrit, de P(E) sur E. J'applaudis des deux mains. Mais à mon sens on peut aller plus loin, et dans la **section 4** j'introduis aux structures ensemblistes à ma façon, avec notamment la notion de supra-relation, en exhibant le rôle central du foncteur parties P, de la multiplicité des fonctorialités de la construction que je nomme construction des structures sur E et que j'écris St(E). Ainsi on voit la puissance de P au-delà de la question des cardinaux, pour le système beaucoup plus vaste de toutes les structures, lequel je veux prendre comme étant « l'infini en personne ».

Badiou est amateur de grands cardinaux, il examine leur hiérarchie, les théorèmes de Jensen et de Woodin, etc., vis-à-vis des concepts de l'infini et de l'absolu. Il développe une compréhension profonde, renouvelée du rapport entre cette théorie mathématique et les diverses théories pré-mathématiques de l'infini, donnant en effet une interprétation ontologique des axiomes de ZF, et il faut absolument le lire.

Bien. Mais pour moi aujourd'hui le souci est ailleurs, dans l'oubli du fait que les cardinaux et les ordinaux sont des structures ; des structures minimales, peut-être, mais des structures, et pour les définir, ensemblistement, il y faut la notion de succession, ou bien celle de fonction et de bijection. Et du reste leurs calculs et les théorèmes admirés sont bel et bien produits grâce à ces structures, précisément par constructions dans une catégorie d'ensembles associée à un « univers » ou modèle U de la théorie des ensembles. Mais ici Badiou suit une autre voie, parce qu'il veut considérer les ensembles comme substances qui exhibent les divers multiples, qu'il considère comme les formes d'être, et non pas comme constituant un monde phénoménal mis en scène comme catégorie voire comme topos, comme dans son livre *Logiques des mondes*. Ce qui lui permet de soutenir, peu ou prou, que la théorie des ensembles est l'ontologie, et par suite l'oblige à penser l'infini sous condition de cette visée ontologisante. Tandis que pour un mathématicien-au-travail, la pensée de l'infini est la constitution du travail mathématique, je veux dire la structuration, tournée vers les phénomènes qui ont lieu dans l'écriture des mathèmes.

De plus, il n'est pas évident du tout que les ensembles et cardinaux soient l'unique cadre minimal au sein de la structuration. La montée vers l'absolu par complétions successives de ZF est très particulière, de vouloir rester dans le registre de cette structure minimale de cardinal. Ce que j'appellerais « complétion cardinale ». On pourrait imaginer tout autre chose, à savoir de compléter ZF par des faits portant sur des structures plus immédiates et plus riches. L'important, pour le mathématicien au travail, reste le processus même de complétion d'une catégorie quelconque supposée donnée, même si ce processus reste descriptible en termes ensemblistes. La complétion cardinale ne vaut à être privilégiée comme « échelle » que si elle est universelle vis-à-vis de toutes les autres, ce qui est pour l'instant plausible, mais reste une question. C'est pourquoi compléter ZF, autrement dit ajouter des propriétés à la catégorie « basique » des ensembles sur un univers donné n'est pas inutile ; toutefois il n'est pas nécessaire de se limiter à la « complétion cardinale ». Notamment il faut s'efforcer de penser l'infini des structures plus largement, sans *a priori* le limiter à l'infini ensemblisto-cardinalistique.

De plus, je critiquerais aussi l'acceptation de l'axiome de fondation, quoique Badiou en fournisse une bonne motivation ontologisante, axiome qui ne sert guère en mathématiques en dehors de la théorie des ensembles. Cette acceptation conduit à soutenir pour les ensembles la métaphore « des sacs » et de leur emboitement indéfiniment linéaire, contre la métaphore des « graphes », et partant cela interdit l'accès aux hyper-ensembles, et en eux à l'infini de la récursivité immédiate que fournissent les boucles et circuits.

Ici donc, au regard de ces remarques, la **section 5** présente quelque éléments de ma notion d'*univers algébrique*, des années 1970, notion incluant comme cas particuliers d'une part les topos de Grothendieck *et* d'autre part les ensembles flous de Zadeh ; univers algébriques donc dans lesquels on peut faire les mathématiques, et cela en utilisant uniquement la « logique » induite par P et ses transformations et équations structurales. Ils sont constitués d'une axiomatisation de P sur une catégorie *a priori* quelconque.

On peut alors dans ce cadre retrouver les cardinaux comme sous-foncteurs de P — des structures très spéciales — ou ce que je nommais jadis des *bornes*, et par suite une théorie de l'infini en mouvement « descendant » depuis l'absolu donné par P.

Enfin, Badiou apprécie beaucoup le théorème de Löwenheim-Skolem, dont il indique qu'il l'a longtemps étudié.

Dans la **section 6** j'évoque la théorie des formes et celle des esquisses de Charles Ehresmann, qui permet de décrire les structures mathématiques en termes de recollements et co-recollements, et donc en se dispensant de la logique, donc de façon « géométrique ». Partant de là, le théorème du *diagramme localement libre* (DLL) que j'ai établi avec Christian Lair, puis plus tard une forme plus proche de celle d'algèbres de « termes oraculaires » avec Matthias Gerner, fournit un analogue de Löwenheim-Skolem, ou des algèbres de Lindenbaum, et le contrôle donc sur l'infini en construction dans les jeux très-généraux de termes et formules, et aussi bien les calculs récursifs par schéma de Herbrand.

J'ajoute enfin, sans cependant développer, que le foncteur Diag sur $\mathrm{Cat}_{\mathrm{U}}$ permet d'unifier les considérations de P et des DLL.

En conclusion, dans la **section 7**, s'affirme que j'ai bien commencé ici à re-déployer, sans recours *a priori* à la logique, une théorie double de l'infini, par deux de ses bouts, dont les variations dualistiques ont de nombreux noms :

fini/infini, discret/continu, parties/diagrammes, ensemble/structure, infime/infini, ensembles/catégories, ou bien encore algèbre/géométrie, univers/esquisse, etc. Soit, à la fin des fins, l'infini des dualités entre structures et leurs interactions géométriques, autrement dit l'infini comme organisation des gestes de la mathématique au creux de ces tensions, chacune comprenant à son tour un infini entre deux bouts.

Ce n'est qu'un début, mais déjà de nombreux problèmes y émergent, mathématiques et philosophiques.

2. But : Ensembles vs structures dans la question de l'infini

2.1 L'infini est un jeu

La conception de Badiou de l'infini, mathématiquement toute du côté « logico-ensembliste » substantiel, doit à mon sens être doublée du côté « géométrico-structural » fonctionnel, et de ces deux côtés les calculs d'ensembles et de structures doivent être tendus en une dualité.

Cela est nécessaire car c'est au départ de cette dualité, de cet ébranlement, que le mathématicien œuvre implicitement, expressément quand l'infini est en jeu. C'est que précisément l'infini n'est ni potentiel ni actuel — distinction illusoire qu'il faut dissoudre —, mais est un jeu, comme tout « objet mathématique », le jeu indéfini de la libre poursuite, du change pur. Une sorte de jeu initial dans le système de tous les jeux. Un jeu considéré comme un tout est actuel, mais il est aussi comme une potentialité, le système infini des parties ou mouvements qu'on y peut jouer. Tel est exemplairement tout *labyrinthe*.

Précisons. Il ne sert à rien pour la pensée active de se dire : soit ω le premier ensemble infini. Et alors ? Quid de ce nominalisme ? Comme dirait Badiou, de quoi ω est-il le nom ? Autrement dit quel geste s'y loge ? Il vaut mieux ajouter à cela sa construction comme bien ordonné, via $n \mapsto n + 1$ et la collecte de tous ces n, et puis, surtout, la poursuite de sa construction même, soit le passage

$$\omega \mapsto \omega + 1,$$

par quoi commence enfin la technique du calcul des infinis. Sans technique la pensée n'est rien qu'une sale manie, sans structure opératoire un ensemble n'est qu'un fétiche.

Redisons cela autrement. La définition des ensembles que donne Cantor reste difficile à penser, tant que le jeu de construction avec ces ensembles n'est pas acquis, tout comme celle des points et figures de l'espace s'éclaire quand on apprend à les transformer. Mais transformer un A en un B c'est, d'une façon particulière, structurer A, l'équiper de la faculté effective de devenir B. D'ailleurs, c'est en effet quand il introduit la notion de cardinal que Cantor innove vraiment, mettant en avant justement l'idée de bijection, soit de transformation A→B réversible, entre deux ensembles A et B, qui permet de décrire pour tout ensemble A son cardinal comme la superstructure constituée de toutes ces A→B réversibles.

On voit le mouvant, plutôt que l'immobile, de même que les yeux fermés l'on perçoit l'accélération et non pas la vitesse. Et dans l'entendement le changement est l'intuition première, quoiqu'indissociable du souvenir de ce qui change, du même. Il ne sert à rien de penser si ce n'est pour changer le monde. La première pensée serait celle de l'infini, du changement en personne. Ainsi la notion mathématique de fonction est-elle déjà implicitement une pensée de l'infini, de la poursuite et du changement. Partant, le calcul de la variation des fonctions exprime les formes de l'infini.

Assurément je ne dis pas que Badiou n'a pas ces notions, somme toute communes, et ne les utilise pas en sa pensée, en sa pensée de l'infini. Bien que l'arrêt sur les ensembles — arrêt explicitement sans en venir aux catégories — pour penser l'infini, fasse signe en sens contraire. Mais par exemple ce point où j'arrive, en préconisant la pensée de l'infini, *alias* la pensée du changement comme outil pour changer le monde, eh bien cela consonne certainement avec sa conception du sujet et de la vérité. La grande invention de Badiou, qui devrait demeurer et occuper les philosophes pour un bon moment, est bien alors ceci : *déterminer la vérité sous condition de l'infini*. Ce que je transmute en ceci : *déterminer l'exactitude sous condition de la structuration*.

Mais prenant le point de vue du mathématicien au travail, je dis que Badiou adhère trop à la croyance qu'il y a des ensembles, tout en sachant qu'il y a les relations, mais sans admettre la Relation au départ. C'est qu'il tient à marquer la différence entre sa conception et celle de Gilles Deleuze, Badiou du côté du Multiple et de ses formes astructurés *alias* les ensembles, Deleuze du côté de l'Un et de la Relation structurante. Si l'on simplifie, il choisit, au départ, l'infini discret ensembliste *à dire*, ou ça s'éparpille en éléments que l'on comptera transfiniment, contre l'infini continu, où précisément l'essentiel est la continuité qui, si on la pense *a posteriori* tient en un morceau les points d'un segment, lesquels points ne sont pas nécessaires *a priori*, où l'infini *est vu*, et *à écrire* comme l'infini des processus infinis de subdivision, par exemple la dichotomie.

Ce marquage du parti-pris ensembliste est remarquable, c'est un geste philosophique par lequel Badiou enseigne admirablement ce qu'est la construction philosophique ; il enseigne que le philosophe a pour tâche de décider dans des alternatives, par quel bout il va poursuivre, de quel sceau il va estampiller sa pensée en constitution. Et j'affirme qu'il en va de même pour le mathématicien qui, aux points de bifurcation, à l'atteinte des points d'impossible, doit choisir (ce que j'appelle la pulsation mathématique).

Ma proposition est de reconsidérer la notion d'infini, ni comme Badiou ni comme Deleuze — lesquels sont bien entendu tout-à-fait indispensables à mon entreprise, comme deux jambes sont demandées pour marcher — mais comme le jeu entre ensembles et relations, ou si vous voulez, pour m'adresser aux philosophes, entre Badiou et Deleuze. Parce que c'est là que je situe l'infini en tant qu'il constitue le réel des œuvres mathématiques depuis Zénon. L'infini en action : sinon, à quoi servirait-il en mathématique de le penser ?

À cet usage, il s'agira donc ici de simples scrupules techniques, néanmoins petits « cailloux philosophiques » dans les « choses sûres », dans la dialectique matérialiste d'Alain Badiou, à propos de l'infini uniquement, tel qu'il en traite très-remarquablement dans *L'immanence des vérités*[6], faisant suite à *L'Être et l'événement*[7], après un détour dans *Logiques des mondes*[8] par les catégories, ou

6 Alain Badiou, *L'immanence des vérités. L'Être et l'événement, 3*, Fayard, Paris 2018.
7 Alain Badiou, *L'Être et l'événement*, Seuil, Paris 1988.
8 Alain Badiou, *Logiques des mondes. L'Être et l'événement, 2.*

plutôt les topos, voire spécifiquement les topos de Ω-ensembles comme exposés dans *Topoï*[9].

Ces scrupules touchent à ce qui chez Badiou est emprunté aux mathématiques — à la théorie ZFC des ensembles principalement — pour déployer sa pensée, pensée donc de l'infini d'abord, en vue d'une ontologie faisant théorie de l'Être et des vérités. Je propose d'en re-former le matériau, à ma guise bien sûr.

2.1.1 De l'infini, côté compte

L'emprunt aux mathématiques fait souche chez Badiou de ce point platonicien : l'étude des mathématiques « nous montre, sans recourir aux évidences fallacieuses de l'expérience, qu'il existe des vérités »[10]. Ce dont l'on pourrait douter : pour moi, la mathématique montre à l'évidence qu'il existe des exactitudes, après quoi reste entière la question de penser ces exactitudes comme des vérités ; j'y reviendrai dans une autre occasion.

Mais par contre, c'est bien vrai, à mon sens, qu'avec la mathématique-qui-compte-dans-l'infini, on trouve *un* modelage rationnel de l'infinitude elle-même proprement infinie, et partant un modelage des vérités ou formes d'être, pour peu que l'on ait décidé de prendre comme axiome primordial que le sujet ne fréquente les vérités que dans ses jeux avec les infinis considérés comme poursuites ; ce qui me paraît être l'amorce méthodologique du système de Badiou.

Ainsi s'explique que, pour Badiou, l'événement majeur se nomme Georg Cantor, et son calcul des « ensembles », et qu'il s'agisse de lire l'infini dans son œuvre et ses suites. À ce point, avec Badiou, on devrait accepter ce qu'écrit Patrick Dehornoy : « La théorie des ensembles est l'exploration, à l'aide des outils des mathématiques, de la notion d'infini »[11]. Je dirais plutôt « une » exploration. Notamment, pour Dehornoy, la théorie ZF voire ZFC est une formalisation de notre intuition de l'infini, bien acceptée à une époque donnée — disons en 1960, mais cette axiomatique est (heureusement) incomplète, puisque Gödel et Cohen ont montré qu'elle ne suffit pas à décider ce qu'il en est de l'hypothèse du

---

9 Robert Goldblatt, *Topoï: The Categorical Analysis of Logic*, Elsevier, Amsterdam 1984.

10 Alain Badiou, *La République de Platon*, Fayard, Paris 2012..

11 Patrick Dehornoy, *La théorie des ensembles : introduction à une théorie de l'infini et des grands cardinaux*, Calvage et Mounet, Paris 2017, p. Vii.

continu HC. Il s'agit alors de découvrir comment la compléter progressivement : c'est là l'entreprise des grands cardinaux, qui permet, entre autres choses, d'en savoir plus sur HC, et sur ce qui se loge entre X et P(X). Si donc la théorie des ensembles est celle de l'infini, si l'infini est ce dont se tissent les vérités de l'Être, de sorte que les ensembles ou bien seulement les cardinaux, sont les formes d'être, alors en effet va de soi la formule de Badiou : l'ontologie c'est la théorie des ensembles. Ce qui n'interdit pas, y compris aux regards de Badiou, que ce slogan soit aussi non-vrai, dès lors qu'il ne vaut que comme propagande.

On peut proclamer plus, et Badiou s'y est laissé aller (puis s'en est départi) : l'ontologie c'est les mathématiques. Pour confirmer cela, il suffirait de savoir que les ensembles, à part la question de l'infini, joue un autre rôle, celui de coder tous les objets mathématiques : tout objet mathématique, toute structure, « est » un ensemble, s'autorise de son codage ensembliste que l'on prend donc pour son « nom ». Mais l'entité nommée **2** *est-elle* réellement l'ensemble {Ø,{Ø}} ... ?

En sus, ces codes permettent bien de penser « la Relation », et les structures l'exprimant, exhibant ces structures comme des ensembles *équipés* de données supplémentaires, également ensemblistes : les structures ainsi analytiquement saisies sont dites structures ensemblistes, et la pensée des structures est ainsi amputée de son caractère immédiatement synthétique et proprement relationnelle.

2.1.2 De l'infini, côté analyse, côté intuition : la forme objective

Mais le rôle fonctionnel des ensembles s'est avéré, directement, très peu dynamique, sauf à permettre, comme le remarque Borel, le développement de l'analyse fonctionnelle ; et *in fine* inadéquat à la pratique des mathématiciens, au-delà du fait de fournir une analytique suffisante pour définir précisément les objets mathématiques comme équipements d'ensembles, lesquels ensembles servent comme une sorte de fond ou support de travail. C'est pourquoi des axiomatiques propres à chaque région des mathématiques continuent à s'inventer, indépendamment *a priori* de la question des fondements, c'est-à-dire de leurs rapports à la théorie des ensembles en termes de modèles, quoique le langage ensembliste y soit utilisé. Tout comme le calcul des infiniment petits s'est inventé au XVII^e^ siècle. Ce n'est que dans un temps particulier — aux débuts du XX^e^ siècle — que, par la voie des ensembles et de leurs manipulations, l'on a pu spécifier les objets mathématiques comme structures ensemblistes. Mais, pour s'en servir et les étudier la seule idée du calcul des infinis n'est pas suffisante, il y faut celle de la transformation, de la comparaison et du calcul des changements ; ce que l'on peut aussi décrire (coder) dans le cadre ensembliste, certes, mais, et c'est le point, le codage fixé arbitrairement dissout l'intuition. Autrement dit, l'intuition est au départ de la structure, au point de sa perception d'un coup d'oeil synthétique, et plus on en précise un code ensembliste arbitraire, moins l'intuition suit. C'est le cas par exemple avec la modélisation numérique des segments et des points : il faut alors ré-ajouter la topologie ou la métrique, à son tour décrite de façon ensembliste, etc. Le drame est que cela est possible, ce qui fait oublier que cela, tel codage particulier, n'est pas en soi-même nécessaire au travail de l'intuition mathématique. L'intuition repose au contraire sur la multiplicité des codages et leurs changements, elle est la capacité à bouger les codages, soit encore donc l'enjeu de la pulsation mathématique. L'intuition de la structure, c'est bien, du côté des changements, une forme de présence de l'infini en action, toute différente de celle des cardinaux par lesquels s'exprime quelque chose de la stabilité du même.

Ainsi chaque structure engendre le système infini de ses présentations et elle est donc par elle-même, indépendamment de telle présentation ensembliste particulière, une forme d'infini, une forme d'être. De ce point de vue, un ensemble est simplement une structure minimale, dont la forme est essentiellement son cardinal, ou le système des bons ordres dont on peut l'équiper.

Le détour par les espaces fonctionnels puis par les catégories, permet aujourd'hui, prenant en charge l'infini de leurs codages arbitraires, un codage ensembliste naturel des structures, indépendant de leurs premières présentations arbitraires, rendant donc compte de leur formes objectives. C'est le sens du fameux lemme de Yoneda, que je rappelle maintenant sous une forme particulière.

Soit C une catégorie abstraite, et U un univers comprenant comme éléments tous les ensembles de la forme El(X), pour X un objet quelconque de C, avec

$$El(X) = \{f: Z \to X \; ; \; Z \in C, \; f \in C\}.$$

Les éléments f de l'ensemble El(X) seront dit « éléments » de X (relativement à C). Alors la catégorie C est isomorphe via El à une catégorie concrète K formées d'ensembles, à savoir les El(X), équipée entre ces ensembles de certaines applications ou fonctions (à savoir celles de la forme El(h) : El(X) → El(Y) : f → h.f, pour une flèche h : X → Y), soit une sous-catégorie K de la catégorie Ens_U formée de toutes les applications entre éléments de U. Du coup, l'objet X, considérée suivant sa forme, soit suivant sa relation aux autres objets de C, devient un simple ensemble, à savoir El(X), envisagé dans sa relation fonctionnelle aux autres ensembles de K, donnée par les fonctions de K. L'objet absolument abstrait X est donc maintenant vu comme un ensemble El(X) équipé d'un système de relations El(h) à d'autres ensembles, les El(Y).

On peut appliquer cela au cas où la catégorie C est une catégorie de structures ensemblistes (E, S), décrites comme modèles d'une théorie elle-même décrite en terme logico-ensemblistes, où donc la structure S est un équipement d'un ensemble E, codé de façon souvent arbitraire ; eh bien, en appliquant El, on redétermine la structure (E, S), comme un autre ensemble que E, à savoir El(E, S), qui, pour le coup, est naturel, et naturellement équipé de relations fonctionnelles à d'autres ensembles. On considère alors cette nouvelle présentation comme la forme « objective concrète » de la structure. Cette forme est en général infinie, même si E est fini, et c'est elle que vise l'intuition, tandis que l'analyse cherchera à engendrer cette forme à partir d'une donnée du type (E, S) éventuellement finie ou du moins simple et maniable, ou disons calculable. C'est cela que je désignerais comme la dualité analyse/intuition.

2.2 Enumérations vs présentations

Sans entrer dans les détails, il y a donc chez Badiou un parti-pris en faveur de la théorie des ensembles comme constituant, à la différence de l'arithmétique qui est une théorie du calcul *dans la finitude*, la théorie de l'infini actuel — au départ de N — et de son calcul interne en ordinaux et cardinaux. Ce qui s'avère convainquant si l'on regarde les développements au XXème siècle de la théorie des grands cardinaux, comme exposée notamment dans les traités de Akihiro Kanamori[12], de Thomas Jech[13], ou encore de Patrick Dehornoy[14]. Voir aussi le *Handbook of Set Theory*[15] et, en ces références, d'abondantes bibliographies.

12 Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite*, Springer, Berlin Heidelberg 1994, 2003.

13 Thomas Jech, *Set Theory*, Springer, Berlin Heidelberg 1997, 2003.

14 Dehornoy, *La théorie des ensembles : introduction à une théorie de l'infini et des grands cardinaux*.

15 Matt Foreman and Akihiro Kanamori (dirs.), *Handbook of Set Theory*, Springer, Berlin et Heidelberg 2010.

Mais toutefois, compter-dans-l'infini, aujourd'hui, cela peut se déployer autrement qu'au départ d'une montée dans le comptage ordinal, mais dans la formation générale des structures et relations, de l'analyse (descendante) de celles-ci, et surtout de leurs dualités constitutives. C'est pourquoi l'événement majeur, en quelque sorte dual de l'événement « Georg Cantor », se nommerait « Charles Sanders Peirce » et son calcul des « relatives » (alias les relations binaires). Quand bien même il s'agirait de relations ensemblistes. Le rapport entre les deux — montée et descente, construction et déconstruction — se tenant exactement dans la dualité qui laisse déterminer la notion de fonction comme un cas de relation, et une relation comme une fonction au niveau des ensembles de parties.

C'est, me paraît-il, au cœur de cette dualité, que l'on pourrait nommer énumération/présentation, et puis présentation/représentation, que gît le moteur de l'activité mathématicienne. La dualité est, grossièrement, réalisée dans le passage d'une catégorie C au topos des préfaisceaux sur celle-ci, ainsi que dans l'usage du lemme de Yoneda, et partant de la dualité associée, entre analyse et intuition, expliquée ci-dessus. Du coup, ce n'est pas du côté des topos seuls qu'il faut chercher à modéliser l'activité mathématique et, partant, le jeu général des phénomènes, mais bien avec les catégories plus générales que sont les *univers algébriques*, dont la logique n'est pas nécessairement intuitionniste, mais est cependant une logique dynamique, voire avec des catégories *a priori* quelconques. On y gagne, et c'est essentiel, de ne pas supposer de structure logique *a priori* sur-déterminée. Mais je reviendrai plus loin sur ces scrupules.
À mes yeux donc, il faudrait joindre à la théorie ensembliste la prise en compte des calculs relationnels et de la structuration sans fin *en tous sens*, pour notamment éviter de ne considérer que la montée en successions transfinies depuis le vide, d'où s'induit que les ensembles peuvent se soumettre à un principe de hiérarchisation, et, de plus pour éviter de confondre cette hiérarchie avec celle des cardinaux, et puis finalement pour éviter de « croire au compte », comme si cela, le comptage, faisait sens. C'est plutôt le geste de structuration libre, en tous sens *a priori*, qui fait sens.

Avec Patrick Dehornoy, il faut savoir que la définition des nombres à la Von Neumann par $n + 1 = n \cup \{n\}$ n'est qu'un *codage* du nombre $n + 1$, n'en déterminant *a priori* ni la substance, ni la fonction. De même, ajouterais-je, la construction de l'intervalle $[0,1]$ à partir de suites de 0 et de 1 qui codent les nombres réels, ne vaut que sous condition d'un théorème ou d'une définition validant la construction comme bonne représentation numérique du segment géométrique, voire du segment physique (et alors c'est une thèse). Cette analyse se substitue à un segment (AB(, produit l'oubli de sa nature originelle de grandeur étrangère au domaine des nombres, « résoud » cette étrangeté.

2.3 Logique en ontologie et en phénoménologie

Puisque, lui semble-t-il, Platon nous dit peu de choses sur ce qu'il entend par « vérité », du coup Alain Badiou s'autorise à relever ce terme de « vérité » pour pointer la pierre angulaire de son propre dispositif. Sans avoir à croire qu'il y a la Vérité, avec un V majuscule, il croit donc ou feint de croire qu'il y a *des* « vérités », que des vérités existent, sinon que des vérités soient ; du moins cette question est au centre de sa « dialectique matérialiste », où il procède à la détermination de ce qu'est en son sens une vérité — nonobstant l'histoire problématique de ce concept — et à son arrimage au concept de sujet. Le sujet est ici post-cartésien, ce n'est plus celui qui constate que la vérité est dans l'entendement comme évidence mathématique, ce qui constituait déjà un tournant dans la philosophie, mais le sujet maintenant, à un autre tournant peut-être, est celui qui pose la vérité comme ce dans quoi il s'engage, sous-entendant la militance volontariste comme déontologie nécessaire au bonheur. Du coup il n'est plus question de critère de vérité, mais d'affirmation d'événement, puisque les vérités sont définies comme certaines productions de sujets *en fidélité à des événements*, ou des séries risquées toujours inachevées — infinies donc — de telles productions, au regard de l'Être, ce dont traitera l'ontologie (qui peut ainsi se départir de la question des *vérités propositionnelles* sous condition de grammaires, tout en restant ce qui s'oppose à « l'appropriation abusive de l'écriture » par les sophistes). Cette possibilité nous renverrait à Martin Heidegger, à l'ouverture à de l'étant et à l'étant comme ce qui constitue le temps en événement. La vérité est dans l'étant *et* du *Dasein*, intentionnelle encore. Loin en tout cas du calcul propositionnel.

Pour Badiou, l'ontologie, le discours rationnel-en-vérités sur l'Être — et en même temps discours de l'Être — tendu entre la transcendance métaphysique de l'Être-en-tant-qu'Être et la dialectique de l'Être et du non-Être, affirmé comme discours proprement de l'Être lui-même, *l'ontologie* donc *« est » la théorie des ensembles*, car s'y développe les multiplicités pures en tant que les formes d'être. Badiou a choisi de penser l'alternative Être/non-Être au titre du Multiple pur plutôt que de l'Un, du multiple d'avant ou d'après la relation, non-contemporain à la relation dont cependant se constitue l'apparaître d'un étant.

Badiou a indiqué quelque part qu'à une époque il a beaucoup réfléchi au théorème de Lowenheim-Skolem, je l'ai déjà indiqué plus haut. C'est tout à fait clair quand on voit que, sous ce parti-pris sur l'ontologie, il révèle remarquablement la théorie des ensembles comme une théorie de l'infini, comme, pour lui, *la* théorie privilégiée de l'infini. Il y comprend le rôle de la finitude à dépasser, voire la sortie de toute figure figée de l'infini vers une autre, en l'espèce la notion de générique ; ce qui constitue véritablement un corps solide pour son concept de vérité, corps qui se tient sous la pensée de l'infini ascendant, au départ du vide, dans le régime d'une seule structure, celle de l'ordinal, de la succession et du supremum. Une vérité sera donc une production — soit à mon sens une structuration — infinie voire générique, au-delà donc de tout infinitude pointée en son monde.

Et partant, me semble-t-il, penser l'Être comme déploiement de la logique des vérités, c'est au premier chef penser l'infini et/ou la structuration. Au plan mathématique dans une vue substantialiste, l'infini et la structuration, c'est la mathématisation des mondes sur la base de la théorie des ensembles considérée comme théorie de l'infini, du biais des ordinaux et cardinaux.

Mais pour moi, l'infini éparpillement des seuls ensembles ne suffit pas à dire l'Être ou sa logique, il y faut la prolifération des structures enchevétrées. Au risque de confondre l'Être et le phénomènal, l'être d'un étant et son apparence ou encore son existence-en-son-monde. Et c'est à ce niveau que la question de l'infini doit s'inscrire.

Au plan mathématique d'une approche fonctionnelle, du biais des relations, l'infini et la structuration relève de la théorie des catégories, ou plus précisément de l'articulation entre théorie des ensembles et théorie des catégories.

Ici doit intervenir la question du cercle des raisons. Il y a la question des divers niveaux de rationalité, de leur emboitement circulaire, et de la situation dans ce cercle-des-raisons du discours rationnel-en-vérités sur l'Être. Il y a d'abord la rationalité suprême — ou prétendue telle — au nom de laquelle les discours rationnels s'autoriseraient, et s'autorise la rhétorique qui les avance, dans la langue, en paroles ; puis, la rationalité propre de chaque discours rationnel philosophique, par exemple du discours exposant le système philosophique de Badiou ; puis dans ce système la rationalité ou Grande Logique de l'ontologie, du discours réglant le fait de l'Être ; puis les raisons de distribuer, de là, la phénoménologie en des mondes d'apparaître ; puis, enfin, dans chaque monde d'apparaître, la logique interne mise en évidence au point de son transcendantal ; puis, en retour, dans le monde particulier des êtres-de-paroles, la logique de la parole, qui nous livre les principes des raisons suprêmes.

L'autoréférence inévitable du discours rationnel de la rationalité n'est pas prise en charge par Badiou, en raison de sa décision de couper court dans ce cercle, de ne pas accepter en son ontologie l'intrusion de la question de la langue, du tournant langagier, ni de la théorie de l'interprétation voire de l'herméneutique, ni le jeu de la Relation. Du coup, l'apparition des vérités n'est pas initialement présentable comme codages sous condition de modes d'écritures, ce qui laisserait saisir la forme d'être associée à une apparition comme ce qui, en dépit de la singularité d'un codage visible, est invariant ; puisque dès lors il n'y a pas lieu à relater, ou lieu de saisir un tel fonctionnement, les vérités n'ont de formes que purement substantielles, soit, si j'ose dire, de formes informes. Autrement dit, pour moi, la difficulté du système de Badiou est de ne pas prendre en charge la dialectique de la substance et de la fonction comme le noyau constitutif des apparitions, de leurs formes, et du fait que tel étant est, ni même du « il y a » cet étant, d'où procèderait sa forme.

Sans poursuivre sur ce dernier point, sur ce que j'y entends, je pose donc, en vue de penser l'articulation ontologico-phénoménologique, et plus tard son rapport à la question de l'infini, ce qui vient maintenant.

Il y a un modèle U d'un certain fragment de la théorie des ensembles (soit une collection d'ensembles formant, sous condition de ce fragment de la théorie, un « univers ») et, associé à ce modèle, la catégorie $\mathrm{Ens}_{\mathrm{U}}$ de toutes les applications possibles entre les ensembles éléments de cet univers. Cela déterminerait *une* ontologie $\mathrm{Ens}_{\mathrm{U}}$, relative à cet univers U, et l'ontologie serait alors la multiplicité de ces ontologies, quand U varie (qui sont éventuellement des topos, si U s'y prête), leur articulation. 215

Mais ce faisant ne nous éloignons-nous pas de la pensée de Badiou, chez qui la mise en scène ou modélisation en topos est affectée à la phénoménologie seule ? Je comprends que chez Badiou la modélisation elle-même reste une axiomatisation provisoire, sans lien avec quelque réel extérieur prétendu, ni *a fortiori* avec l'idéologie structuraliste à la Claude Lévi-Strauss, et du coup son usage des topos n'est pas « définitif », certes; mais alors pourquoi pas, provisoirement aussi, partir d'un modèle de la théorie des ensembles ?

La phénoménologie, au contraire de l'ontologie donc, ou théorie de l'apparaître des étants (discours sur l'être-là) « relève » (pour Badiou) de mondes relationnels qui se formuleraient en termes de catégories ou plutôt de topos, et tout précisément de ces topos d' Ω-ensembles (où Ω est alors une algèbre de Heyting constituant, pour Badiou, le « transcendental » déterminant la logique du monde nommé Ω-Ens), mondes en lesquels des vérités sont produites (sous condition donc de Ω), et où elles existent. Et partant, chaque étant, en sus de sa forme ensembliste, n'exige pour exister en son monde que sa spécification sous la seule condition de la détermination logique de ce monde, elle-même toute contenue dans son Ω : soit un schème minimaliste de l'apparaître, du relationnel, ou encore de la structuration. Du coup, la question d'une structure en sa saisie pleinement géométrique (comme « voir » avant tout codage ensembliste et langagier) et non pas logique, est implicitement écartée, ou du moins mise entre parenthèses, sous condition de sa reconstruction ultérieure sur fond, voire sur fondement, ensembliste.

Je poserai plutôt que l'apparaître relève de mondes représentés par des catégories *quelconques* C, et surtout pas nécessairement des topos, ce qui permet de considérer naturellement tout apparaître au titre d'une structure *quelconque* de relations, de *sa* structure proprement dite, *a priori* beaucoup plus riche que ce qui relève d'un transcendantal comme Ω. Alors, si des étants X et des vérités sont produits comme apparences dans C, leurs formes Φ(X), qui déterminent leur être en dépit de leurs apparences, sera délivrée par un foncteur de C vers un topos $\mathrm{Ens}_{\mathrm{U}}$, catégorie des applications associé à un univers U :

$$\Phi : \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{Ens}_{\mathrm{U}}.$$

Bien entendu, c'est là affaire de représentation immédiate, car on pourra, ensuite, considérer une complétion de C en un topos T[C], en un sens ou un autre, comme par exemple un topos $(\mathrm{Ens}_{\mathrm{V}})^{\mathrm{C^{op}}}$ de préfaisceaux sur C à valeurs dans un univers V, ou bien comme le topos classifiant de la théorie dont C est une catégorie de modèles, et déterminer Φ par son extension Φ^{-} à T[C] :

$$\Phi^{-}: T[C] \to Ens_U.$$

Et donc si $T[C] = (Ens_V)^{Cop}$, alors

$$\Phi^{-}: (Ens_V)^{Cop} \to Ens_U.$$

et si V = U, pour un X_0 objet de C, alors une possibilité pour Φ^{-} est $\Phi^{-} := eva(X_0)$. le foncteur évaluation en X_0 qui au préfaisceau F associe $eva(X_0)(F) = F(X_0)$, sa valeur en X_0.

Le point crucial est de ne pas spécifier *a priori* la logique interne envisagée pour C, mais au contraire de la découvrir par-dessus C, en construisant le classifiant des sous-objets de T[C], ou bien tout simplement en décrivant un système générateur complet des opérations fonctorielles sur C. À mon sens, la logique — si l'on tient à employer ce mot — n'est pas ce sur quoi C est développé, mais ce qui émane de C, et cela surtout si l'on veut entendre par là « le transcendental ». Je souligne : *la logique d'un monde en émane*, en raison de l'activité qui s'y passe, ce n'est pas ce sur quoi il repose.

Il y a, si nous poursuivons avec Badiou, des événements, aléatoires et radicalement incalculables, immanents à tel ou tel monde, germe en ce monde de sa propre modification future, qu'accomplirait alors la fidélité risquée d'un sujet « de » tel événement, en route vers l'advenir de sa vérité, comme direction ou point à l'infini, ou mieux, dirais-je (pour éviter de trop coller à la définition empiriste de William James de la vérité scientifique, ou l'idée de Charles Saunders Peirce de la vérité comme opinion ultime) comme proprement *ce* cheminement particulier sans fin immanent à son monde, voire comme ce chemin en son amorce déjà, comme son jet.

Les vérités tiennent à l'immanence de l'infini, en leurs mondes, dirais-je, me semble-t-il en accord avec Badiou, quoique leurs affirmations nécessaires ne soient possibles que dans la finitude inhérente à tout monde, de par la clôture qu'impose sa définition, dont elles nous engagent à sortir. On imaginerait qu'une vérité se reconnaît comme ce qui nous engage à dépasser notre finitude, en création.

Ces mondes de productions de vérités eux-mêmes ressortissent de quatre registres traditionnels qui sont : amour, art, science, politique, mondes d'où la philosophie se donne pour charge de relever et promouvoir les vérités, soit suivant l'expression de Badiou, d'en faire propagande.

Mais cette propagande n'aurait-elle pas un quasi-monde de l'ontologie pour lieu de départ de sa production ? Ou pour le dire autrement, en quel monde le philosophe, Badiou ou Platon, vit-il, existe-t-il ? Il est plaisant de voir ici le schème lacanien du *cartel*, « le principe d'une élaboration soutenue dans un petit groupe. Chacun d'eux se composera de trois personnes au moins, de cinq au plus, quatre est la juste mesure. Plus une chargée de la sélection, de la discussion et de l'issue à réserver au travail de chacun »[16]. Le philosophique serait ce « plus un » en sus des quatre registres.

Pour ma part, je dirais même que chaque philosophe est un « plus un » « générique » ou « quelconque », vis-à-vis de ces quatre registres de productions de vérités, et donc que l'on peut du coup considérer sa philosophie, et d'abord son ontologie, comme « faisant monde », et ensuite l'ontologie-en-général comme le jeu de ces mondes-là. S'introduit ainsi la relativité — bien entendu c'est le contraire du relativisme mou — la relativité philosophique comme en théorie einsteinienne, en théorie kleinienne, ou en théorie galoisienne : il y a un groupe ou un monde de base relativement auquel on travaille *sous condition de son équivoque constitutive*, en fidélité à tel événement, à tel philosophe. La philosophie est alors, objectivement, l'infini ou du moins l'inachèvement indéfini de l'articulation de ces mondes et de leurs impasses, le système infini des bévues, dont se conforte notre finitude. Si l'on tient à viser l'infini, à mon sens c'est par là, du côté des bévues inévitables dans l'articulation des structures qui tiendraient ensemble ontologie et phénoménologie.

2.4 Philosophie ou mathématique?

Dans les mondes particuliers de science des mathématiciens, l'événement, dans l'après-coup d'un théorème, se signifierait de la mise en fonction de nou-

[16] Jacques Lacan, «Acte de Fondation » (1964), repris dans *Autres écrits*, Seuil, Paris 2001.

velles définitions et de nouveaux objets, et la fidélité serait le cheminement contingent de là vers de nouvelles preuves, d'autres théorèmes nécessaires. Certes, les démonstrations logiques sont de tels cheminements, mais il en est d'autres modalités, dont ressortiraient plus directement les diverses espèces de structure. L'infini des espèces de structure, parallèle à l'infini des modalités de preuves, se trouve dissimulé du fait de ne retenir que la pertinence des cheminements logiques ; est mis sur la touche aussi le recours nécessaire à l'intuition fournie par le savoir-faire du mathématicien.

La mathématique (ou bien seulement, prise dans la mathématique, la théorie des ensembles), et partant l'infini, occupe donc deux places dans la philosophie de Badiou, ce qui fait deux cas qu'il faudrait croiser en une dualité constitutive. La première place est comme constituant axiomatique, quand il est dit que « l'ontologie est la théorie des ensembles ». Et la seconde est quand il est considéré, parmi les mondes où le dispositif badiousien nous dit que des vérités sont produites, tel ou tel monde mathématique, et là, éventuellement, le monde de la théorie des ensembles lui-même, ou bien le monde des divers modèles d'une théorie particulière comme ZF, voire le monde constitué d'un modèle particulier de ZF.

Partant on distinguera pour chaque théorème deux sens « en vérité ». D'une part il est une production de vérité dans un monde mathématique, par où ce monde se structure. Et d'autre part il est aussi un élément faisant sens vrai en ontologie, interprétable en celle-ci, c'est-à-dire dans la théorie de l'être au titre de la propagande pour les vérités.

Cette propagande n'est pas une « vérité en philosophie », puisqu'il est posé par Badiou, et par la plupart des philosophes, que des vérités, en philosophie il n'y en a pas ; et notamment, pour Badiou parce que la fabrique philosophique n'a pas de monde où la philosophie se produirait comme réseau de vérités. Mais cette propagande du moins constitue un modelage pour du dire philosophique ainsi assuré comme valide, par quoi le dire philosophique se structure, *in extremis* en quelque sorte.

Le philosophe peut donc ainsi emprunter aux mathématiques théoriques l'infinie ressource de leurs vérités (ou, pour mieux dire — d'une distinction à mes yeux essentielle — la ressource de leurs *structurations exactes*) pour en induire du philosophique, pour élaborer sa philosophie. Ce qui est comme l'envers du travail de commentaire philosophique des mathématiques que l'on appelle couramment la « philosophie des mathématiques », que Badiou récuserait, semble-t-il, puisque, pour lui, il n'y a pas de « philosophie de ». Position très défendable, qui oblige à de fines précautions pour s'engager très-librement dans le lieu que je crois naturel de la dualité mathématique/philosophie.

Il y a donc deux vérités pour un théorème. Dans le premier cas, il s'agit pour le philosophe de ce que sa philosophie « pense » de tel théorème, et s'autorise à en dire, dans le second cas il s'agit de ce que le théorème permet au philosophe de produire dans sa philosophie. On entreverra là une espèce de dualité ouverte entre mathématiques et philosophies, dont je ne sais si Badiou la soutiendrait, par laquelle en tous cas je trouve à étayer mon hypothèse que la mathématique est une partie de la philosophie, mais surtout ceci : il y a une double articulation entre philosophie et mathématique, et c'est sur cette articulation elle-même que la problématique ontologique se meut « créativement ». La vérité mathématique serait donc le mouvement même de création d'exactitude, plutôt que la valeur en logique mathématique des énonciations pointant ces exactitudes. C'est là, à mes yeux une figure de l'infini à penser, il faut y songer : ce qui se tisse indéfiniment entre axiomes mathématiques et concepts philosophiques, du point de l'infinité de leur potentialités.

Je ne veux pas discuter davantage maintenant du dispositif de Badiou, ni de sa raison d'être ni de sa constitution, ni de son usage, ni des détails des décisions et explications très motivées de Badiou, mais j'y viendrai un jour, cela me sera très utile, afin d'avancer tout autre chose, une théorie des vérités comme nouveautés créatrices, *créations libres contraintes*.

2.5 But : l'infini et les structures, dans l'entre-deux

Pour résumer l'idée, il faut, à mon sens, *penser l'infini* comme le principe au départ de la Dualité *entre ses deux bouts*, qui sont le rien et l'absolu, soit, en mathématiques d'aujourd'hui, depuis la tension (ou dialectique) entre la substance Ø et la fonction P, ou mieux sa version contravariante P*, redoublée en P*P*, ce que je note symboliquement Ø→P*P*. Par là j'entends qu'il s'agit de peupler cet intervalle, de sous-foncteurs de P*P* et notamment de sous-foncteurs du sous-foncteur P de P*P*, lesquels sont ce que j'appelle les bornes.

L'Infini « est » le peuplement à jamais illimité de cette tension — en construction et déconstruction — par les gestes ou structures mathématiques inventés ; chacun de ces gestes étant lui-même *in fine* la mise en action implicite d'une dualité spécifique — en quelque sorte locale — comme un repli sur soi de l'Infinitude ; par exemple celle de l'infiniment petit et de l'infiniment grand, et leurs calculs, et leurs dérivés comme le continu et le discret, l'espace et le nombre, etc.

On ne confondra pas cette vue avec, d'une part, le dualisme voire le relativisme, et, d'autre part, le structuralisme voire le formalisme (en philosophie, en anthropologie) ; on comprendra plutôt que s'y pratique la saisie *matérielle* — dans la pince arithmétique/géométrie, que je m'autorise à nommer simplement *algèbre* — des gestes mathématiques au point axiomatique de leurs infinitudes constitutives. L'axiomatisme consistant non pas à admettre quelques axiomes divins et puis à en tirer un discours, qui s'écoulerait comme vérité à suivre, mais, au contraire, à prôner comme moment inventif de pensée la proposition d'axiomes (ou pour mieux dire avec Euclide, de postulats).

Je commencerai en évoquant cet enjeu de dualité mathématique allée avec l'infini mathématique, au fil de l'histoire. Puis je montrerai que la question se laisse approfondir avec la théorie des univers algébriques et la théorie des esquisses, et là quelques propositions de mon cru. On verra, avec la notion de *borne* et celle de *diagramme localement libre*, comment l'infini se découvre en ces appareillages de façon purement diagrammatique, sans recours préalable à la logique. Ma proposition est de le penser de là.

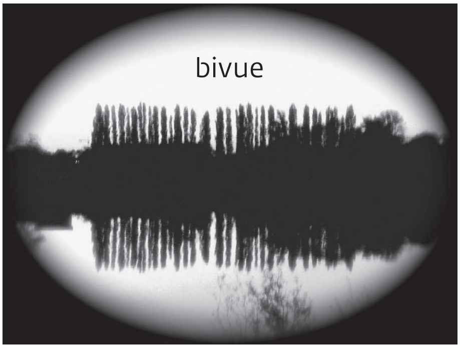
Ces éléments techniques sont cependant « cailloux philosophiques », pour un Petit Poucet rêveur — et non pas pierre philosophale — pour saisir l'infini mieux qu'en faisant l'impasse sur la géométrie, mieux qu'en œuvrant seulement de façon ascendante depuis le vide et sous condition de la seule logique, avec les seuls ensembles comme formes d'être. Avec le véritable Infini tissant le mathématique.

3. L'infini depuis Zénon, par deux bouts

3.1 Graphie de lumière et vue

Voici une photographie que j'ai faite d'une île dans la Loire près de Nantes, où des arbres se confondent en série dans un sol compact et connexe, et se reflètent dans l'eau, presqu'indistincts dans l'eau du ciel où ils se détachent.

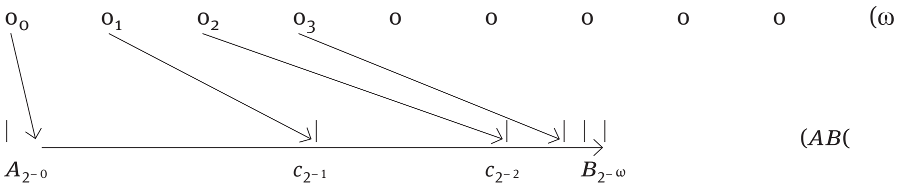
Le tout dans une ove valant comme œil ou point de vue, assuré par l'inscription de son nom : « bivue », forgé en écho de la « bévue » lacanienne.



S'y perçoit — dirais-je — une série dans un continuum, formant amorce d'un « dividuum »— pour reprendre l'heureux terme de Lou Andreas-Salomé à propos du monde mental de Nietzsche, voire de sa « méthode » —, et cela en double, dispositif que je nomme « bivue », de la dualité discret/continu.

3.2 Récit, schéma, formule

Et puis le schéma ci-après — que l'on peut extraire mentalement de l'image « bivue » — où, pour tout n, l'écart entre o_n et o_{n+1} est constant et vaut, disons, une unité 1, tandis que celui entre $c_{2^{-n}}$ et $c_{2^{-(n+1)}}$ vaut $2^{-(n+1)}$, et va donc en diminuant à chaque pas de moitié : 1/2, 1/4, etc., si bien que d'un côté il y a une somme discrète illimitée, car uniforme, tandis que de l'autre la sommation est bornée, du fait d'incorporer des éléments qui continument deviennent vite indéfiniment petits.



Avec la photo ou le schéma subséquent, il s'agit bien de dire ce que l'on voit, la tentative d'insertion du discret infini dans le continu infini, ces deux termes relevant le premier du fait du dire (« dire les chiffres » — expression qui en italien signifie « être fou »), le second du fait de voir (d'un « coup d'œil » — comme disait de ses diagrammes, en français dans son texte, John Venn). Si par le signe =>>> je signifie : « est égal ultimement à », la succession dans (ω(des temps 1 entre les chiffres, s'écrit :

$$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots =\ggg \omega$$

chaque somme partielle finie devient toujours plus grande que tout nombre fixé d'avance, et les nombres on n'en finit pas de les dire ; tandis que la succession des intervalles en lesquels (*AB*(, de longueur 1, est vu $Ac_{2^{-1}}$, $c_{2^{-1}}c_{2^{-2}}$, …, $c_{2^{-n}}, c_{2^{-(n+1)}}$, …, recouvrent (*AB*(les longueurs correspondantes donnant l'écriture :

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots + 1/2^n + \cdots =\ggg 1.$$

Pour chaque n on a $c_{2^{-n}} = 1 - 2^{-n}$. Et quoique ω ne figure jamais dans la ligne infinie discrète (ω(, sa « représentation » au niveau de (*AB*(, continu, se voit, c'est-à-dire le point $B = c_{2^{-\omega}} = 1 - 2^{-\omega} = 1$, avec donc l'écriture

$$2^{-\omega} = \frac{1}{2^{\omega}} = 0.$$

Autour de quoi s'arrangent les paradoxes de Zénon. Si l'on compte les étapes, évidemment il n'y en a pas de dernière, celle où enfin Achille atteindrait la tortue, et donc, jamais, à aucun instant, Achille ne la rattrape. Entre les deux bouts A et B, se trouve logé l'infini dénombrable des étapes marquées, avec toujours des trous. Quelques milliers d'années plus tard, Georg Cantor démontrera qu'en effet on ne peut couvrir toutes les positions possibles lors d'un compte, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de surjection de N sur (AB(.

3.3 Pour une histoire du 2

Cette dualité du discret et du continu est fondatrice de celle du comptage arithmétique (*dire*) des nombres, et de la découpe géométrique (*voir*) des grandeurs, de l'arithmétique et du géométrique, et partant, quand la littéralisation portera l'arithmétique, avant la géométrie, vers l'algèbre, fondatrice de la dualité entre l'arithmétique et la géométrie, et partant — de guingois en quelque sorte — entre l'algèbre elle-même et la géométrie.

Ainsi donc, après Descartes, la géométrie prenant l'algèbre à son service, la dualité trouve à s'exprimer de façon interne à l'algèbre ainsi engrossée. Maintenant, de nos jours, nous avons la dualité entre corpuscules et ondes, entre le transport et la force, les vecteurs et les covecteurs, les espaces vectoriels et les espaces duaux, etc. L'histoire des mathématiques — semble-t-il — est largement celle des métamorphoses de la dualité. Nous avons aussi la dualité entre les notions de groupes et d'espaces, subsumée par l'unification de ces notions en celle de topos par Alexandre Grothendieck, mise au travail par la topologie et la géométrie algébrique au XX[e] siècle. Ou encore l'accouplement de ces notions sous la forme de la notion d'espace fibré ou de groupoïde topologique, à la façon de Charles Ehresmann.

Un mode d'apparaître élémentaire de la dualité est la dualité dite de Boole, entre les algèbres de Boole (côté logique ou discours des raisons) et les espaces booléens (côté géométrie ou topologie, discours des lieux), et le fait que l'ensemble P(P(E)) dont chaque élément est une partie de l'ensemble des parties de l'ensemble E, est l'algèbre de Boole atomique complète associée à l'ensemble E. Du reste, cette dualité est intimement liée à celle ci-dessus actée par la notion de topos, puisque l'essentiel d'un topos est qu'au plan logique, il comporte un analogue de la construction P.

L'idée que j'ai proposée à partir de 1970 est de fonder le concept d'univers (autrement dit l'idée de lieu de déploiement d'une activité mathématique complète) sur la donnée axiomatique d'une dualité, de cette dualité de Boole spécialement, et plus spécialement encore sur ce qui l'engendre fonctionnellement, à savoir la dualité entre une catégorie d'ensemble Ens_U et la catégorie duale $\mathrm{Ens}^{op}{}_U$, déterminée concrètement par le cas du foncteur contravariant P* introduit par Georg Cantor, du moins sur les objets que sont les ensembles, en définissant P*(E) comme l'ensemble des parties de E ; foncteur dont il s'agissait

alors de déterminer une axiomatique, laquelle j'ai nommée d'abord *catégorie cantorienne* puis *univers algébrique*.

Le point crucial était que, sur une catégorie donnée l'axiomatique ne soit pas complète, au sens où la catégorie ne détermine pas uniquement le P covariant, ou le P* contravariant, mais soit complète au sens où l'opérateur P ou P* et ses transformations permettent de définir tout ce que la logique du premier ordre permet de définir, en quelque sorte « sous condition » de P*, dans la catégorie donnée. Il faut que la production des structures ensemblistes y soit répétable de façons variées. J'y reviens ci-après, mais pour l'instant, soulignons que, avec $\emptyset = 0$ et $\{\emptyset\} = 1$, on a la « construction » des entiers

$$\{\emptyset,\{\emptyset\}\} = \{0,1\} = 2,\ \{0,1,2\} = 3, \text{ etc.},\ n \cup \{n\} = n + 1.$$

On a aussi

$$P(E) = \mathbf{2}^{E},$$

soit l'ensemble des fonctions de E vers **2**, et alors un théorème de Cantor :

$$\mathbf{2}^{E} > E$$

La preuve logique montre que pour une fonction quelconque $f : E \to P(E)$, alors f n'est pas surjective, car il n'existe pas de u tel que $f(u) = D$, si on prend $D = \{x\ ;\ x \notin f(x)\}$: car alors on ne peut avoir ni $u \in D$ ni $u \notin D$.

On remarque aussi une preuve par récurrence dans le cas fini, que j'aime à donner en exemple : on a $2^0 = 1 > 0$, $2^1 = 2 > 1$, et, si $n > 0$, alors $2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + n > n + 1$. Ce qui est joli dans cette preuve, c'est qu'elle peut être étendue en une preuve de ce que pour tout k et pour N assez grand en fonction de k, on a, pour tout $n > N$, $2^n > n^k$. Je recommande vivement à celui qui veut bien saisir la première pensée de l'infini qui s'incarne dans le principe de récurrence, de s'essayer à bien en écrire une preuve.

En sus de l'argument diagonal, on observe, avec Cantor, que si l'on part d'une bijection $\mathbb{R} \simeq \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ supposée, alors on aura ceci :

L'ensemble $\mathbb{N}$ ne peut couvrir $\mathbb{R}$, ni couvrir (AB(ci-dessus.

Mais l'essentiel est ailleurs, dans la décision douteuse du privilège de l'idéologie analytique constructive (de bas en haut) — version noble du constructivisme finitiste —, qui prétend saisir le géométrique et les grandeurs au titre des nombres et de leurs constructions. Alors qu'il est tout-à-fait envisageable et sain de construire les nombres dans l'après-coup du donné géométrique, comme dans l'approche motivique moderne en tant qu'algèbre de la mise bout à bout des segments ; mais il est vrai qu'alors on est très près des vue aristotéliciennes.

Aussi faire apparaître l'impossibilité de couvrir R avec N est un cache-misère subtil, du fait de mettre au rang d'évidence la décision de construire un modèle numérique du segment, même si cela doit échouer, là où une approche axiomatique réussirait, ce dont le géomètre ne se privera pas. Aussi, que l'infini représenté par N soit irrésistiblement dépassé par celui de R ne fait sens qu'au titre d'une montée depuis le rien, ou à défaut depuis l'objet $\emptyset$, qui n'est déjà plus le rien ; sinon, que se passe-t-il dans la descente depuis l'absolu, ou le prétendu absolu, qui, à mes yeux est représentable par le foncteur P^* lui-même, ou bien P^*P^*, voire par la construction St des types de structures et le calcul des *supra-relations* ci-après ébauché ?

4. Ensembles, prédicats, parties, structures, supra-relations

Il y aurait donc, au départ des ouvrages mathématiques, d'abord des ensembles E, éléments d'un univers U (soit une collection d'ensembles stable par certaines constructions), des ensembles et de la logique mélés — ce dont fait preuve notre expérience pédagogique, d'avoir à enseigner l'un ou l'autre — par usage des prédicats *p* décrits en formules logiques elles-mêmes éléments d'ensembles de formules spécifiés — et par la formation de l'ensemble sélectionné par un prédicat p dans E :

$$\{x \in E \; ; \; p(x)\}.$$

Il y a aussi l'ensemble infini N des entiers naturels (donné par Dieu, paraît-il). Il y a, pour un ensemble E, le produit cartésien $E \times E$ et les opérations binaires $E \times E \to E$, telles celles de l'arithmétique + et $\times$ quand E est l'ensemble N des entiers naturels.

Et surtout on considère l'ensemble des parties de E, noté

$$P(E) = \{X \; ; \; X \subseteq E\},$$

qui permet de représenter une relation binaire $R \subset A \times B$ comme fonction quelconque (voir la Figure 1) :

$$R- : A \to P(B) : a \mapsto Ra = \{b \in B ; (a,b) \in R\},$$

voire comme une fonction sup-compatible de P(A) vers P(B) :

$$R- : P(A) \to P(B) : X \mapsto RX = \{b \in B;\ \exists a \in X\ (a,b) \in R\}.$$

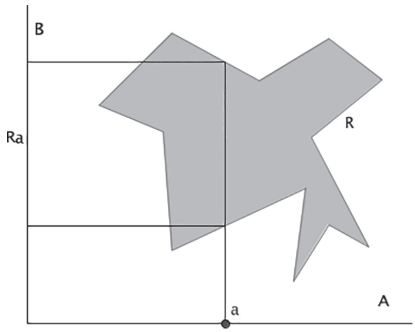


FIGURE 1 – La fonction R– : A → P(B) associée à une relation R.

Et puis il y a les *structures*. Sur un ensemble donné E on peut considérer une « structure » S de type donné s, spécifiée en terme d'opérations et de familles de parties, telles que les topologies, les ordres, les groupes etc., ce que l'on notera (E, S). Ainsi on pourra désigner par Top(E) l'ensemble des topologies sur E, Ord(E) l'ensemble des ordres sur E, Grp(E) l'ensemble des groupes sur E, et aussi par Ult(E) l'ensemble des ultrafiltres sur E, par $Upl_2(E)$ l'ensemble des couples ou 2-uplets de E, aussi noté E^2, $Upl_n(E)$ l'ensemble des n-uplets de E, aussi noté E^n, par $Rel_n(E)$ l'ensemble des relations n-aires sur E, soit les parties de $E^n = Upl_n(E)$, ce qui est $P(E^n) = P(Upl_n(E))$, par $Fon_n(E)$ l'ensemble des fonctions n-aires sur E à valeurs dans E, lesquelles par l'intermédiaires de leurs graphes s'identifient à certains éléments de $Rel_{n+1}(E)$, soit $Fon_n(E) \subset Rel_{n+1}(E)$, etc. Pour bien souligner le rôle crucial de P(E), voici quatre propositions nouvelles, quoique faciles, où l'on pose $P^{n+1}(E) = P(P^n(E))$. J'indique à partir de maintenant comme « Propositions » ce qu'il lui faut, sous couvert des notations et notions précédentes, essayer de démontrer ou vérifier par lui-même, ou, à défaut ce sur quoi il lui faudrait se renseigner, et qui sera utilisé ensuite.

Proposition 4.1.
1. Par $x \mapsto \{x\}$*, l'ensemble* E *s'identifie à une partie de* P(E)*, soit, abusivement*

$$E \subset P(E).$$

2. L'ensemble $\mathrm{Upl}_2(E) = E^2$ *des couples de E s'identifie à une partie de* $P^2(E)$*, soit, abusivement*

$$\mathrm{Upl}_2(E) \subset P^2(E),$$

par la construction des couples $(a, b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$.

3. Par récurrence on voit que, pour tout entier n*, on a :*

$$\mathrm{Upl}_{2^n}(E) \subset P^{2^n}(E).$$

4. Si $2^{n-1} < m \leq 2^n$*, alors l'ensemble* $\mathrm{Upl}_m(E)$ *des* m*-uplets de* E *s'identifie à une partie de* $\mathrm{Upl}_{2^n}(E)$, par $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1,\ldots,x_n,x_n,\ldots,x_n)$*, et partant à une partie de* $P^{2^n}(E)$*, soit*

$$\mathrm{Upl}_m(E) \subset P^{2^n}(E).$$

Proposition 4.2. *1. Les données respectivement d'une topologie ou d'un ultra-filtre, ou d'un ordre, ou d'un groupe, sur un ensemble* E *sont spécifiables comme un élément de, respectivement,* $P^2(E)$, $P^2(E)$, $P^3(E)$ *et* $P^5(E)$*, soit :*

$$\mathrm{Top}(E) \subset P^2(E), \quad \mathrm{Ult}(E) \subset P^2(E), \quad \mathrm{Ord}(E) \subset P^3(E), \quad \mathrm{Grp}(E) \subset P^5(E).$$

Proposition 4.3. *Une action fidèle* $\alpha : A \times E \to E$*, correspondante à l'application adjointe injective* $A \to E^E = \mathrm{Fon}_1(E) : a \mapsto (x \mapsto \alpha(a,x))$*, s'identifie à une application injective*

$$A \to P^3(E),$$

et donc l'ensemble Act-fid(E) *de toutes les actions fidèles sur* E *s'identifie à une partie de* $P^4(E)$ *:*

$$\text{Act-fid}(E) \subset P^4(E).$$

Ainsi, chaque « type de structure » usuel possible sur un ensemble E est un élément s(E) de l'un des ensembles $P^{n+1}(E)$, soit une partie de $P^n(E)$, ou bien une application de but un tel $P^n(E)$, et toute structure S de ce type s est un élément S de s(E) :

$$S \in s(E) \in P^{n+1}(E).$$

Du coup, dès que l'on dispose de P on peut, pour envisager ces structures, se dispenser de parler de logique et de formules logiques, il suffit de penser en terme de spécification par un s(E), sans savoir comment ce s(E) est lui-même déterminé analytiquement. Au demeurant, nombre de déterminations analytiques sont possibles autres que logiques, et notamment nous allons le préciser dans les univers algébriques.

On observera aussi que cette mise en scène — que je qualifierai de *supra-relationnelle*, nous allons tantôt voir pourquoi — unifie les structures topologiques et les structures algébriques, constituant une sorte de mini-version de l'unification que Grothendieck voit dans ses topos, qui comprennent aussi bien les groupes que les espaces, comme je l'ai indiqué plus haut. Miniversion, ou bien version internalisée au topos des ensembles. En tous cas, la dualité algèbre-géométrie s'y trouve comme mystérieusement dissoute. Mon idée est que c'est dans la production de telles dissolutions de dualités que la mathématique progresse, et que l'ontologie devrait viser ce qui est invariant dans le processus de telles dissolutions, dans l'installation de tels entre-deux.

Proposition 4.4. *En posant, pour tout ensemble* X,

$$\cup X = \{y \,;\, \exists x\, (y \in x \in X)\},$$

et puis en introduisant

$$St(E) = \cup\{P^n(E) \,;\, n \in N\} = \cup_{n\geq 0}P^n(E) = \{z \,;\, \exists n \geq 0,\, z \in P^n(E)\},$$

le monoïde $E^* = \cup_{n\geq 0}E^n$ *des mots sur l'alphabet* E *s'identifie à une partie de* St(E), *et si* $L \subset E^*$ *est un langage sur* E *on a :*

$$L \subset E^* \subset St(E),$$

et en particulier

$$\mathbb{N} = \{0\}^* \subset St(\{0\}) \subset St(\emptyset).$$

Alors un langage sur l'alphabet E *est une partie de* E*, *un élément donc de* P(E*) *et donc de* P(St(E)), *et une* transduction F → P(E*) *est alors une relation particulière de* F *vers* St(E), *une fonction* θ : F → P(St(E)).

Ainsi Badiou a-t-il tout à fait raison de mettre l'accent sur les deux constructions P(X) et ∪X, mais il pourrait améliorer l'économie de sa théorie en considérant ce que nous venons de mettre en évidence, le fait que le « composé » St = $\cup\{P^n ; n \in N\}$ contient comme parties les codages de toutes les structures utiles, et notamment de N — d'où le choix de la notation St comme l'initiale de « Structure » — puis en remplaçant l'analyse logique par l'usage axiomatique de P et ∪, et St, et des transformations naturelles structurales entre ces constructions, comme dans la théorie des univers algébriques.

On fait d'ailleurs d'une pierre deux coups, puisque les univers algébriques peuvent aussi être mis à la place des topos, et notamment des Ω–Ens. Toutefois l'accomplissement de cette mise en place demande de préciser les caractères fonctoriels de ces constructions, et partant la considération explicite des catégories d'ensembles et des catégories de structures ; ou bien, de façon équivalente, la détermination des compositions des relations A → P(B), hyper-relations A → P^2(B), transducteurs A →P(B*), voire des *supra-relations* de A vers B, soit les applications

$$A \to St(B).$$

On a évidemment

Proposition 4.5. *Pour tout entier* n, *la construction* P^n *est fonctorielle d'au moins* 2^n *façons, en associant, à toute suite* s *de* n *signes* +, *et* –, *telle par exemple*

$$s = + + - + - -$$

le foncteur donné, dans l'exemple, pour chaque fonction f par

$$P^s(f) = P(P(P^*(P(P^*(P^*(f)))))).$$

A fortiori il y a une infinité de fonctorialités sur St.
Mais c'est une autre histoire à venir, très au-delà aussi de la question des sémantiques et langages d'ordres supérieurs qui doit y être incorporée.

5. Univers algébriques et bornes

Pour avancer plus profondément dans l'analyse des structures telles que mises en scènes ci-avant, autour du foncteur P ou du foncteur P*, il faut, puisque je veux éliminer la présentation logique *a priori*, établir axiomatiquement une description alternative de la spécification. C'est ce qui est fourni avec la notion d'univers algébrique et de transformation structurale naturelle, dont voici quelques indications. J'en profite ensuite pour montrer comment l'infini des ordinaux et des cardinaux peut se récupérer dans ce contexte, avec notamment la notion de borne.

5.1 Univers algébriques

Si donc U est un univers et Ens_U la catégorie des applications entre ensembles éléments de U, on y dispose — c'est une supposition sur l'univers en question — de la construction P, dite « foncteur parties » covariant $P : Ens_U \to Ens_U$ qui à chaque ensemble X associe l'ensemble des parties de X, soit

$$P(X) = \{A;\ A \subseteq X\},$$

et à chaque fonction $f : X \to Y$ associe la fonction

$$P(f) : P(X) \to P(Y) : A \mapsto P(f)(A) = f(A) = \{y;\ \exists x \in A,\ f(x) = y\},$$

et on dispose aussi du « foncteur parties » contravariant $P^* : Ens_U{}^{op} \to Ens_U$ donné par

$$P^*(f) : P(Y) \to P(X) : B \mapsto P^*(f)(B) = f^{-1}(B) = \{x;\ f(x) \in B\}.$$

On dispose encore du foncteur produit cartésien à 2 variables

$$\times : Ens_U \times Ens_U \to Ens_U$$

qui à chaque paire d'ensembles (X,Y) associe $X \times Y$.

De plus nous avons quelques transformations génératrices spécifiées, qui sont les deux projections, la diagonale, l'atomisation, le couplage, la négation, la rencontre, l'inclusion :

$$\mathrm{pr_X}^{X,Y}\colon\ X \times Y \to X : (x,y) \mapsto x, \qquad \mathrm{pr_Y}^{X,Y}\colon\ X \times Y \to Y : (x,y) \mapsto y,$$
$$\delta_X : X \to X \times X : x \mapsto (x,x),$$
$$\alpha_X : X \to P(X) : x \mapsto \{x\},$$
$$\kappa_X : X \times X \to P^2(X) : (x,y) \mapsto \{\{x\}, \{\{x,y\}\},$$
$$\nu_X : P(X) \to P(X) : U \mapsto \{x; x \notin U\},$$
$$\psi_X : P(X) \to P^2(X) : U \mapsto \{V; U \cap V \neq \emptyset\}, \qquad \pi_X : P(X) \to P^2(X) : U \mapsto \{V; V \subset U\}.$$

Ces données satisfont entre elles un certain système d'équations, que nous ne détaillerons pas, qui en font ce que l'on appellera un *univers algébrique*. Les trois premières sont que le foncteur P^* est adjoint au foncteur $P^{*^{op}}$, c'est-àdire que l'on a une bijection naturelle des flèches $r : X \to P(Y)$ vers les flèches $s : Y \to P(X)$ déterminée par

$$s = P^*(r).\psi_X.\alpha_X \ ;$$

puis que ψ détermine P comme sous-foncteur du foncteur $P^{*^{op}}P^* =: \prod$; et puis que pour tout $f : X \to Y$, $P(f)$ est adjoint à gauche à $P^*(f)$, pour la structure qui dans le cas ensembliste est la structure d'ordre complet libre sur X de chaque P(X), déduite des transformations génératrices spécifiées.

Étant donné un *univers algébrique* quelconque, soit une catégorie C équipée de foncteurs et transformations encore notés (abusivement) comme dans le cas ensembliste ci-avant, en composant entre eux ces foncteurs sur C qui sont donc P,

P^*, etc., et les transformations spécifiées π, ψ, etc., on atteint ce que l'on appelle les foncteurs types T, T', etc., et et les transformations naturelles types $t : T \to T'$, et, entre eux, les équations structurales ($t : T \to T'$, $t' : T \to T'$), et puis les *foncteurs structuraux* de la forme de noyaux

$$s = \ker(t, t') = [t = t'].$$

Alors, dans le cas ensembliste, une s-structure sur un ensemble X est un « élément » de s(X). Les structures ainsi spécifiées sont donc équationnelles sur l'univers.

Proposition 5.1. *1. En sus de l'exemple initial de* Ens_U *avec* P *etc., indiqué ci-avant, nous avons en fait une structure d'univers algébrique sur tout topos élémentaire, avec*

$$P^*(X) = \Omega^X.$$

2. Si A *est un monoïde abélien complet dans* Ens_U, *ou bien dans un topos élémentaire, alors on détermine une structure d'univers algébrique, avec*

$$P(X) = A^X.$$

Cela vaut en particulier avec A *une algèbre de Heyting.*

Proposition 5.2. *Les structures du premier ordre, et les topologies aussi, les structures uniformes, sont équationnelles sur l'univers algébrique ensembliste* Ens_U, *et sont donc spécifiables dans tout univers algébrique, tel ceux indiqués dans la proposition 5.1.*

Proposition 5.3. *Les univers algébriques viennent de l'examen des travaux de topologues, tels Ernest Michael et Gustave Choquet, dans les années 1950, qui équipaient l'ensemble des fermés d'un espace topologique de topologies, pour développer la théorie des relations continues. En sus, on peut développer la théorie des espaces topologiques internes à un univers algébrique, en posant, pour toute hyper-relation ou fonction spécifiant les « voisinages »* $v : X \to P^2(X)$,

$$O_X = \psi_{P(X)}\pi_X, \qquad F_X = \pi_{P(X)}\psi_X,$$

$$I_v = P^*(v)O_X, \qquad A_v = P^*(v)F_X,$$

ce qui définit l'intérieur et l'adhérence associées à v, *comme modalités de* nécessité *et de* possibilité *associées à cette fonction de voisinage.*

5.2 Bornes et opérations logiques

Dans un univers algébrique, on appelle *borne* un sous-foncteur strict B de P contenant ∅, soit tel que

$$\emptyset \subseteq B \subset P,$$

et cela revient à la donnée d'une transformation naturelle de P vers P^2. Une borne est *régulière* si c'est une sous-monade de la monade P. Une transformation naturelle de P vers P^{*2} est appelée *opération logique binaire*.

Proposition 5.4. *Dans le cadre ensembliste les* opérations logiques binaires, *au sens ci-dessus, correspondent en effet aux connecteurs logiques binaires, soit les fonctions binaires* $\mathbf{2} \times \mathbf{2} \to \mathbf{2}$. *Et les* bornes B *telles que* $B(\emptyset) = \emptyset$ *sont de la forme* B_β pour β un cardinal fixé *:*

$$B_\beta(X) = \{A \subset X;\ \mathrm{card}(A) \leq \beta\},$$

De plus B *est régulière si et seulement si* β *est un cardinal régulier. Ainsi tant la logique connective que le calcul des cardinaux sont déterminables « par en haut »,* à partir *de la seule donnée d'univers algébrique, et basiquement du foncteur* P^*
.

6. Formes, présentations, esquisses

6.1 Formes et co-formes

Prenons l'exemple de la forme d'un carré montrée dans la Figure 2. Le carré, à droite dans la figure, est constitué d'instructions de placements u, v, etc., depuis un site contenant les différentes pièces à assembler, les coins et les côtés, dans le grand rectangle à bords arrondis à gauche, avec, entre ces pièces des relations de cohésion h, g, etc. Le carré est vu comme le recollement ainsi spécifié de ses morceaux.

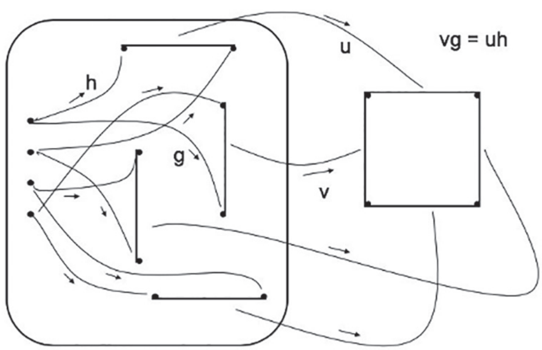


FIGURE 2 – La forme d'un carré

Plus généralement, la *forme* d'un objet X d'une catégorie C sera décrite suivant la Figure 3, par un foncteur φ/X : C/X → C :

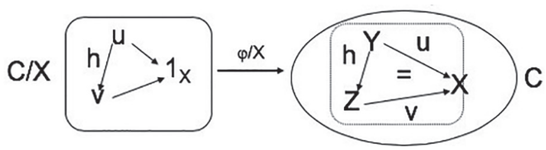


FIGURE 3 – Le foncteur φ/X, forme d'un objet X d'une catégorie C

La catégorie C/X a pour objets les flèches u : Y → X de but X, de source variable Y, et un morphisme h de u vers v : Z → X consiste en une flèche h : Y → Z telle que v.h = u; le foncteur φ/X associe Y à u, et h à h.

Nous avons, évidemment — c'est la substance du lemme de Yoneda — la récupération de l'objet X comme limite *inductive* de sa forme :

$$\mathrm{colim}(\varphi/X) = X.$$

Et puis, nous avons la notion de J-*forme* d'un objet X, ou forme relative à un foncteur J : D → C, suivant la Figure 4. La J-forme de X est le foncteur $\varphi_J/X := \varphi/X.J/X = J.J^*(\varphi/X) : D/X \to C$, où D/X a pour objet un couple (Y',u) d'un objet Y' de D et d'une flèche u : J(Y')=Y → X, et pour morphisme de (Y',u) vers (Z',v) une flèche h : Y' → Z' telle que v.J(h) = u. Autrement dit, D/X est le produit fibré de φ/X et de J.

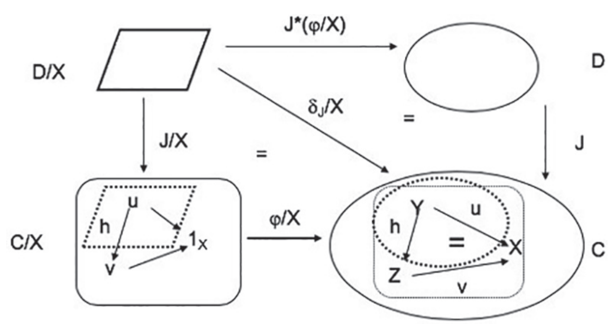


FIGURE 4 – La J-forme δ_J/X de X objet de C, pour J : D → C

Une *présentation* d'un objet X de C est un foncteur p : W → C tel que la limite inductive ou colimite de p soit isomorphe à X, c'est-à-dire que X s'obtienne en recollant les données de W suivant p, soit colim p ≃ X. Si donc on considère en guise de p le foncteur $\delta_J/X : D/X \to C$, il est, par définition, une présentation de $\lim(\delta_J/X)$ que l'on notera brièvement X_J, et l'on a un morphisme de comparaison $X_J \to X$, qui est un isomorphisme précisément si δ_J/X est une présentation de X, si X se retrouve en recollant sa J-forme.

Nous avons aussi la notion duale de *co-forme*, liée alors aux limites *projectives*, ce qui est la forme de X en tant qu'objet de la catégorie duale C^{op}, et, donc les *co-présentations* ou foncteur q : V → C tel que la limite projective de q soit isomorphe à X, c'est-à-dire que X s'obtienne en co-recollant les données de V suivant q, soit lim q ≃ X.

6.2 Esquisses, modélisation par formes, sans logique

Toute théorie peut se spécifier par la donnée de contraintes de formes et de co-formes, c'est-à-dire par une catégorie T sur laquelle des contraintes de formes et co-formes virtuelles sont spécifiées.

Une contrainte de forme sur T est un foncteur B : I → T avec un cône inductif δ : B → S, soit, pour tout I ∈ I une flèche $\delta_I : B(I) \to S$ telle que, pour tout v : I → J on ait $\delta_J.B(v) = \delta_I$. Une réalisation dans une catégorie E d'une contrainte (B, δ) sur T est un foncteur R : T → E tel que δ induise un isomorphisme

$$\mathrm{colim}(RB) = RS$$

236 On définit de même une contrainte de co-forme, soit un foncteur B : I → T avec un cône projectif γ : P → B, avec les conditions $\gamma_J = B(v).\gamma_I$, une réalisation étant un R tel que γ induise un isomorphisme

$$RP = \lim(RB).$$

Un univers de référence U étant fixé, on appelle U-*esquisse* ou simplement *esquisse* la donnée d'un triplet σ = (T, P, I) où T est une catégorie petite (appartenant à l'univers U), P un ensemble petit de contraintes petites de coformes (projectives), I un ensemble petit de contraintes petites de formes (inductives). Une *réalisation* ou *modèle* de σ dans E est un foncteur R : T → E réalisant les contraintes de P et de I. On appelle catégorie des modèles de σ relative à l'univers U la catégories des transformations naturelles entre les réalisations de σ dans $E = \mathrm{Ens}_U$, on la note $\mathrm{Mod}_U(\sigma)$ ou $\mathrm{Ens}_U{}^{\sigma}$. Une catégorie C est *esquissable* par σ si $C = \mathrm{Mod}_U(\sigma)$.

Proposition 6.1. *Toute catégorie de modèle d'une théorie du premier ordre est* esquissable, *c'est-à-dire spécifiable sans logique, par une esquisse indiquant des contraintes de forme et de co-forme. Ainsi sont les groupes, les anneaux, les corps, les faisceaux sur un site, les objets borroméens, etc.*

6.3 Diagramme localement libre, groupoïde d'ambiguïté

Considérons un foncteur esquissable

$$M : \mathrm{Mod}_U(\sigma) \to \mathrm{Mod}_U(\tau),$$

soit un foncteur induit par composition avec $m : \tau \to \sigma$, un morphisme d'esquisse, en associant à tout R le composé $M(R) = Rm$.

Si σ et τ ne comportent pas de contrainte inductive (de forme), mais seulement des contraintes projectives (de co-forme), alors il existe un foncteur adjoint à gauche à M, noté

$$L : \mathrm{Mod}_U(\sigma) \to \mathrm{Mod}_U(\tau),$$

déterminant donc chaque L(X) comme *objet libre* sur X, relativement à U, c'est-à-dire tel que pour tout Y on ait une bijection naturelle entre l'ensemble Hom(LX,Y) et l'ensemble Hom(X,MY) :

$$\mathrm{Hom}(LX,Y) \simeq \mathrm{Hom}(X,MY).$$

On obtient ainsi, comme exemples de structures libres, le monoïde libre E^* sur un ensemble E, les groupes libres, les algèbres de Lindenbaum, le faisceau associé à un faisceau, les limites ou colimites d'un foncteur, etc.

Voici un exemple, du côté de l'arithmétique élémentaire.

Proposition 6.2. *Dans le cas des structures libres, il faut souligner la dualité de l'engendrement et du co-engendrement, et le rôle de l'infini en cette affaire, comme on peut l'exhiber par exemple pour l'arithmétique et le pgcd comme suit.*

Si $\{a,b\}$ *est une partie à 2 éléments du groupe additif* $\mathbb{Z}$ *des entiers relatifs, alors il y a un sous-groupe* $\mathrm{Gen}(\{a,b\})$ *de* $\mathbb{Z}$ *engendré par* $\{a, b\}$, *que l'on atteint de deux façons :*

— de bas en haut par élaboration de termes

$$\mathrm{Gen}(\{a,b\}) = \{a,b\} \cup \{a,b\}_2 \cup \{a,b\}_3 \ldots = \cup_n \{a,b\}_n,$$

où $\{a,b\}_{n+1}$ *est l'union de tous les composés et opposés dans* $\mathbb{Z}$ *d'éléments de* $\{a,b\}_n$
— de haut en bas, par conditionnements cumulés, comme intersection des sous-groupes S *de* $\mathbb{Z}$ *contenant* $\{a,b\}$ *:*

$$\mathrm{coGen}(\{a,b\}) = \cap_{\{a,b\}\subset S\subset \mathbb{Z}}\, S.$$

On a alors

$$\mathrm{Gen}(\{a,b\}) = \mathrm{coGen}(\{a,b\}).$$

Les deux procédés sont en un sens duaux, d'économies opposées. Le deuxième concrètement ne donne qu'une existence de principe, le premier une construction formelle *dans* Z. Beaucoup de théorèmes en mathématiques consistent d'abord à avoir l'existence, puis la construction formelle dans quelque chose (ici dans Z), puis, surtout, une réduction de cette construction.

Ici la réduction bien connue de $\mathrm{Gen}(\{a,b\})$ à $\mathrm{Gen}(\{a\wedge b\}) = \mathrm{Gen}\{d\}$ vient de ce que en calculant le pgcd $d = a\wedge b$ de a et b, on a, par le théorème de Bézout, un u et un v tels que $ua + vb = d$, et l'application bijective

$$[u,v] : \mathrm{Gen}(\{a\wedge b\}) \to \mathrm{Gen}(\{a,b\}) : md \mapsto mua + mvb =: [u,v](md).$$

On doit comprendre cette réduction, soit la bijectivité de [u,v], comme un principe de *ré-écriture* : dans Z, ce qui s'écrit avec a et b se réécrit avec d.

$$\mathrm{Gen}(\{a,b\}) \to \mathrm{Gen}\{d\}.$$

Au passage, on aura implicitement utilisé la construction absolument formelle, *hors* de Z, d'un *groupe abélien libre* engendré par a et b, soit — en désignant, pour une lettre u, par $L(u) \simeq Z$ le groupe abélien libre engendré par u — le groupe

$$L(\{a,b\}) \simeq L(a) \oplus L(b) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

avec l'application et le morphisme

$$\{a,b\} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \mapsto (1,0);\ b \mapsto (0,1),$$
$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : (x,y) \mapsto x + y.$$

On observera que l'infini (éventuel et potentiel) des S, et des n dans les $\{a,b\}_n$ et l'infini (assuré et actuel) de $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, en tant que $L(a)\oplus L(b)$ sont entrés en jeu implicitement, si bien que pour toutes ces constructions l'infini est présent, aux deux bouts de la dualité, et dans la construction, qui la surplombe (et la dirige), des structures libres.

Proposition 6.3. *Si* σ *et* τ *sont des* U-*esquisses qui comportent aussi bien des contraintes inductives et des contraintes projectives, et si* $m : \tau \to \sigma$ *est un morphisme déterminant le foncteur* $M : \mathrm{Mod}_U(\sigma) \to \mathrm{Mod}_U(\tau)$*, alors un adjoint* L *n'existe plus nécessairement. Toutefois il existe encore, pour tout* X *objet de* $\mathrm{Mod}_U(\tau)$*, non plus un objet* L(X) *mais un* diagramme localement libre *associé à* X*,* petit — *c'est-à-dire tel que* Δ(X) *appartienne à l'univers* U *:*

$$L(X) : \Delta(X) \to \mathrm{Mod}_U(\sigma),$$

satisfaisant naturellement en Y *à :*

$$\mathrm{colim}_{I\in\Delta(X)}\mathrm{Hom}(L(X)(I),Y) \simeq \mathrm{Hom}(X,MY).$$

Si, de plus, on procède à l'inversion de tous les éléments de Δ(X)*, on obtient un groupoïde* $\mathrm{Amb}_M(X)$ *que l'on appelle* groupoïde d'ambiguïté *de* X *relativement à* M*, mesurant l'équivocité dans les possibilités de relèvement universel en objet à la source de* M *pour l'objet* X *de son but.*

Cette proposition 6.3 admet une preuve utilisant le fait que U soit un univers, et dans cet univers les ordinaux et une construction par récurrence transfinie dont on montre qu'elle s'arrête, sous la condition qu'il existe un cardinal régulier majorant les cardinaux des catégories indexant les cônes projectifs et inductifs de τ. Mais une fois la preuve faite, avec donc ses outils ensemblistes, on peut décider d'oublier la logique et les ensembles, et repartir de la donnée de ce théorème comme propriété fondamentale de la catégorie des esquisses. On peut comprendre alors ce théorème comme une version catégoricienne de Lowenheim-Skolem, pierre de touche du recours à la limitation des infinis dans les constructions mathématiques générales. Comme exemples, en sus des structures libres, nous avons les constructions des groupes de Galois, les constructions des spectres, des catégories des points de topos classifiants, le calcul d'algorithmes par schémas de Herbrand.

Et puis, ce théorème et la notion d'esquisse d'une part, et la théorie du foncteur partie et des structures en celui-ci d'autre part, s'unifient au titre de la construction pour toute catégorie C localement petite de la catégorie localement petite Diag(C) des petits diagrammes $D : A \to C$, où donc A est une petite catégorie, et un morphisme de D vers D' étant un couple (F,f) d'un foncteur $F : A \to A'$ et d'une transformation naturelle $f : D \to D'.F$.

En effet on a deux choses : D'une part $D \mapsto L$, si un diagramme D a une limite inductive L, est une opération partielle de Diag(C) vers C, etc. Et d'autre part, si C est une catégorie discrète soit un ensemble E, alors Diag(C) = P(E).

Mais c'est une autre histoire, à reprendre, avec la théorie des machines et automates que j'exposais jadis autour de Diag.

7. Vers l'infini diagrammatique, sans logique, par deux bouts

Au départ de la théorie des ensembles et des structures ensemblistes, deux points essentiels sont en un certain sens duaux : d'un côté la construction P et le *théorème de Cantor*, et de l'autre l'*algèbre de Lindebaum* et le *théorème de Lowenheim-Skolem*.

Les deux peuvent être axiomatisés, dans un cadre catégorique fonctionnel, voire relationnel, mettant ainsi au second plan la donnée ensembliste soi-disant fondatrice. Cela donne d'un côté la notion d'univers algébrique et une construction axiomatique équationnelle de tous les types de structures ; et, de l'autre côté, le théorème du diagramme localement libre DLL, et un processus général de développement de tous les modèles libres de tous les types, algébriques ou non, décrit géométriquement par esquisses ou contraintes de formes.

Dans les univers algébriques, on peut se dispenser et de logique et d'ordinaux, puisque ces données se retrouvent après-coup, à partir de la donnée de P, avec la notion toute simple de borne, en quelque sorte en « descendant » depuis P : l'infini descend de P, dans la spécification de ses sous-foncteurs, les bornes.

Avec les formes et les esquisses, le théorème du diagramme localement libre DLL donne une construction et un contrôle de l'infinitude de la taille des structures librement ou localement librement engendrées, en partant donc de l'analyse « formative » ou présentation par forme, seule, sans logique encore. L'infini en jeu monte de la donnée génératrice par découpes et collages de ses pièces, jusqu'à son point de stabilisation dans le diagramme localement libre.

Dans la présentation et l'analyse des structures, l'infini s'atteindra donc par deux bouts ainsi duaux, le côté univers algébriques et le côté esquisses : chez l'un plutôt en descendant, à partir de P*, chez l'autre plutôt en montant à partir de ∅. De plus chacun des deux bouts est lui-même au départ d'une dualité : l'auto-dualité de P*, pour les univers algébriques, la dualité entre le jeu des formes et celui des co-formes, pour les esquisses, côté DLL.

On peut alors rêver aux « analogues diagrammatiques » des cardinaux, si, à l'instar de ce qui se passe avec P, on veut les identifier à des bornes diagrammatiques, à savoir à des sous-foncteurs de Diag. Un bel objet de ce type est le sous-foncteur Exa de Diag tel que Exa(X) soit le sous-ensemble de Diag(X) constitué des extensions de Kan absolues au-dessus de X.

Partant il y a le projet d'alors re-penser l'infini à partir de Diag construit sur Cat_U, au lieu de P sur Ens_U. Question aussi d'axiomatiser ce Diag — dont j'ai déjà donné la propriété universelle qui étend celle de P — l'axiomatiser comme les univers algébriques axiomatisent P, en le lisant comme un grand-transcendantal (au sens de Badiou pour ce terme) qui, en plus de la logique, « délivre » toute la théorie de l'infini, comme P donne les cardinaux et les opérations logiques ; mais de plus, Diag « délivrera » les principes de constructions par extensions, comme le Diagramme Localement Libre. On est donc à la recherche de l'*infini diagrammatique*.

8. Conclusion : Des cardinaux aux structures

Pour conclure, voici à propos de l'infini la position que je soutiendrais, lisible dans sa différence ou son rapprochement avec celle d'Alain Badiou que j'ai marqués au long du parcours ouvert ci-avant.

La pensée de l'infini n'est pas une pensée de l'ontologie *a priori*, mais une pensée du travail mathématique, au niveau phénoménal de production de ce travail. Ce travail consiste à inventer les formations de l'infini dans la tension entre voir et dire ce que l'on voit ; et ce que l'on voit en mathématiques, ce sont des structures, ou, c'est pareil, les théories.

Les ensembles sont utiles pour décrire les structures, et à ce titre sont des entités idéales ou idéalités en théorie des structures, comme les nombres imaginaires en algèbre, les points à l'infini en géométrie, etc., sur la base desquelles on sait, par descriptions prédicatives, construire des codages d'autres ensembles et des structures.

Mais en fait les structures sont premières, ce sont les phénomènes que l'intuition mathématique entrevoit synthétiquement et leur saisie ensembliste les déconstruit. Il faut donc penser le travail mathématique, et notamment penser l'infini, dans l'alternative ou dialectique entre ensembles et structures. Techniquement parlant, si l'on prend les ensembles comme formes substantielles ou socles, et les structures comme dynamiques fonctionnelles d'où des calculs se déploient sur les éléments d'un socle, cela revient à la question d'une dialectique entre théorie des ensembles et théorie des catégories, qui ne vont pas l'une sans l'autre, au plan de la compréhension de l'invention mathématicienne.

En fait, depuis les paradoxes de Zenon, la mathématique à développé nombre de questions sur l'infini, et diverses théories « résolvantes », parmi lesquelles les méthodes d'Archimède, la mesure des grandeurs, les calculs de séries et limites, la récurrence, les infimes, le calcul différentiel et l'analyse des contacts de courbes, la théorie des cardinaux, les limites dans les catégories. Je considère chacune comme une théorie de l'infini, qui examine l'infini se produisant dans un certain écart entre deux termes, deux bouts, qui sont des instances particulières de la combinatoire finie et du continu, du dire et du voir. Ce sont des théories de l'infini non pas tant parce qu'elles actualiseraient les infinis comme objets, que parce qu'elles permettent le développement de l'infinitude spécifique d'un calcul.

C'est pourquoi il faut, par exemple, penser à l'analyse non standard et aux infimes comme d'abord ce que cela permet comme calcul d'infinis. On sait que Badiou s'y intéressa dans les années 60, et c'est par ses écrits que je commençais à l'époque à connaître cette théorie.

On peut bien penser l'infini en chacune de ces circonstances, d'Archimède à Cantor et après, particulièrement, mais je crois qu'il y faut cependant mettre alors en avant cette question de l'écart que telle ou telle théorie de l'infini vise à peupler, à remplir, comme effet dialectique entre ses bouts. Retournez à Zénon, regardez encore ma photographie « Bivue », où l'on voit et la question du discret et la question du continu, et leur conflit à résoudre.

C'est pourquoi aussi il faut, par exemple, penser à la théorie des cardinaux comme un tel remplissage. C'est bien ce qu'accomplit Badiou aujourd'hui, entre le vide et l'absolu (voire entre le Néant et l'Être…), au regard de la théorie des grands cardinaux.

A juste titre, Badiou utilise basiquement les deux constructions P et $\cup$, de la proposition 4.4. ci-avant, ce qui conduit aisément à l'opération que j'y note St, et dont j'établis que pour tout ensemble X, l'ensemble infini St(X) contient toutes les structures utiles sur l'ensemble X.

En fait, dans le développement des structures ensemblistes, le foncteur P ou P*, puis maintenant St, jouent un rôle fondamental, que j'ai axiomatisé dans les années 70, d'abord sous le nom de *catégorie cantorienne*, puis sous celui d'*univers algébrique*.

Les univers algébriques ont trois qualités. D'abord ils sont très généraux, comprenant comme cas particuliers aussi bien les topos que les ensembles flous. Ensuite, ils permettent un développement interne équationnel (algébrique) de la théorie générale des structures et théories mathématiques. Enfin ils sont intrinsèquement porteurs de la logique et de la théorie des cardinaux, via ce que j'appelle les *bornes*. Ce que j'ai rapidement évoqué ci-avant.

Du coup, je peux remplacer la question de l'infini considérée comme celle du remplissage entre le vide et l'absolu, par celle du remplissage entre Ø et P, voire entre Ø et St, dans un univers algébrique quelconque.

Pour ce remplacement j'ai besoin de considérer au passage le cas d'univers algébrique qu'est la catégorie Ens_U, et donc sur elle le P et le St qui y sont construits. Entre Ø et St il y a chaque type de structure particulier T, spécifié comme sous-construction de St. Alors l'intervalle entre Ø et un tel T, est sous condition de la dialectique entre Ens_U et $\mathrm{Mod}_U(T)$, catégorie des modèles de T dans Ens_U. On est donc bien passé de la question du remplissage entre le vide et l'absolu par les cardinaux à celle du remplissage entre ensembles et structures, et par les structures. Et a fortiori, avec les univers algébriques abstraits, à celle plus générale du remplissage entre Ø et St.

Ce mouvement de pensée accompli techniquement ici, des cardinaux aux structures, pour y penser l'infini, est probablement hors du système de Badiou qui n'indique pas que pour lui les ensembles peuplent, comme objets ou phénomènes mathématiques, un monde Ens_U. Mais sur ce point il faudrait interroger son retour aux ensembles après son excursion vers les topos, avec, en plus, une relecture de ses idées sur les modèles. Admet-il de penser l'ontologie ensembliste avec, au départ, la donnée d'un modèle U d'univers ? Et si oui, admet-il, toujours dans la perspective ontologique, de passer de la vue de U à celle de la catégorie Ens_U ? Ce n'est pas impossible, vu ce qu'il dit sur *Logiques des mondes* et son déplacement « vers l'aval », que je rapporte en section 1. Mais mon impression est que cela va contre la pente naturelle qu'il a pris en déployant son analyse de l'aventure des grands cardinaux, et cela, qui plus est, sous condition expresse de la logique.

Dans les univers algébriques, on n'a donc pas besoin d'utiliser *a priori* un transcendantal, tout vient de P et donc la logique peut être bien plus indéterminée que la logique intuitioniste, mais surtout il n'y a pas lieu de s'en servir pour construire, tout découle des équations structurales. En fait, les structures ellesmêmes sont décidées, dans l'univers en question, par la donnée St.

Mais il y a un autre moyen, en quelque sorte dual de la spécification *a priori* via P ou St, pour éviter la logique, dans la spécification constructive, cette fois, des structures. C'est l'approche des structures par *esquisses*, contraintes de formes et co-formes. J'expliquais sommairement ici ce qu'il en est, avec le théorème central du *diagramme localement libre* (DLL), lequel est sous conditions d'existence de cardinaux réguliers.

On peut alors à nouveau considérer la dialectique entre entre Ens_U et $Mod_U(T)$, soit maintenant entre Ens_U et $Mod_U(\sigma)$, avec σ une esquisse.

Ultérieurement, on peut unifier univers algébriques et esquisses dans la théorie des machines, et la considération du foncteur « diagrammes » Diag sur la catégorie CAT_U des petits diagrammes sur des catégories localement petites. On recommencera la théorie des bornes, comme étant maintenant celles des sous-foncteurs de Diag, contemplant ce que l'on peut appeler l'*infini diagrammatique*, entre ses deux bouts Ø et Diag.

9. Epilogue : où sont les structures, les bouts, l'infini ?

Dans la version ensembliste pure, de Badiou, il n'y a pas de structure, seulement les ensembles, il y a, comme bouts, les cardinaux, et l'infini est ce qui se loge entre deux cardinaux, par exemple entre X et P(X), voire entre le Ø et l'absolu. Alors la pensée de l'infini est sous condition de l'ontologie (ensembliste).
Dans ma proposition, il y a d'abord les structures, qui sont les pensées de ce que l'on perçoit en mathématiques, soit les phénomènes mathématiques, au cours du travail mathématique (et non pas en interprétant les théories et théorèmes pour leur donner du sens « réel » dans le monde). Ces structures sont, dans un premier temps, décrites à partir des ensembles, au-dessus des ensembles. On Les obtient comme éléments des ensembles St(E), ou bien comme objets de catégories $Mod_U(T)$ ou bien $Mod_U(\sigma)$. La première donation est descendante, à partir de St, ou du moins de P, la seconde est montante et constructive, via des constructions de structures libres ou bien de DLL. Ces deux donations sont en quelque sorte duales, constituent deux bouts « méthodologiques », entre lesquelles on loge l'infinité de l'activité mathématicienne. Étant données deux structures, prises comme bouts, on doit construire l'infinité des comparaisons entre elles, comme c'était déjà le cas avec la structure des entiers N et celle du

continu [0,1], avec les paradoxes de Zenon. Cette infinité a elle-même une structure, et pas seulement un cardinal, etc.

Dans un second temps, grace au lemme de Yoneda, et à la considération de la forme et de la co-forme, chaque structure, et notamment telle qu'ensemblistement déterminée, apparaît tout simplement comme un objet d'une catégorie. Et bien sûr la structure de catégorie n'échappe pas à cette approche, et est donc un objet de la catégorie Cat_U des petites catégories ou de CAT_U des catégories localement petites, relativement à un modèle U de la théorie des ensembles. Alors on peut renverser la perspective, et, partant d'une catégorie abstraite C, par exemple d'un univers algébrique, ou plus particulièrement d'un topos, on peut décider de remplacer le monde des ensembles Ens_U, par la catégorie C, et les objects de C, pris alors comme structures premières. On peut faire cela par exemple avec $C = \mathrm{Top}_U$, la catégorie des espaces topologiques, ou bien avec $C = \mathrm{Cat}_U$.

Si par exemple on considère comme bouts Ens_U et $\mathrm{Mod}_U(T)$, il y a comme infini celui constitué des foncteurs de l'une vers l'autre, et formant, avec les transformations naturelles, une catégorie, qui en constitue la structure. De même avec $\mathrm{Mod}_U(\sigma)$ et $\mathrm{Mod}_U(\tau)$. De même avec deux catégories quelconques C et B. Il y a donc la catégorie B^C des foncteurs et transformations naturelles de C vers B.

La théorie des ensembles permet, via les cardinaux, de démontrer des théorèmes comme celui du DLL. Toutefois, un théorème de ce type peut être pris comme postulat, et alors remplacer l'usage des cardinaux et partant des ensembles. La théorie des ensembles permet de construire le foncteur « structures » St ou du moins P. En réalité, la théorie des ensemble demande, en plus du langage ensembliste, une logique et, exprimés dans cette logique, des postulats, comme l'axiome du choix. Dans le point de vue ici développé, on peut faire l'impasse sur la théorie des ensembles et sur la logique. Il reste la théorie du recollement des diagrammes, d'où l'on exprime les structures qui doivent intervenir dans les problèmes et leurs solutions. Au lieu de former des ensembles par des spécifications prédicatives, on spécifie des structures par des contraintes de formes. On peut donc oublier les nécessités ensemblistes laborieusement logiques, et, comme déjà souligné, utiliser le foncteur Diag, plutôt que P.

Ainsi, dans l'oubli de leurs premières déterminations ensemblistes, les structures, les bouts, les infinis entre ces bouts, sont tous, tout simplement, des objets de catégories, et des catégories eux-mêmes. En particulier l'infini entre deux catégories C et B *est* la catégorie B^C. Dans ce cadre « phénoménologique » la pensée de l'infini devient donc l'examen des structures B^C, avec d'un côté les classes d'isomorphies ou d'équivalences de catégories, et, de l'autre, comme suggéré déjà, les sous-foncteurs de Diag. Ainsi se constituent deux nouveaux bouts « méthodologiques » entre lesquelles on loge l'infinité de l'activité mathématicienne.

Références

Badiou, Alain, *La République de Platon*, Fayard, Paris 2012
— *Le Séminaire. Parménide. L'être 1 — Figure ontologique. 1985-1986*, Fayard, Paris 2014
— *L'Être et l'événement*, Seuil, Paris 1988
— *L'immanence des vérités. L'Être et l'événement, 3*, Fayard, Paris 2018
— *Logiques des mondes. L'Être et l'événement, 2*, Seuil, Paris 2006
Dehornoy, Patrick, *La théorie des ensembles : introduction à une théorie de l'infini et des grands cardinaux*, Calvage et Mounet, Paris 2017
Foreman, Matt et Akihiro Kanamori (dirs.), *Handbook of Set Theory*, Springer, Berlin et Heidelberg 2010
Goldblatt, Robert, *Topoï: The Categorical Analysis of Logic*, Elsevier, Amsterdam 1984
Jech, Thomas, *Set Theory*, Springer, Berlin Heidelberg 1997
Kanamori, Akihiro, *The Higher Infinite*, Springer, Berlin Heidelberg 1994
Lacan, Jacques, «Acte de Fondation » [1964], repris dans *Autres écrits*, Seuil, Paris 2001
Guitart, René, textes disponibles sur : http ://rene.guitart.pagesperso-orange.fr.
Rabouin, David, Oliver Feltham et Lissa Lincoln (dirs.), *Autour de « Logiques des mondes » d'Alain Badiou*, Éditions des archives contemporaines, Paris 2011

Filozofski vestnik | Volume XLI | Number 2 | 2020 | 249–284 | doi: 10.3986/fv.41.2.10

David Rabouin*

Espace et nombre : deux voies dans l'ontologie ?

Introduction

Cet article poursuit un dialogue engagé à la sortie de *Logiques des mondes* à partir de trois grandes lignes de questionnement : 1. La première, la plus immédiate, est le sens qu'il convient de donner au célèbre slogan « mathématiques = ontologie ». C'est autre chose, en effet, d'avancer que les « mathématiques sont l'ontologie », comme l'avait promu *l'Être et l'événement* explicitement[1], et de dire que la théorie des ensembles seule est l'ontologie (comme l'avance *Logiques des mondes*, ainsi que d'autres textes contemporains). Il semble qu'il y ait en ce point une inflexion importante du système, au demeurant non thématisée comme telle ; la théorie des ensemble est-elle une manière d'*exprimer* l'ontologie, c'est-à-dire les mathématiques, ou *est-elle* l'ontologie elle-même ? 2. Ceci conduit à une interrogation plus large sur le rapport, en mathématiques, entre expression et ontologie, ou « langage » et « être ». Ici, je voudrais indiquer que, contrairement à ce que l'on pourrait croire, il y a souvent une ambiguïté entre l'un et l'autre non seulement chez Badiou, mais plus généralement dans les discussions de philosophie des mathématiques. Si cette distinction est pertinente — et j'essayerai de montrer pourquoi elle doit l'être —, alors on ne peut pas conclure trop vite du fait que les mathématiques ont adopté une expression unifiée grâce au *langage* ensembliste au fait que la forme de l'être qu'elles expriment est de nature ensembliste (que l'être est « multiple pur » dans le vocabulaire de Badiou) ; 3. Enfin, je voudrais creuser le fait que le langage ensembliste a justement donné lieu à la thématisation de *deux* orientations que l'on pourrait tout aussi bien qualifier d'« ontologiques » (dans un sens différent, donc, de celui que lui donne Badiou) ; la première met en avant le nombre, tandis que l'autre met en avant l'espace (plus tard nommé « topologique »). Que l'on dispose d'un *langage* apte à les décrire de manière homogène ne préjuge pas alors de ce que nous ayons affaire à un seul domaine d'objets. Je voudrais montrer

[1] Alain Badiou, *L'Être et l'événement*, Seuil, Paris 1988, p. 10.

* (CNRS), the research group SPHERE (UMR 7219, CNRS – Université de Paris)

que cette tension traverse les mathématiques contemporaines, et par voie de conséquence, la pensée d'Alain Badiou plus qu'il ne veut l'admettre (notamment au titre de ce qu'il nomme « onto-logique »). Elle est d'ailleurs au cœur de différentes tentatives proposées en mathématiques pour parvenir à des formes plus satisfaisantes d'unification que celle procurée par les seuls « ensembles ».

1. Quel est le sens de l'énoncé « les mathématiques sont l'ontologie » ?

1.1. « Ontologie » et devenir historique des mathématiques

Accordons pour le moment que « les mathématiques », *toutes* les mathématiques, soient « l'ontologie ». On devrait alors dire que les *Éléments* d'Euclide sont un traité d'ontologie au même titre que « la formidable Introduction à l'analyse en 9 volumes, de Jean Dieudonné »[2]. Mais une telle affirmation n'est pas sans poser de difficulté. Il ne s'agira pas alors seulement de pointer les embarras qui peuvent naître dès lors que le philosophe délègue au mathématicien le soin d'être seul prescripteur en matière d'ontologie. Ces difficultés, Alain Badiou a d'ailleurs fini par les reconnaître et cela l'a conduit à moduler un énoncé brandi d'abord sans autre qualificatif en énoncé de nature plutôt stratégique. Mais même si l'on concède que l'énoncé initial est de nature stratégique, même si l'on concède qu'il signe des choix qui peuvent rester irréductiblement philosophiques, il n'en accompagnera pas moins une certaine vue sur les mathématiques qui en fait un discours sur « l'être en tant qu'être ». Dans l'affirmation précédente, on n'entend pas notamment qu'Euclide et Dieudonné aient formulé *des* ontologies et encore moins que ces ontologies puissent être différentes. Le cœur du slogan, qu'il soit stratégique ou non, est qu'ils nous offrent l'un et l'autre un certain rapport à « l'ontologie », parce que l'un et l'autre décrivent « ce qui est ».

Or ce face-à-face avec l'être semble soustraire les mathématiques, au moins pour une part, à leur devenir historique. Plus exactement, elle semble rejeter ce devenir du côté des modalités de la seule *expression*. Il faut que les mathématiques d'Euclide, quoiqu'exprimée dans une terminologie qui leur est propre, nous parlent d'entités que nous reconnaissons, d'une manière ou d'une autre, comme *les mêmes* que celles dont parle Dieudonné (au moins pour les parties de leurs discours qui se recouvrent, par exemple ce qui a trait aux nombres et

2 *Ibid.*, p. 20.

aux grandeurs en général). Il ne s'agit pas là d'une vue particulièrement originale face à cette science singulière, à la fois déployée dans une histoire et pourtant, comme l'avançait déjà Cavaillès, « négatrice d'histoire ». De fait, le devenir semble pouvoir y être ressaisi après coup comme déploiement d'une nécessité purement conceptuelle qui en efface les scories contingentes. Les mathématiciens ne cessent de relire leur passé en agissant comme si certains théorèmes étaient les « mêmes » et qu'ils portaient sur « les mêmes » objets. Sous ce point de vue, c'est bien la manière d'*exprimer* ces objets qui seule varie. Peut-être est-ce là, d'ailleurs, une des origines de la croyance aux concepts comme pures « idées » éternelles et immuables, dont les mathématiques ont toujours servi de support exemplaire. Mais que cette croyance soit très largement partagée ne la rend pas moins questionnable.

Supposons, en effet, que les mathématiques d'Euclide se rapportent, non moins que les nôtres, à « l'être en tant qu'être ». Une chose paraît acquise à qui les lit : elles ne sont certes pas formulées dans un langage qui porterait sur des objets du type « ensembles ». Les objets dont elles traitent se nomment plutôt « nombres » et « grandeurs », et même, plus souvent encore, « triangle », « cercle », « droite », « rectangle », etc. (mais le livre V des *Éléments* nous apprend que toutes ces formes géométriques sont des « grandeurs »)[3]. L'affaire n'est pas sans importance, parce que le fait que les mathématiques grecques classiques — le constat se transfère aisément, en effet, à Archimède aussi bien qu'à Apollonius — s'expriment selon *deux* grands domaines d'objets commande leur organisation théorique. Ainsi, il n'y a chez Euclide *aucune démonstration* qui circule entre les livres géométriques (I-VI pour la géométrie plane) et les livres arithmétiques (VII-IX), alors même que de nombreux résultats se répondent d'un domaine à l'autre. Non moins surprenant est le fait qu'il y ait alors besoin de *deux* théories des proportions pour opérer avec ces objets (exposées respectivement aux livre V et au livre VII des *Éléments*), alors que leurs propriétés sont pourtant identiques quand on les applique à l'un ou l'autre type d'entités (pensons au fait que les rapports entrant dans une proportion peuvent être « renversés » ou, comme disaient les Grecs, « alternés »). C'était d'ailleurs là un des exemples favoris d'Aristote pour faire valoir que l'être se dit « en plusieurs sens », qui correspondent à autant de « genres d'être » incommunicables : pour Euclide comme pour Aristote, même si certains énoncés valent en apparence de toutes

3 Euclide, Les *Éléments*, trad. fr. Bernard Vitrac, PUF, Paris 1990-2001.

les entités, on ne pourra jamais prouver le géométrique avec l'arithmétique, et réciproquement, parce que l'un et l'autre visent des « genres d'être » distincts[4]. Si nous rétorquons alors que ce n'est là qu'un phénomène de surface et qu'Euclide se meut dans la même « ontologie » que nous, qui n'est rien d'autre que « l'ontologie » éternelle, dont il reviendrait simplement au philosophe d'expliciter les attendus, alors nous devons du même souffle admettre plusieurs thèses problématiques. Tout d'abord, cela veut dire qu'une théorie mathématique peut relever d'un langage qui se rapporte *en apparence* à des domaines d'objets, tandis qu'elle se rapporte *en fait* à d'autres. Ensuite, cela conduit à faire des mathématiques une discipline soumise à des formes de progrès qui ne seraient pas seulement à trouver du côté des résultats, mais des modalités d'expression de cette réalité sous-jacente — certaines se révélant « meilleures » que d'autres. Ainsi on dira que le langage euclidien porte « en apparence » sur des nombres et des grandeurs, mais que « en réalité » il traite déjà de multiples purs. On devra également tenir que les embarras dans lesquels il se meut à sacrifier à son langage de surface doivent être imputés, en dernière analyse, à des maladresses d'expression dont nous serions heureusement sortis.

Mais entre autres difficultés subséquentes s'avance alors le fait que ces thèses valent de droit de toute théorie mathématique et donc, en particulier, *de la théorie des ensembles* (et, plus généralement, de toute théorie en vigueur qui prétendra livrer l'expression la « meilleure » des entités mathématiques). Si elles sont vraies, il faut donc admettre déjà qu'il n'y a rien dans la théorie des ensembles, prise en elle-même, qui permettent de savoir si elle parle *vraiment* d'ensembles ou si c'est là simplement une manière de parler *d'autre chose* — exactement comme le mathématicien contemporain prétend que les mathématiques d'Euclide semblent parler de « nombres » et de « grandeurs », mais que tous deux relèvent d'une essence commune (celle qu'exprimeraient les « ensembles »). En outre, il n'y a rien dans la théorie des ensembles qui en fera le dernier mot de la recherche de la meilleure expression à laquelle sera porté, par sa nature même, le développement des mathématiques[5].

4 Voir par exemple *Analytiques Seconds*, I, 7, 75 a 38–b 6 (Aristote, *Seconds Analytiques. Organon IV*, trad. fr. P. Pellegrin, GF, Paris 2005, p. 103).

5 On n'aura d'ailleurs pas de peine à trouver des mathématiciens arguant du fait que les mathématiques, même quand elles parlent d'ensembles, ne portent pas sur des ensembles et que c'est là une indication qu'il ne saurait s'agir de la meilleure expression des entités mathématiques. Je donnerai des exemples dans la dernière section, mais notons dès

Mais remarquons également que si les thèses que je viens d'évoquer sont fausses, s'il n'y a pas d'écart entre expression et ontologie, la situation n'en sera pas moins problématique : car on se retrouvera alors avec des types d'entités *différentes* d'une expression à l'autre, et notamment d'une période à l'autre, d'une culture à l'autre, d'un auteur à l'autre, d'un auteur à lui-même, etc. La question se posera, par exemple, de savoir non seulement si Euclide se meut dans la même « ontologie » que Dieudonné, mais si Leibniz se meut dans la même « ontologie » que Newton, Lagrange que Euler ou Brouwer que Hilbert, voire que Heyting – et même, à termes, si le jeune Newton (le virtuose des méthodes symboliques qui découvre le développement du binôme) se meut dans la même ontologie que le vieux Newton (celui qui défend la primauté de la géométrie synthétique à l'ancienne)[6], etc. etc. On ne pourra même pas s'en sortir alors avec une solution de type « aristotélicienne » qui entendrait par « ontologie » une description des grands « genres de l'être », car ces genres n'auront plus rien de « grands ». Ils se démultiplieront avec les formes d'expression que l'historien nous apprend à discerner et dont le nombre ne cesse de croître à mesure que s'affinent nos descriptions.

1.2. Langage et ontologie

La difficulté soulevée dans la section précédente touche à un problème philosophique plus général et plus profond, sur lequel il peut être utile de s'arrêter brièvement. Il s'est trouvé naturellement associé à une conception du langage où le formalisme logique élaboré pour ce que l'on nomme aujourd'hui « la logique du premier ordre » a prétendu fournir un premier modèle formel. Le mécanisme de la « référence » s'y trouvait alors idéalement représenté par le rapport entre une syntaxe supposément « vide », vue comme pur jeu de symboles contrôlé par des règles, et une sémantique donnée par une « interprétation » de ces symboles. Du fait que les mathématiques sont déclarées une science « formelle » — mais à nouveau veut-on dire par là *toutes* les mathématiques à travers l'histoire ? — et du fait qu'on peut effectivement *exprimer* la plupart des structures mathématiques à l'aide du formalisme que je viens de décrire, on croit alors que ce

à présent que c'était là un des motifs des objections de Desanti contre ce qu'il appelait le rêve d'une « ontologie intrinsèque » des mathématiques, cf. Jean-Toussaint Desanti, « Quelques remarques à propos de l'ontologie intrinsèque d'Alain Badiou », *Les Temps Modernes* 45 (526/1990), pp. 61–71.

6 Voir Niccolò Guicciardini, *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts 2009.

modèle du rapport entre syntaxe et sémantique, même s'il a rapidement montré ses limites dans la formalisation du langage naturel, s'y trouve exemplairement validé[7].

Or derrière cette évidence se cache un problème désormais classique que des auteurs comme Hilary Putnam ont mis en avant à propos du fonctionnement de la « référence ». L'intérêt particulier de l'approche de Putnam, même si elle prend son départ aux antipodes de la pensée de Badiou, est qu'elle appuie en partie son argument sur le point aveugle de l'historicité des sciences, dont je suis également parti[8]. C'est pourquoi je la rappelle ici. Supposons donc que le langage scientifique puisse être idéalement représenté dans un langage formel « transparent » (par exemple celui de la logique du premier ordre) au sein duquel il nous serait possible de décrire directement les objets à l'aide de ce que Russell appelait des « descriptions définies »[9]. Une entité, quelle qu'elle soit, devrait alors être caractérisable par une collection de telles formules qui constitueront sa « description complète »[10]. Dans ce cadre, la seule forme d'historicité que l'on semble pouvoir attribuer aux sciences, au-delà des améliorations liées à la seule expression (invisibles du point de vue du langage formel), est celle de la correction des erreurs et d'un progrès cumulatif : une description peut s'avérer fausse, au sens où elle ne correspond finalement à « rien » (comme le « phlogistique ») ; mais il peut également arriver qu'elle soit considérée à un moment comme complète, alors qu'elle n'était que partielle (comme lorsque l'on pensait, par exemple, que toute « fonction continue » devait également avoir une tangente en chaque point). Dans le premier cas, on remplacera une descrip-

7 Badiou a d'ailleurs consacré à ces questions une de ses premières interventions philosophiques en défendant un point de vue très critique sur la tendance à exporter le concept de modèle des mathématiques aux autres sciences (pour ne rien dire du langage !), cf. *Le concept de modèle*, Maspéro, Paris 1969. Mais il n'en a pas moins conservé *en mathématiques* une entente assez stricte du fonctionnement du mécanisme de la référence.

8 Voir, par exemple, en traduction française : Hilary Putnam, « Langage et réalité [1975] », dans *Textes clés de philosophie des sciences*, *Vol. 2*, dirs. S. Laugier et P. Wagner, Vrin, Paris 2004, pp. 61–104 et « Explication et référence », *De Vienne à Cambridge*, dir. dans P. Jacob, pp. 337–365, Gallimard, Paris 1980.

9 Bertrand Russell, « On denoting », *Mind* 14 (56/1905), pp. 479–493; trad. fr. Jean-Michel Roy, *Écrits de logique philosophique*, PUF, Paris 1989, pp. 203–218.

10 On peut toujours mettre bout à bout toutes ces descriptions à l'aide de conjonctions et obtenir ainsi un seul énoncé définitionnel que j'appelle « complet ».

tion par une autre ; dans le second, on complètera une description existante en la précisant.

Or l'histoire des sciences modernes met à mal une telle vue en procurant un très grand nombre d'exemples où la connaissance a progressé non pas en remplaçant ou en complétant, mais en *niant* des descriptions antérieures *du même objet*. Les noms de Bachelard et de Canguilhem, dont Badiou hérite, viennent ici à l'esprit de tout lecteur français. Un exemple que propose Putnam et que nous pouvons suivre, est celui des descriptions de l'électron dans les théories de Bohr-Rutherdord et de Schrödinger[11]. Le point clef sur lequel Putnam veut attirer l'attention est le suivant : plusieurs « descriptions définies » données dans ces deux modèles apparaissent comme *incompatibles*. Dans le premier, notamment, l'électron est une entité qui a une position et une vitesse déterminées, mais pas dans le second.

Nous nous trouvons alors face à un dilemme : ou bien nous considérons qu'il s'agit de différentes tentatives pour approcher théoriquement *le même objet* ; c'est la tendance naturelle à laquelle est porté l'historien des sciences quand il distingue différentes conceptions de « l'électron » à travers l'histoire. Mais le prix à payer sera alors de concéder que nous ne nous référons donc *pas* aux objets par l'intermédiaire des descriptions (qu'elles soient complètes ou incomplètes). Le problème de la description initiale de Bohr, en effet, n'est pas qu'elle est incomplète, mais qu'elle est *inadéquate* et persiste à penser l'électron sur le modèle d'un objet de la mécanique *classique* auquel on devrait ajouter des propriétés particulières pour le transformer en objet quantique. Ou bien nous devons accepter que nous avons affaire à des entités de types différents, disons

[11] Dans le premier modèle, l'électron est conçu comme tournant autour du noyau de l'atome à la manière d'un satellite autour d'une planète (mais sur une orbite qui serait circulaire). L'idée est alors d'intégrer à un tel modèle les spécificités issues des découvertes liées à la quantification, c'est-à-dire le fait que les électrons restent sur des orbites stationnaires correspondant à des niveaux d'énergie déterminés et qu'ils peuvent néanmoins passer d'un niveau à l'autre par émission ou absorption d'un certain quantum d'énergie. Mais ce modèle souffre du nombre d'hypothèses *ad hoc* qu'il nécessite. Il laissa donc rapidement la place, sous l'impulsion de Bohr lui-même, à un modèle de nature très différente, probabiliste. Dans cette nouvelle description, dont Schrödinger fut le maître d'œuvre, on ne parle plus d'orbite, mais d'orbitale et il ne s'agit plus d'isoler des régions physiques *stricto sensu*, mais de concevoir plutôt des « nuages de probabilité » dans lesquels la notion de trajectoire n'a plus de sens clair.

l'électron$_{\text{Bohr}}$ et l'électron$_{\text{Schödinger}}$, que ne relient entre elles qu'une homonymie de surface forcée par le déroulement des affaires humaines. Dans ce cas, nous pourrons dire, par exemple, que l'on a cru que l'une d'entre elles existait alors qu'elle n'existait pas. Le problème ne serait donc pas que nous entretenions des croyances fausses sur « l'électron » (ce qui nous ramènerait à la possibilité d'une référence hors description adéquate), mais que notre langage de surface nous faisait croire à une stabilité de la référence là où en fait, nous nous référions à deux entités différentes : l'électron$_{\text{Schödinger}}$ et l'électron$_{\text{Bohr}}$ — ce dernier s'étant avéré aussi peu existant que d'autres entités fantastiques qui peuplent l'histoire des sciences : « l'humeur noire », « l'éther » ou le « phlogistique ». La difficulté est alors que l'histoire de la connaissance humaine se dispersera aussitôt en une multitude incontrôlable d'entités produites par notre langage au travers des siècles et en perpétuel devenir (l'« électron » auquel nous croyons aujourd'hui n'est déjà plus exactement l'électron$_{\text{Schödinger}}$). Le monde rassurant des idées se révèlera alors ni plus ni moins bariolé et fluctuant que celui du devenir sensible.

Même si Putnam lui-même n'a guère utilisé son modèle pour traiter des mathématiques[12], le problème qu'il soulève s'y transfère aisément et rejoint alors notre interrogation initiale. En mathématiques, non moins qu'ailleurs, on trouvera à travers l'histoire des descriptions incompatibles de certains objets. Nous y avons fait allusion en proposant de comparer Euclide et Dieudonné dans leurs traitements respectifs des opérations entre nombres et entre grandeurs. Pour prendre un exemple plus élémentaire, il est bien connu que les Grecs anciens ne considéraient pas l'unité comme un nombre (et encore moins le zéro, dont ils n'avaient pas idée). Nous pourrions croire qu'il s'agit alors simplement de « compléter » leur système numérique par des entités qu'ils auraient simplement « oubliées ». Mais c'est là une vue très simpliste de l'histoire des mathématiques, sur laquelle les historiens ont attiré l'attention depuis longtemps.

12 Son objectif était plutôt de défendre l'idée que les mécanismes de la référence ne passent pas par des descriptions — ce qui paraît d'abord une thèse assez curieuse lorsqu'on l'applique aux mathématiques. Il a néanmoins, à plusieurs reprises, confirmé qu'à ses yeux, la vérité mathématique avait un statut quasi expérimental qui la rapprochait plus qu'on ne le croit ordinairement des sciences naturelles, cf. « What is mathematical truth ? », dans Hilary Putnam, *Mathematics, Matter and Method. Philosophical papers*, vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge 1975, pp. 60–78.

Comme le faisait déjà remarquer Simon Stevin dès la fin du XVIème siècle[13], la conception grecque entraînait, en effet, des conséquences « infortunées » dans leur manière de penser le *parallèle* entre nombres et grandeurs, dont les conséquences furent longues à être perçues. En particulier, il leur était naturel de mettre face à face le point, « principe des grandeurs », et l'unité, « principe des nombres » (alors, rappelait Stevin, que c'est le zéro qu'il aurait fallu mettre à cette place pour assurer un parallèle cohérent). Comme je l'ai indiqué précédemment, cette conception *structure* la mathématique grecque et nourrit l'idée qu'il y a, en mathématiques, deux domaines d'objets *incommunicables*, que seules des analogies (au demeurant mal fondées) peuvent unir. L'évolution du concept de « nombre » au temps de l'algèbre symbolique (Viète, Stevin, puis Descartes), qui elle-même prenait la suite d'une longue tradition initiée avec les débuts de l'algèbre arabe, ne consista donc pas seulement à *compléter* la conception du nombre : elle en changea aussi radicalement *la nature* (de sorte qu'il fût progressivement à même de recouvrir l'entièreté du domaine ancien des « grandeurs »)[14]. C'est tout le problème qui se pose quand on avance qu'Euclide et Dieudonné se réfèrent à l'occasion aux « mêmes » objets (par exemple à l'objet « nombres entiers »).

On pourrait prendre bien d'autres exemples de ce phénomène très répandu. Ainsi, pour rester sur des cas élémentaires, lorsque Blaise Pascal aborde les « sections coniques » d'un point de vue que nous dirions « projectif » et y intègre le point (comme un cas de conique qu'on dirait aujourd'hui « dégénérée »), il fait bien plus que *compléter* la classification d'Apollonius. Il change profondément la nature des « coniques » en les voyant non comme des sections du cône, mais comme des projections du cercle. Or certaines propriétés du point ne sont pas compatibles avec celles des coniques conçues comme courbes. L'idée même de « courbe » a d'ailleurs fortement évolué au cours du temps. Ainsi, de même qu'il

[13] Simon Stevin, « Arithmétique (1585) », dans *The Principal Works of Simon Stevin*, éd. E. Crone, E.J. Dijksterhuis, R.J. Forbes et al., 6 vol., t. 2 B, N. V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam 1955–1966, p. 498.

[14] Sur cette évolution, on peut renvoyer le lecteur philosophe au livre classique de Jacob Klein, « *Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra* (1934/1936) », dans *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Abteilung B: Studien. Band 3, Erstes Heft, Springer, Berlin 1934, pp. 18–105 und Zweites Heft, Berlin 1936, pp. 122–235). Notons au passage que les solutions de Viète et de Stevin relèvent d'ailleurs de deux « ontologies » différentes pour la résolution de ce problème.

aurait été inconcevable à un ancien qu'une courbe (« dégénérée ») *soit* un point, de même il aurait été incompréhensible à un auteur du XVIIème siècle qu'une courbe (« monstrueuse ») puisse emplir entièrement une surface. Or c'est ce que peut la courbe de Peano qui emplit le carré. L'idée de « surface » a évidemment connu le même sort. Pour s'approcher plus près de nous, un célèbre théorème de Nash, dit « de plongement », établit par exemple que toute surface orientée et fermée peut être plongée, tout en préservant les distances, dans une boule de l'espace euclidien ordinaire de taille arbitrairement petite. Mais ceci n'aurait eu aucun sens il y a encore un siècle : comment imaginer que je puisse déformer continument la terre pour la faire entrer dans une balle de ping pong *tout en préservant les distances* ? Ceci a pourtant été à la base de l'élaboration récente d'objets baptisés « fractales lisses »[15]. Or les « fractales » avaient précisément été conçues originellement au titre des objets « non lisses » (éventuellement continus, mais pas différentiables), etc. etc. À chaque fois, un même type d'objet est pourvu à différentes périodes de propriétés *incompatibles*, par lesquelles semble se manifester le progrès de notre connaissance à son sujet.

Les exemples sont nombreux de telles avancées où il ne s'agit pas tant d'étendre un domaine que de *nier* certaines propriétés qu'on croyait appartenir à son « essence » (au sens le plus neutre qu'on puisse imaginer, disons à son « ce qu'il est »). Dans chaque cas, c'est l'écart entre expression et ontologie qui se manifeste : aucun langage, aussi formel qu'il soit, n'est intégralement transparent à l'être et, tel est le fond de l'argument de Putnam, il faut que nous puissions nous référer aux entités existantes *indépendamment de l'expression par lesquelles nous tentons de les décrire*. Ce mécanisme est le ressort de tout progrès scientifique, en mathématiques comme ailleurs. Il est le soutien de son devenir à travers le temps et l'espace. Mais il interdit du même coup de faire de telle ou telle expression (dans le cas de Badiou, l'expression « ensembliste ») le dernier mot de « l'ontologie ».

15 Pour une présentation accessible à tous, voir Vincent Borrelli, « Gnash, un tore plat ! » — *Images des Mathématiques*, CNRS, 2012 (https://images.math.cnrs.fr/Gnash-un-tore-plat.html, consulté le 15 mars 2020).

2. Quel est le sens de la révolution cantorienne sous laquelle se place Alain Badiou ?

2.1. Langage et ontologie dans l'histoire de la théorie des ensembles

Les remarques qui précèdent sur le rapport entre langage et ontologie permettent de soulever une difficulté générale sur le rôle que sont censé avoir joué les « ensembles » dans l'histoire des mathématiques et, par voie de conséquence, le rôle qu'ils peuvent jouer dans une interprétation philosophique comme celle que propose Badiou. De fait, l'émergence de ce paradigme chez des auteurs comme Cantor et Dedekind se fait sous l'égide d'une théorie que l'on décrit rétrospectivement comme « naïve » et qui produit ses effets les plus remarquables *avant* d'avoir été axiomatisée. Il y a donc un raccourci à dire que les ensembles ont procuré « un *langage* universel pour toutes les branches des mathématiques », comme l'avance à juste titre *L'Être et l'événement*[16] et de faire comme si on parlait alors de la *théorie*, au sens axiomatique du terme (théorie dite aujourd'hui « ZFC », pour « Zermelo-Fraenkel avec axiome du Choix »). Le développement du langage et celui de la théorie (du moins sous sa forme axiomatique) correspondent, en effet, à deux moments différents de l'histoire. Or, nous apprennent les historiens, le succès de l'un fut relativement indépendant de l'autre. On peut ici rappeler la mise en garde de José Ferreirós, auteur d'une histoire de la théorie des ensembles qui pointe une importante distinction à faire entre « la théorie des ensembles comme branche autonome des mathématiques — comme lorsque l'on parle de théorie des ensembles *transfinis* ou de théorie des ensembles *abstraite* — et la théorie des ensembles comme outil de base ou langage pour les mathématiques : l'*approche* ou le *langage* ensembliste »[17]. Et Ferreiros de rappeler : « comme indiqué précédemment, la théorie des ensembles abstraite vint à l'existence après que l'approche ensembliste eut commencé à se développer, et non le contraire »[18].

Ainsi les ensembles forment d'abord un langage qui est introduit, par Cantor et Dedekind, pour traiter de problèmes mathématiques particuliers, en l'occurrence des questions de convergence des séries trigonométriques et des

[16] Badiou, *L'Être et l'événement*, p. 49.
[17] José Ferreirós, *Labyrinth of thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin 1999, p. xix (ma traduction).
[18] *Ibid.*

problèmes de divisibilité dans les systèmes de nombres. C'est dans le premier domaine que Cantor obtient ses résultats les plus marquants dès le début des années 1870, notamment son grand théorème d'unicité qui établit que deux séries trigonométriques qui ont la même limite simple ont les mêmes coefficients. À la même époque, Dedekind élabore les premières versions de sa « théorie des idéaux », sous-structure de ce que nous appelons aujourd'hui un « anneau » et qui permet d'y préserver dans un cadre général la possibilité d'une décomposition unique en éléments premiers (sous réserve de redéfinir dans ce cadre ce à quoi correspondent les « nombres premiers »).

Si le second contexte forme les prémices du développement de l'« algèbre moderne », le premier voit apparaître chez Cantor un certain nombre de concepts relatifs aux « ensembles de points », c'est-à-dire à ce que nous désignerions aujourd'hui sous le nom de « topologie générale » (comme le concept d'ensemble « parfait », « dérivé », « dense », etc.). C'est un des domaines où la théorie va connaître ses premiers succès auprès des contemporains, bien plus que dans le domaine de l'arithmétique de l'infini, où elle suscite au mieux l'indifférence, au pire la défiance. On le voit très bien en regardant sa réception en France auprès d'auteurs comme Lebesgue, Borel ou Baire (avant l'élaboration d'une théorie axiomatique par Zermelo en 1908) — artisans de la théorie moderne de la mesure et parfois qualifiés de « semi-intuitionnistes ». De fait, ces auteurs, pourtant grands défenseurs du *langage* mis au point par Cantor, n'en refusent pas moins l'utilité de la *théorie* abstraite que ce dernier cherche ensuite à développer sous la forme d'une arithmétique transfinie. À propos de Baire, Hélène Gispert rappelle qu'« il adopte une démarche radicalement différente de celle de Cantor qui cherche à dégager sa généralisation du concept de nombre de ses premières considérations sur les ensembles de points et ne privilégie d'aucune façon l'infini dénombrable dans son étude du transfini »[19]. Elle cite à ce propos une lettre à Borel de 1905 où Baire évoque la « corvée assommante » que représente l'article qu'il doit écrire sur les ensembles pour la version française de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques* :

> En écrivant mes *Leçons sur les fonctions discontinues*, j'avais les coudées franches, j'exposais de la manière qui me paraissait la plus claire les théories

19 Hélène Gispert, « La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905 : Baire, Borel, Lebesgue… et tous les autres », *Revue d'histoire des mathématiques* 1 (1/1995), p. 58.

> dont j'avais l'intention de me servir. Je ne suis plus ici dans les mêmes conditions, je n'ai plus le droit de faire dévier la pensée de G. Cantor. Il me faut bon gré, mal gré, parler de l'addition, de la multiplication des types ordinaux, etc., *choses dont je ne connais pas la moindre application. Je ne peux tout de même pas en inventer* [*Lettres*, p. 83. C'est moi qui souligne][20].

On aurait tort de croire qu'il s'agit là de quelques résistances rapidement surmontées et que la théorie axiomatique aurait justement balayées. Aujourd'hui encore, c'est la même réponse qu'on recevrait de la part de nombre de mathématiciens. Je cite, par exemple, ce que dit à ce sujet Yves André dans ses *Leçons de mathématiques contemporaines* — dont un des chapitres est significativement intitulé : « (Non-)influence de la Théorie des ensembles sur les Mathématiques ».

> Que retiennent les Mathématiques de tous ces travaux sur les multiplicités infinies ?
>
> La réponse est double, et très tranchée.
>
> En ce qui concerne l'usage et le langage (élémentaire) des ensembles, à la manière de Dedekind disons, ils ont envahi toutes les Mathématiques. L'usage des ensembles a ouvert la voie à la Topologie générale, à la Théorie de la mesure, et à l'Analyse fonctionnelle (où l'on traite d'ensembles de fonctions comme s'il s'agissait de points d'un espace). D'autre part, le langage des ensembles, sous l'impulsion de Bourbaki notamment, a beaucoup contribué à la précision du langage mathématique en général.
>
> [...] En revanche, en ce qui concerne les travaux de Cantor sur la combinatoire transfinie, l'axiomatique ensembliste et tous les développements ultérieurs de la Théorie des ensembles, *les Mathématiques (hors Théorie des ensembles et Logique) n'en retiennent quasi-rien*[21].

On voit donc que les historiens, comme les acteurs de l'époque et comme ceux de notre temps, s'accordent tous sur l'importance qu'il peut y avoir à distinguer *langage* et *ontologie* ensembliste (au sens de ce que porte la théorie formelle axiomatisée). Si le triomphe de la théorie des ensembles comme langage est in-

[20] Cité par Gispert, *ibid*. L'édition des lettres est : *Lettres de René Baire à Émile Borel, Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* 11 (1990), pp. 33–120.

[21] Yves André, *Leçons de Mathématiques contemporaines à l'IRCAM*, IRCAM, France 2009, p. 104 (archives ouvertes. https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-01359200/document (consulté le 25 janvier 2020). C'est moi qui souligne.

déniable et si l'on peut tout à fait soutenir que ce langage a permis de mieux exprimer certains aspects de la réalité mathématique, cela ne nous dit encore rien sur cette réalité elle-même — surtout s'il s'agit de voir dans la théorie *axiomatique* l'expression d'une telle ontologie du « multiple pur » et de son règlement[22]. Un point sur lequel je voudrais insister est que cette situation n'est nullement spécifique à la Théorie des ensembles. À de très nombreuses reprises dans l'histoire des mathématiques, on assiste à la mise au point d'un langage qui s'avère fécond et qui va être adopté par un grand nombre de mathématiciens, *alors même que ces mathématiciens sont en désaccord sur le type d'entités qui est associé à ce langage* (comme on vient de le voir avec l'exemple de Baire et de Cantor). Ceci rend la tâche particulièrement ardue pour le philosophe qui pense qu'il lui revient d'*expliciter* le discours « ontologique » sous-jacent. J'ai déjà cité à ce propos le langage euclidien des proportions, contesté dès l'Antiquité tardive par ceux qui estimaient que nombres et grandeurs pouvaient tout à fait « communiquer » (mouvement qui fut continué et amplifié dans les mathématiques arabes), mais on peut aussi penser au langage algébrique cartésien et aux débats qui s'ensuivirent pour savoir si les courbes décrites par Descartes étaient, comme il le prétendait, les seules entités dignes d'être reçues dans la « géométrie », au calcul différentiel leibnizien et aux débats qui déchirèrent ses premiers défenseurs pour savoir si l'algorithme nécessitait d'accepter ou non d'authentiques entités infinitésimales, au langage des développements en série et à la question de savoir si toute « fonction » est exprimable sous cette forme, au langage des « epsilon/delta » et aux querelles sur l'existence d'entités ne satisfaisant pas l'axiome d'Archimède, jusqu'aux débats agitant au début du XXème siècle les topologues pour savoir si l'approche par les « ensembles de points » était la meilleure pour capturer la notion d'espace ou si, au contraire, elle nous faisait perdre l'essentiel (par contraste avec la topologie qu'on appelait alors « combinatoire » et qu'on appelle aujourd'hui « algébrique »)[23]. À chaque

[22] Je n'ai pas la place de développer ce point ici, mais il est non moins remarquable que le développement de la théorie dite « descriptive » des ensembles se soit fait en grande partie par une réflexion très poussée, jusque dans ses attendus théologiques, sur les rapports entre langage et être — et plus précisément encore sur la question de la nomination. Je renvoie sur ce point à l'étude de Jean-Michel Kantor et Loren Graham, *Au nom de l'infini*, Éditions Belin, Paris, 2010.

[23] Sur les réticences que certains topologues ont pu avoir à accepter que les notions spatiales soient adéquatement capturées dans le langage ensembliste, voir M. Bélanger et J.-P. Marquis, « Menger and Nöbeling on pointless topology », *Logic and Logical Philosophy* 22, (2/2013), pp. 145–165.

fois, un langage triomphe (souvent assez rapidement s'il permet la résolution de problèmes latents) tandis que les débats font rage sur le type d'entités auquel il nous engage « vraiment ». Même si l'on conçoit l'« ontologie » proprement dite comme un méta-discours qui aurait à trancher dans ces débats, le problème majeur est qu'il ne s'agira nullement de trancher seulement sur le dernier venu et qu'il faudra prendre position sur tous les débats advenus dans l'histoire des mathématiques.

Un point clef qui se dégage des considérations précédentes est qu'il ne semble donc pas qu'on puisse conclure de l'adoption d'un langage à la donnée concomitante d'une ontologie et que ceci vaut de la théorie des ensembles comme de la plupart des théories antérieures. L'histoire des mathématiques nous offre de nombreux exemples où l'on voit un discours se rapportant *en apparence* à un domaine d'objets être soumis à des discussion sur la nature du domaine qu'il vise *réellement* — exactement comme on a vu les physiciens se quereller sur la nature exacte de ce qu'est un « électron ». Mais au-delà du cas particulier des controverses, il arrive bien plus souvent encore — c'était notre constat de départ — que telle ou telle reformulation postérieure fasse apparaître la distinction entre différents domaines d'objets comme simple « effet de langage ». Ceci est même inhérent à la lecture rétrospective que les mathématiciens portent sur leur discipline et au fait qu'il leur faut alors tenir que si tel ou tel pan des mathématiques a été formulé dans telle ou telle terminologie, il parlait en fait « toujours déjà » des mêmes objets que ceux que nous reconnaissons aujourd'hui (sans quoi, remarquons-le, il ne sera pas possible de dire que tel ou tel théorème a réellement été démontré dans une période antérieure, faute de porter sur les mêmes choses). Pis, comme j'ai essayé de l'indiquer, il semble que toute position, comme celle de Badiou, qui voudrait *à la fois* s'appuyer sur une théorie en vigueur pour délivrer un sens « ontologique » profond et tenir qu'une telle théorie n'a pas simplement une portée régionale, mais capture *tous* les sens d'être déployés par « les mathématiques » à travers leur histoire, *soit dans l'obligation* de s'appuyer sur un tel écart entre langage et ontologie. Le problème, j'y insiste, est donc *interne* à la perspective développée par Badiou.

2.2. De quoi parle-t-on lorsqu'on manipule des « ensembles » ?

Dans le cas de la théorie des ensembles, on pourrait rendre les considérations qui précèdent plus précises, comme l'évoque Yves André dans le passage de la citation précédente que j'ai omis :

> Au reste, la plupart des ensembles considérés par les mathématiciens sont des ensembles définis « en compréhension », pour lesquels l'appartenance veut dire, concrètement, satisfaire une certaine propriété explicite ; à ce niveau basique, les ensembles n'offrent guère qu'un langage « réaliste » un peu plus commode que le maniement logique des propriétés elles-mêmes[24].

Ainsi certains auteurs comme Stewart Shapiro considèrent que les mathématiques ensemblistes parlent, *en réalité*, d'objets qui ne sont pas des « ensembles », mais des « structures » et qui doivent être décrites dans un cadre qui n'est pas à proprement parler ZFC (formulé au premier ordre avec des schémas d'axiomes), mais la logique du second ordre[25]. Dans ce cas, « l'objet » propre de la théorie que nous interprétons comme « ensembles » doit plutôt être ressaisi, ainsi que le rappelle Yves André, comme une manière commode de parler d'autre chose (des propriétés et des relations). Les mathématiques, comme cela a été soutenu à de nombreuses reprises dans l'histoire, ne serait qu'une science des relations[26].

Un autre exemple qui vient immédiatement à l'esprit étant donnée l'orientation générale de l'œuvre de Badiou est l'alternative proposée à la théorie des ensembles par la « théorie des catégories », qui elle aussi met fortement en avant le caractère relationnel des entités mathématiques. Sous ce point de vue, il peut être utile de rappeler tout d'abord que le rapport Théorie des ensembles/Théorie des Catégories n'est pas simplement ici, comme l'estiment trop souvent les philosophes, de querelle sur la prétention à « fonder » les mathématiques. Il peut également toucher l'interprétation *des mêmes objets*, en l'occurrence des

24 Yves André, *Leçons de Mathématiques contemporaines à l'IRCAM*, p. 104

25 Stewart Shapiro, *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*, Oxford University Press, Oxford 1991.

26 De fait, c'est là une lecture assez répandue des mathématiques « structurale » et il paraît effectivement difficile d'*identifier* une structure comme celle de « groupe », par exemple, à un objet du type « ensemble », même si tout groupe peut être *interprété* comme un ensemble. Cela tient au fait que nous voulons précisément que cette structure puisse valoir d'ensembles de natures très différentes, notamment en ce qui concerne leur cardinalité (ensembles finis ou infinis, groupes discrets ou continus). En identifiant la structure à l'ensemble, nous commettrions donc un abus de langage qui permet de se rapporter à toutes ces interprétations possibles dans un langage qui ne porterait plus sur des relations, mais sur des objets – ou, comme le dit Yves André, nous adoptons un langage « réaliste » commode pour parler « en fait » de systèmes de propriétés.

« ensembles ». Il existe notamment des versions purement catégoriques de ZFC, comme la « théorie algébrique des ensembles » (TAE) développée par Joyal et Moierdijk, ainsi que par Awodey, qui montrent que l'on peut se situer *dans un même cadre fondationnel* (au sens où il s'agit dans les deux cas d'exprimer ZFC) et se rapporter en apparence aux mêmes entités (les « ensembles » *au sens de ZFC*) selon deux interprétations (on voudrait dire « ontologies ») différentes. Comme l'indique Brice Halimi, la TAE « incarne une combinaison heureuse de théorie des ensembles et de théorie des catégories ». Et de préciser :

> D'un point de vue ensembliste, une application est un ensemble : il n'y a pas de flèche. Les seules flèches correspondent aux arêtes du graphe d'appartenance propre à l'univers ensembliste d'arrière-plan [..]. Le point de vue de la théorie algébrique des ensembles consiste, au contraire, à mettre en vedette les flèches, à l'aide du « foncteur de codomaine » — ce qui est une perspective typique de théorie des catégories. La théorie des catégories fibrées permet ainsi de ressaisir la théorie des ensembles *tout en la transformant en une théorie fondée sur les flèches plutôt que sur les objets*[27].

Ainsi la théorie algébrique des ensembles peut être décrite comme « la greffe de la théorie des catégories à ZFC, ce qui est bien plus fécond que la rivalité habituelle entre théorie des ensembles et théorie des catégories »[28].

Cette remarque s'inscrit dans une réflexion plus vaste sur le changement de point de vue opéré avec les catégories. Ainsi la théorie des *topos* — puisque c'est un aspect de la théorie des catégories auquel s'intéresse particulièrement Badiou — peut être vue, elle aussi, comme une « théorie des ensembles », mais *locale*[29]. Ici ce n'est plus au sens de ZFC, mais au sens où l'on extrait un noyau

27 Brice Halimi, « Sets and Descent », dans *Objectivity, Realism and Proof*, dirs. A. Sereni & F. Boccuni, pp. 123–142, Springer, Basel 2016. Ma traduction et mes italiques.

28 *Ibid.*

29 Un *topos* est une catégorie, c'est-à-dire une collection des flèches et d'objets, munie de propriétés additionnelles concernant l'existence de certaines flèches associées à la collection initiale. Une manière condensée de l'exprimer est de dire que cette catégorie possède toutes les limites et colimites finies, les exponentielles, ainsi qu'un objet distingué appelé « classificateur de sous-objets » (qui, comme son nom l'indique, permet de capturer au moyen de diagrammes l'idée qu'un objet est un « sous-objet » d'un autre). Les topos qui intéressent particulièrement Badiou sont les « topos de Grothendieck », un cas particulier de la définition générale précédente. Ils peuvent être définis comme des faisceaux d'en-

opératoire à *toute* « théorie des ensembles », y compris des versions plus faibles que l'axiomatique qui a fini par s'imposer au début du XXème siècle. C'est le point de vue qui a été développé notamment par J. Bell dans son livre *Toposes and local set theories*[30] (qui prolonge le point de vue initial de Lawvere sur l'idée qu'un topos exemplifie l'idée d'ensembles *variables*).

Dans un exposé précédent, j'avais essayé d'indiquer pourquoi cette idée d'une mathématique « locale » (par opposition aux mathématiques « absolues »)[31] peut être féconde et comment elle court-circuite ce qui peut apparaître chez Badiou comme un raccourci, à savoir l'alternative où il cherche souvent à enfermer son interlocuteur : « soit l'absolu, soit le relativisme ». De fait, la théorie des ensemble *locale* permet de donner un sens parfaitement bien déterminé à la notion de vérité locale et elle donne lieu non à un relativisme, mais à une théorie de la relativité (mathématique)[32]. Bien plus, l'idée de vérité « locale » paraît *présupposée* par la notion de vérité « absolue » plutôt que le contraire : dans le système de Badiou, appuyé très fortement sur l'idée de Cohen que l'on peut « forcer » certaines vérités dans des modèles de l'univers ensembliste, le point de départ est précisément que l'ensemble des vérités ne peut pas être déployé devant nous une fois pour toutes et *a priori*[33]. Une vérité doit apparaître *dans* un ou plusieurs mondes (c'est tout le sens du projet de *Logiques des mondes* d'expliciter les modalités de cette apparition). Son « absoluité » (au sens que donne Badiou aux vérités « éternelles ») est alors simplement postulée à partir du fait de sa réactivation possible dans d'autres mondes, voire dans tout autre monde

sembles sur un site (une généralisation des espaces topologiques). Sous ce point de vue, un topos est une manière de voir des ensembles qui varient d'une région à l'autre d'un espace et se recollent selon certaines règles de compatibilité.

30 J. L. Bell, *Toposes and local set theories: An introduction*, Oxford Logic, Guides: 14, Clarendon Press, Oxford 1988.

31 Bell lui-même en a développé le programme philosophique dans « From Absolute to Local Mathematics », *Synthese* 69 (3/1986), pp. 409–426. Voir mon analyse dans : « Tous ensemble ? Sur le rapport d'Alain Badiou aux mathématiques » dans *Autour d'Alain Badiou*, dirs. F. Tarby et I. Vodoz, pp. 81–102, Germina, Paris 2011.

32 Le parallèle avec la théorie de la relativité est au cœur de l'article de John Bell cité dans la note précédente. Voir également, René Guitart, « Caractère global et caractère local de la vérité », conférence donnée à la Lysimaque, 23 septembre 1990 (disponible sur le site de l'auteur : http://rene.guitart.pagesperso-orange.fr/preprints.html), en particulier p. 8 pour la référence à la théorie de la relativité et l'opposition relativité/relativisme.

33 C'est justement le point de départ de Bell dans l'article cité note précédente.

(c'est ce que Badiou présente comme une relecture de la doctrine cartésienne de la « création des vérités éternelles »)[34].

Je ne reviendrai pas sur ces discussions autour de l'approche « locale » des mathématiques ici et me concentrerai sur un autre point : la manière dont elle modifie le rapport entre multiplicité spatiale et multiplicité numérique. De fait, l'idée d'une théorie des ensembles « locales », et, plus simplement encore, le nom même de *topos*, suppose une forme de revanche du spatial dans la compréhension du « multiple pur », qui réactive la tension entre nombre et espace dans le paradigme ensembliste.

3. Espace et nombre, à nouveau

Le fait que les catégories, et en particulier la notion de *topos*, ait pu redistribuer les rapports entre nombre et espace, discret et continu, arithmétique et géométrie, etc., a été pointé par de nombreux auteurs, à commencer par l'inventeur de cette dernière notion, Alexandre Grothendieck. Je cite un passage bien connu de *Récoltes et Semailles* :

> C'est le thème du topos qui est ce « lit » où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures « discontinues » ou « discrètes ». Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonnances géométriques, une « essence » commune à des situations des plus éloignées les unes des autres[35].

[34] Les différents sens de l'absoluité, dans lesquels je ne peux entrer ici, sont au cœur du troisième tome de l'*Être et l'événement* intitulé *L'immanence des vérités*. Celui qui nous venons d'évoquer (qui se marque du fait qu'un événement se transcrit dans une œuvre dotée du maximum d'existence dans un monde) n'est qu'un aspect d'une absoluité qui s'atteste plus précisément du rapport qu'une œuvre de vérité entretient avec « l'absolu », c'est-à-dire « l'ensemble de tous les ensembles » – ou plus précisément avec un « attribut de l'absolu », dont l'œuvre témoigne par la structure intriquée des infinis qu'elle implique (voyez notamment le chap. VII de *l'Immanence des vérités*, Fayard, Paris, 2018).

[35] Alexander Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, p. 59. Ce texte est encore inédit, mais il est aisé de s'en procurer une version numérique sur divers sites internet (par exemple ici : https://webusers.imj-prg.fr/~leila.schneps/grothendieckcircle/recoltesetc.php).

On trouve des déclarations très similaires chez Mac Lane et Moerdijk, mais avec une référence additionnelle à Cohen qui n'est pas sans intérêt en contexte badiousien :

> Un aspect frappant de la théorie des topos est qu'elle unifie deux domaines mathématiques en apparence complètement distincts : la topologie algébrique et la géométrie algébrique, d'un côté, la logique et la théorie des ensembles de l'autre. De fait, un *topos* peut être considéré à la fois comme un « espace généralisé » et comme un « univers ensembliste généralisé ». Ces différents aspects ont émergé indépendamment vers 1963 : avec A. Grothendieck et sa reformulation de la théorie des faisceaux en géométrie algébrique, avec William F. Lawvere dans sa recherche d'une axiomatisation de la catégorie des ensembles et de celle d'ensembles « variables », et avec Paul Cohen dans son usage du forcing pour construire des nouveaux modèles de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel[36].

Le point sur lequel j'aimerais insister est l'évocation par Grothendieck d'une « essence commune » à des situations qu'il dit « les plus éloignées les unes des autres » – ou, chez Mac Lane et Moerdijk de l'unification de « deux domaines mathématiques en apparence complètement distincts ». Nous avons là un exemple typique de la manière dont on réinterprète un langage de surface en disant qu'*en fait* il ne parlait pas de ce qu'on croyait, qu'il y a derrière une « essence » cachée qui permet de saisir l'unité des « genres » d'être antérieurement distingués[37]. Bien plus, ce geste n'est pas sans affinité avec celui qui reprochait aux mathématiques grecques la scission maintenue entre discret et continu. Mais dans ce cas, ce n'est plus sur la mathématique ancienne que porte cette reformulation : elle porte *sur la mathématique ensembliste elle-même*. Grothendieck, pas plus que Lawvere, et tant d'autres mathématiciens auprès eux, ne croient que ZFC soit la meilleure manière d'exprimer des entités sous-jacentes à ce que le langage séparait encore le long de la frontière entre arithmétique et géométrie (soit *exactement le même argument* que celui que pouvait faire

[36] Saunders Mac Lane et Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic. A First introduction in topos theory*, Springer-Verlag, New York 1992, Prologue p. 1. Ma traduction.

[37] Ce vocabulaire de « l'essence cachée » est bien plus répandu en mathématiques qu'on ne pourrait le croire. Mark Wilson en a fait le ressort d'une analyse philosophique du discours mathématiques dans son article « Frege: The Royal Road From Geometry », *Noûs* 26 (2/1992), pp. 149 –180.

valoir un mathématicien « ensembliste » en se rapportant aux mathématiques anciennes !).

C'est en ce point, bien plus que dans le fait que la théorie des catégories nous livre en apparence une ontologie des relations plutôt que des objets, des morphismes plutôt que des éléments, que l'on devrait, me semble-t-il, faire porter la confrontation. Avant même de prétendre qu'elle nous livre une nouvelle vision de l'« ontologie » (qu'en sait-on si l'on s'en tient à son seul vocabulaire descriptif ?), nous devons dire que la théorie des catégories nous montre, une nouvelle fois, que ce que nous avions pris pour principe de l'élucidation ontologique ultime ne l'était pas et peut être reformulée à son tour dans une théorie dont l'objet apparent est différent (qui elle-même se trouvera reformulée dans d'autres langages qui modifieront éventuellement l'interprétation de la réalité visée, etc., etc. Nous en verrons un autre exemple sous peu)[38].

Dans la dernière partie de cet article, je voudrais développer plusieurs remarques relatives à ce constat. Tout d'abord, l'unification invoquée en lien avec l'émergence des *topos* nous conduit à relire le développement *de la théorie des ensembles elle-même*. De fait, la tension entre nombre (multiplicité numérique) et espace (topologique) pourrait y être *constitutive* (à la manière dont la reformulation ensembliste elle-même nous avait permis de voir que la coupure entre nombre et grandeur était *constitutive* de la rationalité mathématique grecque classique). La question centrale évoquée par Grothendieck et Mac Lane n'est pas de savoir si on décrit les objets mathématiques en termes d'éléments plutôt qu'en termes de flèches – elle est de savoir si on a manqué quelque chose de *l'unité* des objets mathématiques quand on les a décrit dans les termes d'une

[38] Remarquons que l'idée qu'une science est soumise à des progrès constants dans l'expression de la réalité qu'elle vise laisse ouverte plusieurs options métaphysiques. On peut y voir, bien sûr, un témoignage de l'existence d'une réalité immuable qui résiste à ces expressions, qui en forment autant d'approximations. Une telle position conduit assez naturellement à une forme de platonisme, dit parfois « naïf », que l'on retrouve chez nombre de mathématiciens au travail. Mais on peut aussi considérer que la position d'objet est immanente à l'expression elle-même et que sa « réalité » n'est pas à trouver dans une entité indépendante et séparée, mais dans le mécanisme de l'expression ou de la visée elle-même – une position qu'ont pu tenir nombre d'interlocuteurs de Badiou sous des formes très différentes (Desanti, Deleuze, certains relativistes d'inspiration wittgensteinienne ou latourienne).

théorie comme ZFC[39]. Et leur réponse est sans ambiguïté : on manque quelque chose de l'*essence commune* du nombre et de l'espace parce que les ensembles n'ont justement pas réussi à *vraiment* unifier ces deux types d'entités (c'est-à-dire autrement que dans un *langage* que la formulation catégorique aura permis de *dépasser*). Mais cela signifie notamment que l'ontologie sous-jacente à la théorie des ensembles (quelle qu'elle soit) n'est précisément *pas* exprimée adéquatement par ce langage. On peut certes contester cette affirmation. Mais il paraît difficile de le faire, comme semble y être contraint Badiou, en tenant *exactement la même position* à propos de la mathématique antérieure (qui exprimerait « en réalité » des multiples purs).

Un autre point particulièrement intéressant est que la tension entre multiplicité numérique et multiplicité spatiale, que la notion de *topos* est censée permettre de dépasser, rejoint une ligne de démarcation entre deux orientations *philosophiques*. On peut l'associer à deux propositions divergentes pour une « ontologie » du multiple pur telles que thématisées par Deleuze et Badiou. Badiou a lui-même mis en scène cette opposition à plusieurs reprises et fait valoir ce qu'il considère comme la faiblesse d'une position s'appuyant sur des intuitions spatiales originaires. Son argument est précisément que les modèles spatiaux, typiquement les modèles différentiels dont raffole Deleuze, apparaissent comme un cas très particulier de ce qu'on peut *exprimer* dans un cadre ensembliste[40]. De fait, tant qu'on reste confiné à un langage ensembliste, ce constat semble s'imposer. J'ai déjà eu l'occasion d'indiquer qu'il y a, cependant, une réponse possible à l'objection et que cette réponse consiste non pas à défendre la primauté du continu et du différentiel, comme l'ont fait nombre de deleuziens, mais à s'installer dans la tension entre discret et continu – une version du platonisme qu'a illustrée remarquablement la perspective d'Albert Lautman dont se réclame justement Deleuze (tandis que Badiou serait plutôt, à mon sens, du côté de l'héritage de Jean Cavaillès). Je voudrais revenir brièvement sur cette réponse dans le cadre que j'ai retracé ci-dessus où c'est le langage ensembliste

---

39 On peut d'ailleurs remarquer, comme y a insisté Bernard Vitrac dans sa traduction des *Éléments*, qu'Euclide dispose déjà d'un langage « commun » qui lui permet de décrire les nombres et les grandeurs (par exemple à partir de la notion de « multiplicité »/*pléthos*, mais aussi des rapports tout/parties, ajouter/soustraire, etc.).

40 Voir, outre son *Deleuze : La clameur de l'être* (Hachette Littératures, Paris 1997), l'article donné par Alain Badiou pour le numéro spécial « Badiou/Deleuze » de la revue *Futur Antérieur* (43, avril 1998) sous le titre : « Un, multiple, multiplicité(s) ».

lui-même qui s'avère porter cette tension. Enfin, je voudrais indiquer en conclusion que le développement récent des mathématiques accompagne, comme on pouvait s'y attendre un nouveau changement de paradigme dont la philosophie n'a pas encore pris toute la mesure et qui revisite à son tour la reformulation catégorique elle-même (au sens de Grothendieck et Mac Lane), pour la ressaisir à un niveau d'unification « supérieur ». Or, comme j'y insisterai en conclusion, la référence spatiale y tient une place encore plus prépondérante que dans le cadre toposique.

Sur le premier point, je passerai vite puisque j'y ai déjà fait allusion en rappelant les travaux de Cantor et leur réception, mais il est important de voir que le langage ensembliste se prête immédiatement à deux formes de thématisations différentes, que l'on peut dire « topologique » et « ordinale »[41]. Quand on suit la préhistoire de la Théorie des ensembles, on ne peut qu'être frappé de constater que cette thématisation est déjà présente chez Riemann dans un passage célèbre sur les *mannigfaltichkeiten*. Or ce passage se trouve être également le point de départ de Deleuze dès *le Bergsonisme* (1966) :

> Les concepts de grandeur ne sont possibles que là où il existe un concept général qui permette différents modes de détermination. Suivant qu'il est, ou non, possible de passer de l'un de ces modes de détermination à un autre, d'une manière continue, ils forment une multiplicité continue ou une multiplicité discrète. [...] Une partie d'une multiplicité, séparée du reste par une marque ou par une limite, s'appelle un quantum. La comparaison des quanta au point de vue de la quantité, s'effectue, pour les grandeurs discrètes, au moyen du dénombrement ; pour les grandeurs continues, au moyen de la mesure. La mesure consiste dans une superposition de grandeurs à comparer ; il faut donc, pour mesurer, avoir un moyen de transporter la grandeur qui sert d'étalon de mesure pour les autres. Si ce moyen manque, on ne pourra alors comparer entre elles deux grandeurs, que si l'une d'elles est une partie de l'autre, et encore, dans ce cas, ne pourra-t-on décider que la question du plus grand ou du plus petit, et non celle du rapport numérique. Les recherches auxquelles un tel cas peut donner lieu forment une

[41] En fait, on devrait dire trois en ajoutant la thématisation algébrique dont Dedekind s'emparait au même moment. Cela permettrait, par ailleurs, de rappeler le souvenir des trois « structures mères » bourbakistes (algébrique, topologique et d'ordre). Mais je laisserai cette troisième thématisation de côté parce que sa jonction avec la seconde a été immédiate et s'est plus facilement opérée.

> branche générale de la théorie des grandeurs, indépendante des déterminations métriques, et dans laquelle elles ne sont pas considérées comme existant indépendamment de la position, ni comme exprimables au moyen d'une unité, mais comme des régions dans une multiplicité[42].

Le point clef est que ces différentes thématisations ont conduit, entre autres choses, à des axiomatiques distinctes comme celle de l'arithmétique transfinie cantorienne d'un côté, formalisée par Zermelo et ses successeurs (qui conduit à « ZFC »), et celle de la topologie ensembliste formalisée initialement par Hausdorff et Weyl de l'autre (qui conduit à la définition en termes de régions ou de « voisinages » des variétés, puis plus généralement des « espaces topologiques »).

Le fait que la première axiomatise en général le *langage* des ensembles dans lequel se trouve *exprimée* la seconde (comme on le voit chez Hausdorff, mais pas chez Weyl) peut d'abord donner l'impression qu'on a affaire à une unification *ontologique*. Mais cette impression doit être nuancée par deux remarques importantes. La première est que les différentes propriétés des espaces topologiques qui vont alors émerger comme centrales (connexité, compacité, continuité, etc.) ne paraissent pas analytiquement dérivables, pour reprendre le vocabulaire kantien, du concept de multiplicité pure – à la différence de ce qui se passe pour les concepts numériques. Autant il est aisé de dériver du concept pur de « multiple » ou d'« ensemble » l'idée de zéro et de successeur, puis d'édifier progressivement sur cette base *tous* les systèmes de nombres (à l'aide d'un certain nombre de fonctions et de relations), ainsi que leurs structures opératoires, autant il paraît difficile d'en tirer l'idée qu'un espace est, par exemple, « d'un seul tenant » (« simplement connexe »).

Pour l'expliquer, prenons, à nouveau, un exemple élémentaire : peut-on dire que les entiers naturels forment un ensemble « d'un seul tenant »? Peut-on dériver cette propriété de l'analyse conceptuelle de cette multiplicité ? La réponse va dépendre des régions que nous allons considérer. Car le multiple « entiers naturels » ne porte avec soi aucune indication des « régions » qu'on peut y discerner. Si, par exemple, l'ensemble lui-même est la seule région considérée

---

42 Bernhard Riemann, « Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie », *Œuvres mathématiques*, trad. Laugel, Gauthier-Villars, Paris 1898, p. 282.

(avec la région « vide »), il va sans dire qu'il est d'un seul tenant ! C'est ce qu'on appelle aujourd'hui la « topologie grossière » (de fait, *tout ensemble* muni de la topologie grossière est simplement connexe). Si, en revanche, nous considérons l'ensemble des entiers comme « héritant » de la topologie usuelle de la droite numérique réelle dans laquelle nous avons l'habitude de le voir plongé (les « régions » sont donc les points à coordonnées entières sur la droite), alors l'ensemble des entiers naturels sera cette fois … totalement déconnecté ! Il sera même le prototype d'espace *discret*. Cette situation crée des phénomènes intrigants pour ceux qui peinent à distinguer ces thématisations et dont la valeur pédagogique est bien connue. Ainsi, on apprend aux débutants qu'un ensemble comme le « triadique » de Cantor peut avoir la puissance du *continu* (selon la thématisation numérique), alors qu'il est pourtant *discontinu* (selon la thématisation topologique)[43]. On leur apprend également à munir la droite réelle de topologies différentes de la topologie usuelle, par exemple d'une topologie qui la rende « non séparée », c'est-à-dire dans laquelle la condition *partes extra partes* n'est pas satisfaite – alors même que la droite réelle apparaît comme le cas le plus simple, à une dimension, de l'espace « ordinaire », caractérisé par le fait que l'on peut y découper des parties extérieures les unes aux autres (*partes extra partes*). Il est d'ailleurs possible de munir la droite réelle d'une topologie qui la rende « discrète », par un procédé symétrique à celui par lequel on avait rendu les entiers « d'un seul tenant » : il suffit de prendre tous les points comme « régions » de notre découpage. Le simple fait que l'on puisse ainsi munir un « multiple » de différentes topologies, aux propriétés incompatibles entre elles, montre bien qu'il ne saurait s'agir d'une dérivation « analytique » au sens kantien (les différentes propriétés considérées ne sont pas dérivables du seul concept du multiple considéré).

La seconde remarque, plus historique, tient au constat suivant : l'idée que les espaces topologiques soient de *nature* ensembliste fut immédiatement l'objet de doute de la part de certains mathématiciens, souvent issus de la tradition de la topologie algébrique, qui considéraient que la structure topologique proprement dite était indépendante de cette expression (comme ils en faisaient eux-mêmes l'expérience en analysant ces espaces sans les concevoir comme des en- 273

[43] C'est la raison pour laquelle Cantor objecta justement à Dedekind que la propriété de complétude (numérique) ne pouvait suffire à définir la continuité géométrique et qu'il fallait également y adjoindre des propriétés de connexité.

sembles de points). J'y ai déjà fait allusion au titre des controverses qui agitèrent les pères fondateurs : nombre d'entre eux considéraient, en effet, la machinerie cantorienne des ordinaux transfinis comme dénuée d'utilité et marquant plutôt le fait que la théorie du multiple pur, prise pour elle-même, nous égarait dans des abstractions sans signification (le même reproche qu'on fit par la suite à la théorie des catégories prise pour elle-même et qualifiée alors d'*abstract nonsense*). Ce mouvement fut notamment à l'origine de l'idée d'une topologie qui se ferait « sans points » (*pointless topology*)[44]. Or cette remarque historique n'est pas anodine dans notre développement puisque les « mondes » que considère Alain Badiou dans *Logiques des mondes* sont adossés à des structures qui généralisent celle d'espace topologique et que l'on peut justement exprimer par la structure algébrique sous-jacente de leurs régions (« l'algèbre de leurs ouverts »). Dans le cas d'espèce, elles forment la structure logico-algébrique d'« algèbre de Heyting complète »[45]. Mais cette structure est précisément celle qui s'est révélée être un objet privilégié de... la topologie *sans points* (c'est-à-dire qu'elle peut être exprimée entièrement *sans évoquer la notion d'ensemble*). C'est d'ailleurs un des problèmes théoriques majeurs de *Logiques des Mondes* que le dispositif ne force nullement le caractère ensembliste des structures décrites et que cette contrainte doive donc être *ajoutée* par un postulat *ad hoc* (que Badiou appelle « postulat du matérialisme »)[46].

Il est très intéressant que *Logiques des mondes* choisisse délibérément une présentation logique et ensembliste du cadre dans lequel sont censé varier les ensembles lorsqu'ils « apparaissent » et n'introduise l'approche topologique de ce même cadre que dans un second temps, au chapitre III, tout en confessant que cette dernière est néanmoins « plus fondamentale »[47]. Mais pourquoi préciser qu'elle est « plus fondamentale » ? Une étude fine du dispositif montre qu'il ne s'agit pas là d'une facilité de formule. De fait, on a *besoin* de cette présentation spatiale pour comprendre la structure de monde non pas seulement comme variation de l'apparaître par rapport à une grille d'évaluation, mais comme *recol-*

[44] Voir l'article de Bélanger et Marquis, « Menger and Nöbeling on pointless topology ».

[45] Pour une présentation générale du formalisme de *Logiques des mondes*, je me permets de renvoyer à : « Objet, relation, transcendantal. Une introduction au formalisme de *Logiques des mondes* » dans *Autour de « Logiques des mondes »*, dirs. D. Rabouin, O. Feltham et L. Lincoln, Editions des Archives contemporaines, Paris 2011.

[46] Badiou, *Logiques des mondes*, p. 264.

[47] *Ibid.*, p. 267.

lement de ces informations, c'est-à-dire, en vocabulaire mathématique, comme « faisceau ». Cet aspect occupe l'essentiel de la partie III consacrée à ce que Badiou désigne par l'expression curieuse (dans son système) d'« onto-logique ». C'est ce qui permet de construire tout « monde » comme « topos de Grothendieck », c'est-à-dire comme catégorie de faisceaux d'ensembles (sur un site)[48]. Le point clef est alors le suivant : pour construire un « monde » au sens de Badiou, il ne suffit pas d'avoir une grille de valeurs à partir de laquelle évaluer les variations des existants (un « transcendantal » dans le vocabulaire de *Logiques des mondes*), encore faut-il aussi que ces variations soient *cohérentes entre elles* et, pour cela, qu'elles satisfassent à des conditions de *recollement*.

Ici s'ouvrent de nombreuses questions que je vais essayer de formuler brièvement en guise d'ouverture à cette étude et en restant le plus possible, comme auparavant, *à l'intérieur* du système d'Alain Badiou :

1. Tout d'abord, il devient alors particulièrement clair que la construction des « mondes », comme structure d'apparaître de l'être, s'est faite par un certain nombre de choix philosophiques qui déborde le simple choix d'un fondement ensembliste et opère parmi les objets mathématiques considérés comme pertinents. En particulier, on n'a pas choisi n'importe quel *topos*, mais un *topos* qui se laisse exprimer sous *une certaine forme spatiale* (qu'on dit « localique »). Mais comment justifier un tel choix si d'autres *topos* apparaissent non pas dans la théorie *abstraite* des catégories, à titre de purs possibles non réalisés, mais dans des situations mathématiques réalisées ?[49] Si « les mathématiques sont l'ontologie », en effet, il n'y a aucun moyen de balayer ces apparitions (qui ne correspondent pourtant pas à la définition d'un « monde ») comme n'étant pas « réelles »[50]. Autant on peut comprendre que la théorie des catégories abstraite puisse être décrite comme une logique

[48] Un site est une catégorie équipée d'une topologie de Grothendieck. Il fournit une généralisation de la notion d'espace topologique opérée à partir de l'idée centrale de « recouvrement ». Pour une description technique, mais accessible, voir Antti Veilahti, « Alain Badiou's mistake. Two postulates of dialectic materialism », arXiv: 1301.1203, p. 19 (https://arxiv.org/abs/1301.1203, consulté le 15 mars 2020).

[49] Pour les détails techniques, voyer l'article d'Antti Veilahti cité dans la note précédente.

[50] Si j'étudie, par exemple, les actions d'un groupe discret G, les G-ensembles forment un topos BG (dit « topos classifiant » de G) qui n'a aucune raison d'être localique. Je remercie Mathieu Anel pour m'avoir indiqué cet exemple lors d'une de nos discussions sur les topos.

générale des mondes possibles tant elle s'aventure souvent dans des terres où la mathématique « ordinaire » ne semble pas pénétrer[51], autant on ne comprend pas très bien que certains de ces possibles abstraits apparaissent dans les mathématiques ordinaires, lieu même de « l'ontologie », *sans* satisfaire aux réquisits de ce qu'est un « monde ». Par contraste, on voit que les contraintes spatiales sont impensées dans ce modèle, alors même que ce sont elles qui forcent, en dernière instance, la structure de ce qui est acceptable ou non (par le philosophe).

2. D'où une deuxième remarque importante : comment justifier que « l'ontologique », ou structure de l'apparaître, coïncide précisément pour Badiou avec un processus de *spatialisation* ? C'est un problème qui hante la philosophie depuis Platon au titre de la *chôra*, mais qui n'en est pas moins un point aveugle de tout platonisme, celui de Badiou comme celui de son maître. L'espace vient suturer l'écart entre l'être et l'apparaître en situant la manifestation de l'être *quelque part*. Et c'est le même problème qui resurgit jusqu'à Kant dans le fait que la donation intuitive doit se faire via la forme-espace, alors même que la dérivation de cette prétendue « nécessité » mobilise déjà toute une entente *préalable* de la spatialité, à commencer par celle qui permet de distinguer entre un sens « interne » et un sens « externe ». La « forme-espace » ne peut advenir que sur la donnée préalable d'une extériorité qui ne peut pourtant advenir dans aucune « forme-espace » (puisqu'elle est antérieure à sa possibilité même). Derrière se terre le problème, dans un vocabulaire que reprend Badiou lui-même dès l'époque de l'*Être et l'événement*, du passage de l'être à l'« être-là ». Dit autrement : pourquoi la forme générale de la manifestation doit-elle s'opérer par une forme de spatialisation (le « là » de l'être-là), alors même que la doctrine générale de la manifestation relègue l'espace à n'être qu'une forme *particulière* de ce qui se manifeste ?

Ces remarques, qu'on pourrait développer bien plus avant, me conduisent aux deux aspects auxquels je souhaitais parvenir : tout d'abord, on voit que si les mathématiques elles-mêmes évoluent vers une conception où la spatialité n'a pas un statut *dérivé* par rapport à une ontologie fondamentale, mais au contraire *constitutif* – alors la difficulté va se trouver aggravée. Or c'est bien ce à

[51] Alain Badiou, *Court traité d'ontologie transitoire*, Seuil, Paris 1998, p. 198.

quoi a conduit le développement libre (hors des choix philosophiques forcés par Badiou) de la théorie des topos et la question qui s'est ouverte progressivement de formes d'unité de niveau « supérieur » entre nombre et espace, arithmétique et géométrie. Cette idée a notamment donné lieu à l'émergence d'une prise en compte du caractère irréductiblement spatial de *toutes* les relations mathématiques, *à commencer par les flèches du catégoricien*. J'y reviendrai brièvement en conclusion de cette étude, mais on peut noter dès à présent que le pas est considérable par rapport à une première approche où certaines catégories (typiquement les « topos ») étaient censées capturer l'essence de la spatialité (par différence avec d'autres).

L'autre aspect est évidemment lié à la querelle Badiou-Deleuze. Comme je l'ai rappelé, Badiou a objecté à Deleuze que son entente des multiplicités était limitée à cause de son attachement à des intuitions originaires spatialisantes. C'est la même critique que pourrait faire Kant à quelqu'un qui prétendrait que l'espace est une structure de la pensée elle-même (et non seulement de l'intuition sensible) et qui se verrait objecter que le domaine de la pensée est bien plus vaste que ce qui s'en exprime via la forme-espace. Mais, comme l'avait déjà objecté le mathématicien Johann Heinrich Lambert[52], l'entente de l'espace à laquelle s'adosse cette réponse repose sur le refoulement préalable de tout un régime de spatialité attaché à la structure de l'être en tant que se manifestant[53]. On cherchera alors à rabaisser cette intervention originaire du spatial au rang de simple métaphore (c'est la stratégie que suit Badiou dans *Logiques des mondes* en présentant d'abord les structures spatiales de l'apparaître dans leur expression logique et algébrique et en ne recourant au vocabulaire topologique que dans un second temps, comme une manière imagée de les exprimer). Mais reste alors à expliciter le sens *littéral* qui rendrait la métaphore inopérante et, en particulier, lorsque l'on parvient à ce sens « plus fondamental » de la spatialisation où elle ne sert pas seulement à exprimer les variations, mais à en assurer la cohérence.

52 Emmanuel Kant, *Correspondance*, Vrin, Paris 1991, p. 79.

53 C'est la même réponse que pourrait faire un spinoziste, comme j'y ai insisté dans d'autres études (*Vivre Ici*, PUF, Paris 2010) : si l'espace et la pensée sont deux attributs distincts de l'être, cela ne signifie pas qu'on puisse concevoir un excès de l'un sur l'autre. Il n'y a rien de la pensée qui ne soit exprimable dans la spatialité et réciproquement : c'est tout le sens du mal-nommé « parallélisme » spinoziste.

Conclusion

En guise de conclusion, je voudrais indiquer quelques prolongements possibles à mes questions initiales.

Tout d'abord, si l'on considère que les ensembles forment d'abord un langage pour décrire l'être mathématique, alors on constate aisément qu'un des avantages de la théorie des catégories est précisément, indépendamment de toute question fondationnelle, d'offrir un nouveau langage dans lequel la référence à des « ensembles » est préservée, mais étendue à des situations nouvelles. Ici une question naturelle est donc : y a-t-il des situations mathématiques que les catégories permettent d'exprimer *mieux* que ce que faisait le vocabulaire ensembliste ? La réponse est indéniablement oui. Tel fut même le principal moteur du développement de cette théorie (exactement de la même façon qu'un grand succès de la théorie des ensembles fut de pouvoir exprimer des situations qui étaient inaccessibles au *langage* de la « grandeur »). Le lieu prototypique de déploiement de ce langage a été, et est toujours, la topologie algébrique. Pour prendre l'exemple le plus célèbre, il paraît très difficile d'exprimer ce qu'est une homologie *en général* ou une homotopie *en général* (« homotopie supérieure ») sans passer par ce langage – même si, bien entendu, on peut toujours trouver des situations ensemblistes où l'on pourra exprimer ces différentes notions dans des contextes particuliers (puisque c'est dans ces contextes qu'elles ont émergé).

Ceci conduit à une seconde remarque : la topologie contemporaine, et tout particulièrement la théorie de l'homotopie, offre ici un triple défi dont il faut prendre acte et qui reste à penser par la philosophie. Tout d'abord, ses constituants de base, les « types d'homotopie » ne se laissent pas bien exprimer dans un cadre extensionnel. Ce point peut être rendu précis au moyen d'un théorème qui montre que la catégorie associée ne peut pas être rendue « concrète » (c'est-à-dire qu'elle ne peut pas être plongée « fidèlement » dans celle des ensembles)[54]. Comme l'a indiqué Jean-Pierre Marquis, un des rares philosophes à s'être pen-

[54] On dit qu'un foncteur entre deux catégories est « fidèle » si l'application qui associe les morphismes de la première à leurs images dans la seconde est injective. Plus intuitivement (mais aussi moins précisément), la seconde catégorie représente « fidèlement » la première, car elle n'identifie pas des morphismes distincts de la première. Le théorème mentionné est dû à Peter Freyd (1969) dans le cas de la catégorie homotopique *htop* (généralisé depuis aux catégories de modèles) et il indique donc que la catégorie des ensembles ne représente pas fidèlement les types d'homotopie.

ché sur ces questions, nous semblons alors quitter les rives de la mathématique « extensionnelle »[55]. Or, comme il le rappelle également, certains mathématiciens considèrent, non sans arguments, que les « types d'homotopie » sont aux formes spatiales ce que les nombres premiers (d'ailleurs non moins mystérieux) sont aux nombres entiers : des sortes de « composants ultimes » qui en règlent les structures fondamentales. Sous ce point de vue, le fait que l'on ait pu exprimer les nombres entiers ou l'espace au moyen du langage ensembliste n'atteint pas pleinement à la nature « profonde » de ces objets, parce qu'il n'a pas prise sur leurs « composants ultimes ».

Ensuite, la perspective homotopique s'est développée jusqu'à pouvoir se présenter comme un véritable *changement de paradigme* permettant d'exprimer des situations *généralisant* ce qu'exprimaient l'égalité extensionnelle et les isomorphismes des catégories « simples »[56]. Nous ne sommes donc déjà plus au moment où les catégories viendraient contester la prééminence du langage ensembliste, mais au moment suivant où ce sont ces mêmes catégories qui peuvent désormais être ressaisies à un niveau « supérieur ». Le phénomène tout à fait remarquable, au regard des développements qui précèdent, est que ce point de vue « supérieur » se fasse précisément par une *accentuation du caractère spatial* conféré aux entités fondamentales : les flèches des catégories simples étaient, en effet, réglées par un principe d'identification donnée par les isomorphismes, mais *vues comme objets spatiaux*, elles peuvent également être vues comme des « chemins » entre les objets, que l'on peut ou non déformer les uns dans les autres. Dans ce cas, c'est la notion d'homotopie qui fournit le bon critère d'identification, la notion d'isomorphisme apparaissant comme une manière d'écraser (ou de « tronquer ») la richesse des diverses possibilités données pour identifier des chemins entre eux.

55 Jean-Pierre Marquis, « Mathematical forms and forms of mathematics: leaving the shores of extensional mathematics », *Synthese* 190 (2013) pp. 2141–2164.

56 L'expression est de Bertrand Toën : « Very briefly, the expression homotopical mathematics reflects a shift of paradigm in which the relation of equality relation is weakened to that of homotopy », phrase qu'accompagne la note suivante : « It is is very similar to the shift of paradigm that has appeared with the introduction of category theory, for which being equal has been replaced by being naturally isomorphic » (Bertrand Toën, « Derived algebraic geometry », *EMS Survey in Mathematical Sciences* 1 (2014), pp. 153–240.

Je cite à ce propos un des tenants de ce « changement de paradigme » en géométrie, qui va jusqu'à proposer de substituer au nom de « mathématique », trop associé aujourd'hui au paradigme structural ensembliste, celui de « mathématiques homotopiques » (dont il faut bien comprendre qu'elles ne constitueraient donc pas une forme *particulière* des « mathématiques », mais au contraire une extension)[57] :

> Tout au long de ce travail, j'ai aussi essayé de montrer que les résultats de ce mémoire ne sont pas du tout indépendants les uns des autres et qu'ils appartiennent tous au domaine de la mathématique homotopique. Les mathématiques sont fondées sur la théorie des ensembles et la notion de structure (au sens de Bourbaki), tandis que dans les mathématiques homotopiques, les ensembles sont remplacés par les types d'homotopie et les structures se trouvent alors enrichies sur la théorie homotopique des espaces [...]. La philosophie générale (qui est probablement assez ancienne et, je suppose, remonte à Bordman, Dwyer, Kan, Quillen, Thomason, Waldhausen, Vogt, ...) semble être qu'une grande partie des mathématiques possède des extensions intéressantes et utiles dans le contexte des mathématiques homotopiques.[58]

Ceci permet finalement de revenir mieux informé au débat que j'ai évoqué entre l'approche de Badiou et celle de Deleuze sur les « multiplicités ». De ce qui précède, on peut, en effet, conclure qu'il y a deux façons assez différentes d'entendre le doublet multiplicité discrète/multiplicité continue. La première consiste à y voir le motif d'un choix philosophique en termes de « fondements ». Il s'agirait alors de choisir laquelle de ces deux voies a la priorité sur l'autre. C'est ainsi que s'y rapporte Badiou en faisant valoir que le langage ensembliste porte bien plus de possibilités que ce que sa prise dans certains modèles géométriques pourrait laisser croire. Il objecte alors à Deleuze de s'être lié les mains en ne se plaçant pas immédiatement au degré le plus grand de généralité. À l'opposé, on pourrait rappeler les déclarations de René Thom sur la primauté irréductible du continu, et celles de son principal défenseur en philosophie des mathématiques : Jean Petitot.

---

57 Pour bien comprendre cet énoncé, il faut bien garder à l'esprit que les catégories homotopiques ne sont pas « concrètes » (c'est-à-dire qu'elles ne se laissent pas représenter fidèlement par des structures sur des ensembles).

58 Bertrand Toën, *Homotopical and Higher Categorical Structures in Algebraic Geometry*, arXiv:math/0312262, consulté le 16 mars 2020, ma traduction.

Alain Badiou et Jean Petitot considèrent tous les deux – l'un pour le critiquer et l'autre pour le défendre – que ce sont les positions de Deleuze lui-même. À mon sens, tel n'est pas le cas. Deleuze ne choisit pas un des modèles comme « meilleur » que l'autre, mais part de la dualité elle-même des formes du multiple, telle que l'évoquait Riemann. C'est même là une des bizarreries de son interprétation de Bergson, puisqu'il reverse la coupure entre deux types de multiplicités *à l'intérieur des mathématiques* – alors que Bergson cherchait plutôt à y fonder la différence irréductible entre une approche mathématisante du qualitatif (plus tard de la « durée ») et un régime de multiplicités « intensives » qui échapperait *de jure* à la mathématisation. Il y a là un trait constant de l'œuvre de Deleuze auquel on n'a pas prêté suffisamment attention : à chaque fois qu'il pose un modèle continu (et même souvent différentiel), il l'accompagne d'un autre modèle discontinu censé exprimer *la même réalité*[59]. Ceci s'accorde avec sa conception « lautmanienne » des mathématiques et une ontologie qui serait celle des idées-problèmes, et non des idées-propositions[60]. Par rapport aux questions qui nous ont intéressés dans cette étude, il s'agit d'une manière radicalement différente d'investir le rapport entre expression et ontologie en prenant acte de la labilité de la référence et en reversant l'ontologie proprement dite *dans le mécanisme même d'expression* (comme articulation d'un plan d'expression et d'un plan de contenu).

C'est ce que Deleuze lui-même a appelé une logique non de l'être, mais du sens. Sa grande thèse sur Spinoza avait d'ailleurs déjà indiqué comment cette logique peut s'exprimer métaphysiquement en reversant toute la part de l'expression *dans l'ontologie elle-même*[61]. En ce point, la position de Deleuze paraît à même d'affronter les difficultés que nous avons soulevées pour commencer. Plutôt que de vouloir résorber l'écart entre langage et être, elle s'y installe pour identifier l'ontologie au mécanisme de l'expression et en faire une véritable « logique du sens ». Plutôt que de mettre espace et pensée face à face, elle s'installe dans leur parallélisme et leur articulation mouvante, toujours reconfigurée. Plutôt que de rigidifier l'espace selon une norme absolue qui l'assignerait au rang d'objet

59 Ainsi du pli de René Thom et des fractales de Mandelbrot, de la variété de Riemann et du tapis de Sierpinski, etc., cf. David Rabouin, « Un calcul différentiel des idées ? Note sur le rapport de Deleuze aux mathématiques », *Revue Europe* 996 (avril 2012), numéro spécial Deleuze, sous la direction de E. Grossmann et P. Zaoui, pp. 140–153.

60 Gilles Deleuze, *Différence et répétition*, PUF, Paris 1968, chap. IV.

61 Gilles Deleuze, *Spinoza et le problème de l'expression*, Les Éditions de Minuit, Paris 1968.

pour la pensée, elle se donne les moyens de s'ouvrir aux multiples formes discordantes de sa variabilité locale et de son expressivité (constitutive de ce qu'est « penser »). La tension entre espace et nombre n'y apparaît plus alors comme un problème à résoudre, mais comme un problème *sous la condition duquel* nous pensons. Que ce problème résiste, à n'en plus finir, à toutes les tentatives de le réduire, y compris en mathématiques, paraît d'ailleurs le meilleur témoignage de la fécondité de ces vues.

Références

André, Yves, *Leçons de Mathématiques contemporaines à l'IRCAM*, IRCAM, France 2009, archives ouvertes: https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-01359200/document (consulté le 25 janvier 2020)

Aristote, *Seconds Analytiques*. *Organon IV*, trad. fr. P. Pellegrin, GF, Paris 2005

Badiou, Alain, *Court traité d'ontologie transitoire*, Seuil, Paris 1998

— *Deleuze : La clameur de l'être*, Hachette Littératures, Paris 1997

— *Le concept de modèle*, Maspéro, Paris 1969

— *L'Être et l'Événement*, Seuil, Paris 1988

— *l'Immanence des vérités*, Fayard, Paris 2018

— « Un, multiple, multiplicité(s) », *Futur Antérieur* 43 (avril 1998)

Bélanger, M. et J.-P. Marquis, « Menger and Nöbeling on pointless topology », *Logic and Logical Philosophy* 22 (2/2013), pp. 145–165.

Bell, J. L., *Toposes and local set theories: An introduction*, Oxford Logic, Guides: 14, Clarendon Press, Oxford 1988

— « From Absolute to Local Mathematics », *Synthese* 69 (3/1986), pp. 409–426

— « Tous ensemble ? Sur le rapport d'Alain Badiou aux mathématiques », dans *Autour d'Alain Badiou*, dirs. F. Tarby et I. Vodoz, pp. 81–102, Germina, Paris 2011

Baire, René/Borel, Emile, *Lettres de René Baire à Émile Borel, Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* 11 (1990), pp. 33–120

Borrelli, Vincent, « Gnash, un tore plat ! », *Images des Mathématiques*, CNRS, 2012, disponible à: https://images.math.cnrs.fr/Gnash-un-tore-plat.html (consulté le 15 mars 2020)

Deleuze, Gilles, *Différence et répétition*, PUF, Paris 1968

— *Spinoza et le problème de l'expression*, Les Éditions de Minuit, Paris 1968

Desanti, Jean-Toussaint, « Quelques remarques à propos de l'ontologie intrinsèque d'Alain Badiou », *Les Temps Modernes* 45 (526/1990), pp. 61–71

Euclide, *Les Éléments*, trad. fr. Bernard Vitrac, PUF, Paris, 1990-2001

Rabouin, David, « Objet, relation, transcendantal. Une introduction au formalisme de *Logiques des mondes* » dans *Autour de « Logiques des mondes »*, dirs. D. Rabouin, O. Feltham et L. Lincoln, Editions des Archives contemporaines, Paris 2011

Ferreirós, José, *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin 1999

Gispert, Hélène, « La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905 : Baire, Borel, Lebesgue... et tous les autres », *Revue d'histoire des mathématiques* 1 (1/1995), pp. 39–81

Grothendieck, Alexander, *Récoltes et Semailles,* disponible à: https://webusers.imj-prg.fr/~leila.schneps/grothendieckcircle/recoltesetc.php

Guitart, René, « Caractère global et caractère local de la vérité », conférence donnée à la Lysimaque, 23 septembre 1990, disponible sur le site de l'auteur : http://rene.guitart.pagesperso-orange.fr/preprints.html

Halimi, Brice, « Sets and Descent », dans *Objectivity, Realism and Proof*, dirs. A. Sereni & F. Boccuni, pp. 123–142, Springer, Basel 2016

Kant, Emmanuel, *Correspondance*, Vrin, Paris 1991

Kantor, Jean-Michel et Loren Graham, *Au nom de l'infini*, Éditions Belin, Paris 2010

Klein, Jacob, « *Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra* (1934/1936) », dans *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Abteilung B: Studien. Band 3, Erstes Heft, pp. 18–105, Springer, Berlin 1934

— *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Zweites Heft, pp. 122–235, Springer, Berlin 1936

Mac Lane, Saunders et Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic. A First introduction in topos theory*, Springer-Verlag, New York 1992

Marquis, Jean-Pierre, « Mathematical forms and forms of mathematics: leaving the shores of extensional mathematics », *Synthese* 190 (2013) pp. 2141–2164

Niccolò Guicciardini, *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts 2009

Putnam, Hilary, « Langage et réalité [1975] », dans *Textes clés de philosophie des sciences, Vol. 2*, dirs. S. Laugier et P. Wagner, pp. 61–104, Vrin, Paris 2004
— « Explication et référence » dans *De Vienne à Cambridge*, dir. P. Jacob, Gallimard, Paris 1980, pp. 337–365

— « What is Mathematical Truth? », dans Hilary Putnam, *Mathematics, Matter and Method. Philosophical Papers*, vol. 1, pp. 60–78, Cambridge University Press, Cambridge 1975

Rabouin, David, « Un calcul différentiel des idées ? Note sur le rapport de Deleuze aux mathématiques », *Revue Europe* 996 (avril 2012), pp.140–153

Roy, Jean-Michel, *Écrits de logique philosophique*, PUF, Paris 1989, pp. 203–218

Riemann, B., « Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie », *Œuvres mathématiques*, trad. Laugel, Gauthier-Villars, Paris 1898

Russell, Bertrand, « On denoting », *Mind* 14 (56/1905), pp. 479–493

Stewart Shapiro, *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*, Oxford University Press, Oxford 1991

Stevin, Simon, *Arithmétique*, (1585) », dans *The Principal Works of Simon Stevin*, dirs. E. Crone, E.J. Dijksterhuis, R.J. Forbes et al., 6 vol., t. 2 B, N. V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam 1955–1966

Toën, Bertrand, « Derived algebraic geometry », *EMS Survey in Mathematical Sciences* 1 (2014), pp. 153–240

— *Homotopical and Higher Categorical Structures in Algebraic Geometry*, arXiv:-math/0312262 (consulté le 16 mars 2020)

Veilahti, Antti, « Alain Badiou's Mistake. Two Postulates of Dialectic Materialism », arXiv: 1301.1203, displonible à: https://arxiv.org/abs/1301.1203 (consulté le 15 mars 2020)

Wilson, Mark, « Frege: The Royal Road From Geometry », *Noûs* 26 (2/1992), pp. 149–180.

Filozofski vestnik | Volume XLI | Number 2 | 2020 | 285–308 | DOI: 10.3986/FV.41.2.11

Norman Madarasz*

Beyond Recognition: Badiou's Mathematics of Bodily Incorporation

By placing Alain Badiou's philosophy under the sign of thinking infinity, the splendor, originality and radicality of the way he relates philosophy and mathematics shines forth. The scope of this relation is such that it leads directly into what thought displays as its promise and strength, that is, novel subjective change. The proposal for a radical restructuring of ontology put forth by Badiou does not emerge from a need to integrate the infinite as such (*l'infini*) into philosophical thought per se. This had already been achieved in philosophy previously, but mainly from a transcendent perspective. Instead, Badiou seeks to ground ontology according to *infinity,* here understood technically in terms of infinite sets and conceptually as pure multiplicity. From the perspective of mathematical logic, the existence of such sets is not a new finding. It has been a topic central to set theory ever since Georg Cantor postulated the General Continuum Hypothesis.[1] Subsequently, Kurt Gödel showed that the negation of Cantor's Hypothesis regarding the existence of an intermediary infinite set between the natural and the rational numbers could not be proved, so that in the end there would exist but one infinite of a larger size than the set of natural numbers. The argument set forth in *Being and Event* bases its claim on a far more radical prospect, which is that the nonexistence of a set of an intermediate order could not be proved, thus making the Hypothesis independent from the axiomatized set theory (ZFC). In virtue of this "independence", there might very well be many other orders of infinite sets.

[1] The version of the General Continuum Hypothesis Badiou applies and reads in *Being and Event* is demonstrated in Meditation 29. Cantor, however, did not define whether the natural numbers were a set, nor even that the power set axiom involves such a set. E. Zermelo is who defined the natural numbers as a set. As far as Badiou is concerned, the set of natural numbers is the smallest infinite collection of elements, while "state" names the next infinite set, ω^1. For any "state of the situation", there corresponds to it an excess in regard to the smallest infinite. Alain Badiou, *Being and Event,* trans. Oliver Feltham, Continuum, London 2008, pp. 25ff.

* Porto Alegre, Brazil

Contemporary French philosophy can be described in part as a sequence of theoretical proposals stemming from a concept of multiplicity that is irreducible to a single totalizing unit, say the One. Arguably, there has not been any proposal as broad ranging as Badiou's regarding the irreducibility of multiple infinites. The argument set up in *Being and Event* makes a claim on how the state of existence we inhabit, Badiou calls it the "state of the situation", can be represented in set-theoretic terms. This state can be framed as a gathering together of distinct elements and parts bounded by a single infinite, to which the elements either belong or are included as parts regardless of how many such elements the state of the situation might actually have. This description changes little when considering the very localized fields of the state of the situation in which truths, instead of opinions, beliefs or lies, are produced. Known as the "conditions" according to the lexicon Badiou composes for what is otherwise presented as a philosophical system, these fields do not exceed the boundaries of the state of the situation so long as a truth does not come to be produced within them.

Being and Event explores the thesis that the principle of radical change in any condition of the state of the situation can be recognized through the implications of the mathematical proof allowing for infinity to exceed the boundaries of a set whose elements can be counted. The measure of radical change goes by a continual creation of truth in procedures specific to each condition. Truth is thus held to refer back to an event that has ruptured the order of a condition. As such, the ontology sets out to show how the fact that radical change occurs in a condition can be both proved and understood by the set-theoretic theorem whereby a generic, indiscernible set, that is, one whose elements are not yet known, may be demonstrated as a real extension to the state of the situation. Thought conceptually, a generic, infinite set gathers together the names of processes whose achievement will have been to produce a radically new truth in a condition. The limits to which this truth can expand are those of the condition itself.

Philosophically speaking, this is a radical conclusion, though it takes getting to the later Meditations of *Being and Event* to grasp the considerable consequences Badiou's application has for conceptual thought. In Meditation 16, for example, he introduces the subtle paradox of the notion of event. In Meditation 35, he outlines the formal traits of a theory of subject molded upon the implications an event has for changing the terms by which truth is worked out *in* a condition. The Meditation reads like a list of the most polemical conclusions reached by

French philosophers and social scientists alike since structuralism appeared to wash away the face of the subject from modern fields of conceptual inquiry. Badiou's theory of subject is *post-evental*. As such, it leads further than previous arguments and models into the dissolution of the 'humanist' subject. The upshot of such exploration is that the evental subject is materially indiscernible. Such is the requirement for this subject to maintain its formal structure intact prior to acquiring materiality. As soon as this process is engaged, it works against the inertial pressures produced from within a condition. These pressures can be expected to force a reduction upon the subjective process in order for it to return to the conformity of a substance-like entity.

In the following discussion, we seek to retrace the challenge to what lay ahead for Badiou's articulation of the subject. On the one hand, the requirements for thinking infinity as seen from within mathematics, by either philosophers of mathematics or those working mathematicians receptive to the philosophical problems their field fosters, point to the limitations of set theory to think infinite relations in real terms. On the other, the proposal for radical subjective change required a novel concept of a "second body", or "bodies of truth", by which to situate objects, change and worlds as they become part of the process by which a truth appears. *Logics of Worlds* joins these two problems in another striking proposal by which to relate philosophy and mathematics. This broad work on the process of appearing pursues the importance of thinking infinity. Its proposal works from the basis of understanding correlations between various logical possibilities regarding the appearance of truth. It thus provides a complex understanding of what bodies of truth can, and must, achieve were radical truth to have a chance to be created in a world – or, indeed, *as* a world.

From the generic subject to the body of truth

Philosophically speaking, the challenge for Badiou after *Being and Event* was to show what the structure of the subject is as it forces itself into existing in a condition in an unbounded process. In works such as *Conditions* and *Ethics*, he demonstrated how radical practice cannot be mediated by a category of transcendence. Moreover, as it is determined by a chance event, Badiou holds that the subject is not the result of a dialectical sublation. This is a key feature of an ontology deemed to be intrinsic, as the structure of subjectivation is always localized within a condition.[2] This is a crucial point to his argument on and around the event in *Being and Event,* especially when illustrated from within the political condition by the figure of the activist, that "patient watchman of the void instructed by the event."[3] It also lies at the subtle core of his argument regarding how the mathematics of set theory can instruct philosophy as to the formal mode by which to build a general science of being qua being. The formula "mathematics is ontology" thus warrants that the former provide a complete model for the latter, insofar as set theory is a theory of infinity. But it also provides a model for a set, the generic set, that is the extension of the set-theoretic universe as such. Neither of the operations by which sets are built and theorems derived is dialectical in nature – though they are demonstrably deductive.

Thus, while the set-theoretic universe in *Being and Event* may be that of infinites of different sizes and of irreducible multiplicities, what it is not is that of bodies and appearance. In *Logics of Worlds,* Badiou applies category theory to demonstrate the logical dynamic of appearing. Yet he also suspends the problem as to whether category theory is more adequate as an ontology. We have little choice but to follow his argument. A pressing concern arises with the risk of having truth reduced and eliminated in a hegemonic world that would tend to reduce bodies to a general social physics, in which they act merely as communicational poles, regardless of how expressive or emotional such communication might become. What bodies can do is provide a subject with freedom, but that requires truth.

According to Badiou's conviction, freedom is not linked to a body's spontaneity, nor to its intersubjective relations, but to how it literally incorporates truth. From the outset of *Logics of Worlds,* he declares that "*the most significant stake of* Logics of Worlds *is without a doubt that of producing a new definition of bodies, understood as bodies-of truth, or subjectivizable bodies*."[4] Subsequent to a series of critical objections, mainly regarding the claim about set-theory being

---

2 While the term "intrinsic" has come to identify Badiou's ontological proposal as a result of Jean-Toussaint Desanti's critique of his ontology in *Les Temps modernes*, the notion of intrinsic is used throughout *Being and Event* to describe the non-referential nature of sets and the indiscernibility of the generic. For example, Alain Badiou, *Being and Event*, trans. Oliver Feltham, Continuum Books, London and New York 2005, 34 as a whole, and especially, section 7.

3 *Ibid.*, p. 111.

4 Alain Badiou, *Logics of Worlds,* trans. Alberto Toscano, Continuum, London 2009, p. 35.

mathematics, to which we shall not return here, the coherence of the ontology as a building block for a broader system comes to depend on an adjacent claim, one warranted analytically by a structure in which logical forms are correlated. In his response to his critics, Badiou argues that such a task is captured by category theory and especially by Alexandre Grothendieck's notion of topos.[5]

According to Grothendieck, a topos is a "metamorphosis of the notion of space", the promise of which is to renew traditional topological spaces and geometry.[6] Topos alternates in his terminology precisely with multiplicity. Grothendieck stresses that a topos can be expressed as a category, provided the structure be one of a sheave category, being that topos is like the "envelop" or "habitat" of the new geometry.[7] Furthermore, his newly crafted notion of topos is unifying as it provides "a common geometric intuition for topology, algebraic geometry and arithmetic."[8] Topos can be thus understood as involving an infinite number of categories. For the purposes of Badiou's system, it captures the potentially infinite number of correlations established between the possible modes by which to exist in givens worlds as they are structured according to distinct logical forms. From the philosophical perspective, topos theory serves Badiou as a response to the complexities faced by a generic subject as it appears as a worldly existence structured by truth-producing procedure. Topos captures a world in which truth is an exception through which to build a site of existence, of being-there. In this regard, it is understandable how Badiou considers topos

5 According to Olivia Caramello, "the introduction of the concept of Grothendieck topos stemmed from the observation that many important properties of topological spaces, such as compactness and connectedness, admit reformulations as categorically invariant properties of the associated categories of sheaves of sets; moreover, if a topological space X is sufficiently well-behaved (technically speaking, sober, cf. Remark 1.1.28), it can be recovered from the associated category Sh(X), as well as from the frame O(X), up to homeomorphism". Olivia Caramello, *Theories, Sites, Toposes. Relating and Studying Mathematical Theories through Topos-Theoretic Bridges*, Oxford University Press, Oxford UK 2018, p. 12. While Badiou does not systematically distinguish between Grothendieck topos and F.W. Lawvere's elementary topos, his reference is to the former alone (although he would regularly reference Lawvere's category theory in his 1990's Doctoral seminars.)

6 Alexandre Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, 1985-1987, p. 46 ft. 27, 56, 273 and 355. Translations are my own.

7 *Ibid.*, p. 58.

8 *Ibid.*, p. 78.

as “among the most remarkable mathematical structures that saw the light in the 1950s and 1960s. ”[9]

From the outset of his follow-up to his ontological proposal, *Logics of Worlds* faces off two idealizations of the body determining a world. The book now provides a name for the state of the situation: “democratic materialism”. Characteristic of its belief system is a naturalized form of thinking by which objective existence is conceded to two broad paradigms: languages and bodies. As in *Being and Event,* the pivotal concept by which such thought is radically contested are truths. And the fact of truths sets the stage for a way of thinking termed a “materialist dialectic”. From the perspective of truth, the latter structures another perspective on how bodies and languages ought to be thought.

Provided it be a vehicle for the radically new, irreducible, generic subject, a truth can be sustained insofar as a “second” body understood to be the creative and practical basis for conveying truth into appearance. To set up this claim, mathematics serves the aims of the system more than it did even in *Being and Event*. However, it is as a general theory of *logic* that mathematics is used to map the preconditions for the emergence of a body of truth. In this framework, logic signifies “purely and simply the cohesion of appearing.”[10] We may now unpack the radical terms according to which a body of truth appears.

The conceptual construction of the body is arranged in two phases. First, in the introduction to *Logics of Worlds*, Badiou presents the argument by which the current hegemonic system is that of bodies and languages. Plurality and primacy of bodies is set up as one of the bastions of the current order. At the same time, a process of subjective transformation of the body as a vehicle for truth takes hold of a fundamental place in the emergence of new subjective forms in which languages must also be structured accordingly. As such, “the norm of life is, quite naturally, that the genealogy of languages be adequate to the power of bodies”[11]. That which is opposed to this norm is the exceptional nature of truths. Truths reach appearance thanks to a body. The program is thus set out in *Logics of Worlds:* “Given that a subjectivizable body is a new body, this problem

---

9 Badiou, *Logics of Worlds,* p. 295.

10 *Ibid.,* p. 100.

11 *Ibid.*, p. 35.

requires that one know what the 'appearance' of a body means, and therefore, more generally, that one elucidate what appearing, and therefore objectivity, may be."[12] Such a task invokes perception as well as thought, which is a strategy deviating from the ontological field explored in *Being and Event*. In an allusion to Jacques Lacan's *Seminar XX*, the new program stipulates that truths "are required to appear bodily [*en-corps*] and to do so over again [*encore*]."[13]

The notion of truth Badiou had reinstated as central – and crucial to philosophy – thus confronts another crucial criterion. The definition of body refers to "that which, bearing a subjective form, confers upon a truth, in a world, the phenomenal status of its objectivity."[14] From a philosophical perspective, the aforementioned "fundamental thesis" stipulates that just as ontology refers to the thought of being qua being by mathematics, "so appearing, or being-there-in-a-world, is thought by logic."[15] Badiou establishes a claim according to which the dynamic by which a body of truth evokes the relational exteriority of distinct worlds can be mapped according to a Grothendieck topos, which he seeks to organize in a full exposition of its relational variations and categorical structures. What affects the truth physically is regulated by the scale of appearance as defined according to degrees or "intensities" of existence. Truths continue to respond to events whose discharge stems in this new context from generic non-existence, labelled the "inexistent" in *Logics of Worlds*. An event is defined as a process by which an inexistent achieves maximal intensity of existence. The theoretical program thus depends on proving how specific worlds show a capacity for sublating the inexistent of an object.[16] As such, *Logics of Worlds* provides a theory of object without a subject.

This sudden emergence is what traces an unhindered process of subjectivation singular to a generic subject whose hold in a world is only ensured by a body. The notion of worlds and object are drafted as "a logical theory, wholly alien to any doctrine of representation or reference."[17] Insofar as this theory is a coher-

12 *Ibid.*

13 In fact, Badiou evokes the program in a confessional tone, admitting how the problem relating body to truth "was the problem whose breadth I was yet unable to gauge". *Ibid.*, p. 46.

14 *Ibid.*, p. 36.

15 *Ibid.*

16 *Ibid.*, Book V on dialectical sublation.

17 *Ibid.*, p. 37.

ent one, *Logics of Worlds* can be acknowledged for having achieved a common space in which to correlate three irreducible logical forms: the classical or binary, the intuitionistic and the paraconsistent.[18] The particular context, or strictly speaking "world", acquires consistency by virtue of being deduced from a specific logical form. What provides a basis for analyzing the coexistence of these worlds is the Topos category.

Logics of Worlds is replete with historical examples and formal modes by which the generic subject appears in a world. The positive analysis of the body of truth is limited to only one among four possible subjective forms. The faithful subject, as illustrated by its matheme, is the only one to align a category of body of truth to the trace of an event.[19] The following is the synoptic image of this form:

$$\frac{\varepsilon}{\cent} \Rightarrow \pi$$

The implication of an alignment between an event trace in a world and the body of truths responding to it is what underwrites the possibility of a new present. Yet the fundamental point is how a "divided (and new) body becomes, under the bar, something like the active unconscious of a trace of the event."[20] The latter points to the new framework in which what does not appear does not exist per se. Inasmuch as it is unprecedented, the new is thought from a point of indiscernibility, which evokes in this book the aforementioned inexistent

Each world is thus set as a field or territory of variable scales of appearing. A transcendental is the mechanism introduced to refer to what regulates the phenomenal diversity of appearing, or of being-there in that world. As Badiou refers to the transcendental as a "complete Heyting algebra" or "locale"[21], it affords the synchronic iteration warranting the emergence of any world lodging a truth procedure. Completeness in this context refers specifically to the infinite

[18] Marios Constantinou and Norman Madarasz, "Being and Spatialization: an interview with Alain Badiou", *Environment and Planning D: Society and Space* 27 (2009), p. 791. Also Badiou, *Logics of Worlds,* p. 532.

[19] Badiou, *Logics of Worlds,* p. 53.

[20] *Ibid*., p. 53.

[21] *Ibid*., p. 167.

possibilities of correlate worlds. The correlation that intelligibly connects the transcendental to a worldly multiplicity is also borrowed from Grothendieck's arsenal of tools, a "sheaf". Although it is "conceptually required for appearing to be bound", sheaves preserve infinity at the level of postulating worlds.[22]

Whereas in *Being and Event* the generic subject was bound to the undecidability of an event, in *Logics of Worlds* unfolds a sequence of immanent acts of non-conscious recognition, the practice of which proceeds to incarnate a partial but expansive body. In the diagram above, the split marking the body 'c' associates a process of recognition stripped of dependence or reference to past experience. This recurrence and the formal identity of this process implies that truth ultimately refers to a constant continuous plane. The process of producing the new present is initially emphasized as proceeding discontinuously "fragment by fragment". As the book proceeds, this mode of producing fragments becomes one of deciding upon points, the basic insight of which stems from tracing a curve on a Euclidean plane. The body is built from successive, albeit distinct, relations in which a point is linked to previous ones in a categorical composition that is coherent (in categorical terms, is associative and composite) and provides an insightful clarity as to relations (in categorical terms, the arrows and points) constituting it. The new perspective on truth production refers to the way in which incorporation as a body of truths is mapped according to a methodological approach having the same structure as category theory.

This resulting body is neither passive in any biological sense of the term, nor is it a monistic entity, in which consciousness would be reduced to the brain, for example. As the reader is led into an immanent perspective through which the body broadens the grounds of its certainty, Badiou introduces a general, non-descript "efficacious organ" as a generic operator, internal to the category of body, from which decisions regarding the true are made. With no remote view on the structure's totality, the efficacious organ is an operation by which truth attribution builds upon points. As the points gather into a coherent category, they come to shape and objects that, in turn, respond to the circulation of truth in a specific world.

22 *Ibid.*, p. 103.

In the end, the body of truth is distinguished from the hegemonic body form by an efficacious structure that works punctually, point by point, in "*an order of affects which authorises the continuation of the process.*"[23] Contrary to theories that tend to lend cognizing capacities mainly to the brain, consciousness is not a recognizable category regarding this procedure. In terms of a referential connection, Badiou does not provide one as regards any naturalized *theories* of body. This break summarizes a philosophical commitment extended to the reader as it also underscores the need for a general theory of structural as well as mathematical analyses. Without them, the reader risks reducing the efficacious organ to previous notions, theories or fields, be they psychobiological or social constructionist.

Furthermore, *Logics of Worlds* invites the reader to develop a novel perspective on immanence regarding the assumptions behind dialectical thinking as if to probe the very inner dynamic of sublation. In Badiou's view, it is clear "that the dialectical thinking of a singular subject presupposes the knowledge of what an efficacious body is, and of what a logical and material excess with regard to the bodies-languages system might be."[24] Its magnitude depends on the amount of points linked in a process that is nothing but that of how "a subjective form is 'carried', in the phenomenon of this world, by an organized material multiplicity."[25] Whereas the theory of subject is essentially formal, or formalist, the theory of body is material, thus requiring a correlation of logical theories and spatial compositions able to trace its phenomenal appearance.

Being and Event was about multiplicities and not about bodies, because its stake was not to enter into the descriptions of the historical processes of rupture and construction, which is how the body emerges in the first place. The subject lies beyond recognition for it required sustaining its indiscernibility for as long as possible in the likelihood of coming to be manifested in a condition. For all the descriptions of generic subject forms in the conditions, the system at that stage in its development did not present the means by which a faithful subject manifests itself, nor indeed was it initially contemplated should its destination be deviated and possibly suppressed. None of these immediate shortcomings weak-

23 *Ibid.*, p. 88.
24 *Ibid.*, p. 46.
25 *Ibid.*, p. 27.

ened the conviction over the real capability a subject has in overthrowing the order by which a condition is secured. As Badiou explains, "that is why we can present the figures of the subject right away, without yet possessing the means to think the effective or concrete becoming of a historically determinate subject."[26] To achieve the latter in a theoretical setting, the methodology requires a descriptive stance.

Now, this means that Badiou's argument is not primarily a historical argument, not even *ex post factum*. Rather, it preserves deductive inference as fundamental to mathematical reason.[27] But that is the extent of the argument, regardless of how detailed and impressive it is set out in *Being and Event*. Meaning that when we return to the conditions, the subject is not mathematical in material content anymore than is philosophy reduced to mathematics.

The task of the second body, that is, the variations on "subjectivated bodies", is otherwise more subtle. It presents a threshold beyond which history as a discontinuous regularity is required to speak. Still, the body is nothing without the description the process of history itself provides to it as a context in which it returns the favor and literally makes history. The process of non-visible linking of the points of its appearing is what guarantees indiscernibility to the body-subject in the same gesture as what ensures its amplification.

No matter how certain readers of *Logics of Worlds* attempt to steer his program, infinity is still central to the perspective adopted. The Grothendieck topos is selected due to its power to make Cantorian set theory correlate with finitist areas of mathematics. The body conceptualized by Badiou can thus aim for a perspective on its projected totality. Recapitulating, Badiou asserts "a limpid abstract formula: a post-evental body is constituted by all the elements of the site which invest the totality of their existence in their identity to the trace of the event. Or, to employ a militant metaphor; the body is the set of everything that the trace of

26 *Ibid.*, p. 47.

27 The power of inference is the entire sense by which Badiou understands mathematization in a philosophical framework. As he puts it, "'Mathematizable' means submitted to the literal power of inferences, and therefore entirely indifferent to naturalness as well as to the multiplicity of languages". *Ibid.*, p. 74. Cf. Badiou, *Being and Event*, Meditation 24, "Deduction as an Operator of Ontological Fidelity", especially section 4, on the "Triple Determination of Deductive Fidelity", pp. 252–255.

the event mobilizes."[28] As the support to the event trace, a composition surges forth with an inferential capacity to create a new present, one responding to the truth set to build upon the event.

Such is the sense to the claim that "of the subject, there is but a theory".[29] This subject incarnated is not a thing, nor object. It repels idealist postulations as it does ideological ones seeking to falsify it. As mentioned before, the subject's basic properties, as formulated from the ontology, are set out in *Being and Event,* Meditation 35. Its terms break with the model of substance, though nor is it the void through which an event becomes manifest. Subject does not refer either to experience, let alone to individualized lived experience. Its conceptual situation is that of being in excess to a condition. Albeit rare, its occurrence is not regulated by a law. By the time of *Logics of Worlds,* thinking the effective or concrete becoming of a historically determinate subject "requires a description of the body that functions as its support."[30]

The philosophical methodology in *Logics of Worlds* and its claims

As opposed to *Being and Event,* the argumentative framework of *Logics of Worlds* takes shape according to two distinct levels. In addition to the formalism in which category and topos theory provide a general logic, Badiou introduces a recast phenomenology centered on rearticulating the notion of material being-in-the-world. In this section, we examine the phenomenological model he applies to conceptually analyze the radical correlations formalized by the category-theoretic as well as topos-theoretic structures. We question whether the boundedness typical of worlds, as expressed by the notion of horizon specific to phenomenology, might not undermine the radicality of Badiou's philosophical system. Namely, we submit that Badiou's methodology is clearly structuralist, and as such requires a clear break with phenomenology for reasons of clarity and coherence. For *Logics of Worlds* justifies, at least indirectly, the unexplored radical extensions of structuralism once the event and infinity are adjoined to its conceptual arsenal. Phenomenology has never been able to think infinity without returning to a theological commitment.

28 *Ibid.*, p. 467.
29 *Ibid.*, p. 47.
30 *Ibid.*, p. 49.

The conclusive statements on the body of truth occur in Book VII of *Logics of Worlds,* in which one finds the recapitulation of the complete argument, the demonstration, proof and historical illustrations. While attentive to the process by which this structure appears, its simplified model suggests a form of conceptual circulation not present in the phenomenological context. The structure can be simplified according to five conditions as follows:

- An existing world, in which one comes to live, teaming with problems old and new;
- The coming to be of a site: from within this site, an event trace is received as a break in a world, not as an extension;
- Although a trace is a break, it does have elements, and proves to be something more. A body builds from elements that further integrate points from within a not entirely discernible world. As such, the body is not reducible to a trace;
- Part of this body is the efficacious organ, whose elements decide upon the points allowing for its amplification, which proceeds by means of new correlations;
- Subsequent to these correlations, new concepts envelop the efficacious part itself, a process in and through which a "new organ" is formed for the body.

While the articulation of such a model is not unfamiliar to thinkers of sexuation and critics of the gender binary, Badiou's effort in this book challenges such theories, at the very least, to ensure that incorporation is filtered by an event trace that breaks radically with the current world. We would like to assume, at least for the purposes of the current state of the situation, the coherence of Badiou's bid. To be sure, metaphoric projections are possible, as some critics of Badiou's philosophy contend.[31] Yet they can also be considered the reader's responsibility, if not deficiency. Once again, *Logics of Worlds* delegates responsibility to the reader to decide upon the points at which truth-valued decisions are determinate for the next steps in keeping the event trace active.

31 Cf. Vladimir Tasic, "Badiou's Logics: Math, Metaphor, and (Almost) Everything", *Journal of Humanistic Mathematics* 7 (1/2017), pp. 22–45; or Shiva Rahman, "On Why Mathematics Can Not be Ontology", *Axiomathes* 29 (2019), pp. 289–296.

In his chapter on "Classical Worlds" (Section V), Badiou clearly expresses his commitment to following what category theory affords in terms of mapping some worlds according to a non-binary logic. But his main focus commits to those worlds that are overwhelmingly standard, despite how the measure of appearance presented by the transcendental works as a continuous grid. Through a purely visual example of the mixture of the sun's color from a given angle against the ivy grown on a house's wall, Badiou shows how claiming a specific color for the ivy leads to an undecidable proposition as it depends on a correlation with the specific aspects of a light source. As a result, "The world of the house in the autumn evening is not classical, in the sense that it validates neither double negation nor the excluded middle."[32] The occurrence of this variation in logical form should not distract from the primacy of standard logic. In the final analysis, standard logic may prove to be the surest way at preserving *truth* as it appears in a world.

The calculated, "objective", "minimal" or indeed "operational" phenomenology[33] aims for a conceptual exposition, while mirroring, even though at a methodological distance, the formal proof. Indeed, Badiou will at times say as much, especially when stating that "without a doubt, due to the extreme rigorousness of the chains of reasoning, the formal exposition is here often more illuminating than the didactic phenomenology that precedes it."[34] Through frequent references to Lacan in Book VII, to whose work he references the "second body", Badiou explicitly undermines any identification between his "operational phenomenology" and the historical methodology recognizable by that name.[35] The resort to this former terminology does not cease to provoke doubt given that later Badiou explicitly rejects the kind of phenomenology that merges with the analysis of consciousness.[36]

If the phenomenological approach is constitutive here, then it is as from a cut. Furthermore, it is precisely the cut that raises questions as to its overall pertinence. The return to the intentional and to lived experience would hinder a theory of the new, as the transcendental ego is of no relation to the generic subject

---

32 *Ibid.*, p. 184.
33 *Ibid.*, p. 41, p. 128 and p. 103, respectively.
34 *Ibid.*, p. 197.
35 *Ibid.*, p. 48, p. 478 and p. 480.
36 *Ibid.*, p. 48.

form, for it recognizes no radical event. Badiou's phenomenology is a "description without a subject", although we might hasten to add it is one stabilized by what he terms "eternal truths". As such, it is not clear whether Badiou manages altogether to elude the theological directionality, if not finality, of phenomenology as a whole. He recognizes the risk just as much when evoking how "phenomenology, in its German variant, is indisputably haunted by religion."[37] His critique of Paul Ricoeur stands as a critique of post-Husserlian phenomenology as a whole: "indestructible latency of a Christian subject at the very heart of the text."[38] To go beyond the theory of subject by which phenomenology has come to be recognized, Badiou switches the register from perception to affect: "it is indeed by its affect that the human animal recognizes that it participates, through its incorporated body, in some subject of truth, we will say, with Lacan, that 'it is as incorporated that the structure makes affect'."[39] By reducing the conceptual stratum of the analytic of appearance to a formal level, not even the naïve sense of prelinguistic comprehension can maintain its reference to phenomenology. For category theory shows the complexity of this level explicitly in its general theory of relations.

The question remains as to whether phenomenology can explain, let alone warrant, the indiscernible. Here we encounter the controlling instance by which an inexistent, after being propelled into a maximum intensity of appearing, keeps from being immediately drawn back to the hegemony of bodies. In fact, without efficacious organs deciding on the fragments and points that break strictly with the phallic order, there is neither guarantee, nor really directionality in the type of body that is desirable – if, that is, one can agree on whether the phallic order extends across all conditions. At any rate, at no moment has the entire tradition of phenomenology shown itself to be apt at carrying out this rupture. Although P. Maniglier and D. Rabouin in an early discussion of *Logics of Worlds* emphasize that there is a "structuralism" (their quotes) in the book, they do not consider the phenomenology as potentially undermining the formal topos theory.[40] We could conclude that the inexistent is radically independent even from Heideg-

37 *Ibid.*, p. 516.
38 *Ibid.*
39 *Ibid.*, p. 480.
40 Patrice Maniglier and David Rabouin, "À quoi bon l'ontologie ? Les mondes selon Badiou", *Critique* (719/2007), pp. 279–294.

ger's ontological difference and *Ereignis* concept, if, that is, Badiou considers Heidegger as an exemplar of phenomenology, which is not clear.

In sum, what is kept of phenomenology is the displaced methodology for constructing the theory of appearing, in which even the category of transcendental breaks with historical precedent. The broader sense of the philosophical methodology here espoused seems more structuralist than phenomenological. To be sure, structuralism breaks with the theological baggage at risk with most if not all phenomenologies. Rather surprisingly, though, Badiou prefers to sideline structuralism, or at least consider it part of a past philosophical epoch.[41] And he insists: "When we say that the description of these operations makes up a complete phenomenology, we mean that the transcendental determination of the minimum, the conjunction and the envelope (or synthesis) provides everything that is needed for being-there to consist as a world."[42] One could add, though, that to consist in a world, the logic behind *Logics of Worlds* requires relational transparency and complexity, instead of descriptive fidelity.

By contrast, philosophy caught within either subject-object or bodies-languages paradigms – democratic materialism – seems very far from understanding the sequence by which thought processes associate and correlate. The proto-paraconsistent logical framework of Martin Heidegger's *Being and Time* might be an exception, but French phenomenology has largely maintained its speculations bound to a single world – even when integrating the event as a key concept.

Thus far, I have been arguing that the question of preserving the theory of subject in *Logics of Worlds*, whether it be upheld by a phenomenological or structuralist perspective, is at least as important as how mathematics captures infinity. I say as important as, although it could, in the final analysis, be more important than.

41 "I could not be structuralist because structuralism was, in its most extreme form, the abandonment of the concept of subject." This admission, one of Badiou's most explicit statements on structuralism, was made at the "Conférence d'Athènes: Introduction à L'Être et l'événement et Logiques des mondes", given at the *National Technical University of Athens*, on January 30, 2008. The transcription was made by R. Lopinska, available at: http://www.entretemps.asso.fr/Badiou/Athenes.htm. The conference is available online at: http://www.youtube.com/watch?v=CfngSuXwWog&feature=PlayList&p=BBC9321FB9E98E03&playnext_from=PL&index=0&playnext=1, (last access: July 20, 2019)

42 Badiou, *Logics of Worlds*, p. 103.

To follow my point (which in all truth is meant to be Badiou's), mathematics is strictly defined as ontology. Naturally, mathematics is not as important in *Logics of Worlds,* since the latter is not about ontology, at least not primarily. Now, a number of philosophers of mathematics simply disagree with how Badiou separates category theory from mathematics.[43] Contesting Badiou on this point might not be as prudent as it might first seem. Take the case of symbolic logic, which in its syllogistic form is as old as Aristotle. The modernization of symbolic logic occurs through Boolean algebra, the articulation of which was initially developed within *mathematics*, the refinements of which continue through the turn of the century with the axiomatization of set theory. Consider, though, how nowadays a mathematician would have an easier time finding a course in symbolic logic given in a *philosophy* program instead of in mathematics. If category theory is indeed a general theory of *logic*, no matter how unknown it still is to philosophy programs, it is not impossible to imagine it increasingly becoming more theoretically investigated in philosophy programs, just like logic has become. Depending on who is doing the talking, it already is.

The question then becomes the following: what does category theory present to Badiou if its purpose is not primarily to compensate for what is too polemical in his argument on "mathematics = ontology"? In extremely schematic form, by considering its minimal tools and definition of identity as a relation; its weak axioms, with no existential quantifier; the visibility offered to the fundamental relational activity behind the constitution of categories, as demonstrated by the "pullback" and "central object" (or subject classifier)[44]; and of course with the very notion of the category of sets, infinity is no longer understood at the primary level of existence. Infinity becomes a possibility of correlations and the proof aims at showing its construction to be coherent from within a material form, not of proving its existence as a set. The post-evental generic extension is not far off from that in the first place.

As one can see, the interest in infinite sets emerges through the founding principle of set theory regarding membership or belonging, which is immanent to any set and thus not considered a relation. If Badiou establishes his ontology as

43 Cf. footnote 51.

44 Alain Badiou, *Mathematics of the Transcendental,* trans. and ed. A.J. Bartlett and Alex Ling. Bloomsbury Press, London 2014.

illustrative of the state of the situation, it is true that membership, the axiom of separation, axiom of foundation, power set axiom and Cartesian product capture the intrinsic form of the state of the situation. But when ontology is taken in its special sense, as describing what is singular to the generic set, which implies bracketing the axiom of foundation, then it can be argued that category theory better maps a theory of generic subjectivity, as it especially deals with the possibility of such radical change. Logical possibility might just be enough, given that the rest is up to us anyway.

Regarding *Being and Event,* the Gamma Diagram (*Schéma Gamma*) first presented in 1991 succinctly portrays the categories and steps involved in the forming of a generic subject.[45] The Diagram also makes visible the threats to fidelity a subject encounters at the level of its being. Though Badiou deliberately indexes the name "subject" to this structure, in virtue of which its material effects are made visible, it could just as well be an object, meaning that it is undecidable as to its evental form. In other words, the subject is not human per se, possibly being a set of works, theories, organizations or irreducible twos, depending on whether the event ruptures the condition of art, science, the political or love, respectively. In *Logics of Worlds,* the event takes the following typology of forms: "in politics, Revolution; in love, erotic liberation; in the arts, performance; and in the sciences, the epistemological break. In philosophy, we can detect it in Wittgenstein ('The world is all that is the case') as well as in Heidegger (being as coming-to-be, *Ereignis*)."[46] We can understand the evental-subject also in terms of directionality and destination, both of which nonetheless need to transfer the event trace, or situational rupturing, to a new configuration, which is none other than the body of truths. The full definition of subject in *Logics of Worlds* is the following. Subject is "that which imposes the legibility of a unified orientation onto the multiplicity of bodies. The body is a composite element of the world; the *subject is what fixes in the body* the secret of the effects it produces."[47] There is no temporal measure of the duration of the process, nor an indication of the tipping point when achievement lies on the horizon.

45 Alain Badiou, *Conditions,* trans. S. Corcoran, Continuum, London 2009, [1991], Figure 8.1, p. 121.

46 *Ibid*., p. 381.

47 *Ibid*., p. 46–47

In the mathematical framework, category theory has been especially used to establish correlations, bridges and equivalences between different areas of mathematical work. Although it has been well over a decade since *Logics of Worlds* presented philosophy with this framework, what can be said with relative confidence is that the relation between this work and the ontology is concentrated in at least one concept instead of the entire undertaking. In his discussion with F Tarby in *Philosophy and the Event*, Badiou states: "In order to throw light on truths' relation to bodies and languages, I use a notion that is the equivalent of forcing in *Being and Event,* namely the concept of compatibility. A truth body is composed, in fact, of elements that are compatible in both a technical and elementary sense: they let themselves be dominated by a common element."[48] And that element is the truth itself. In the dictionary of concepts offered as an appendix to *Logics of Worlds*, compatibility is defined as follows: "Two elements of the support-set of an object are compatible if the 'common' of their existence is the same thing as the measure of their identity."[49] Following the observations made in McLarty's review of *Transcendental Mathematics,* Badiou's choice of the term identity instead of isomorphism could be seen as problematic from a categorical perspective, leaving doubt as to whether Badiou is not transposing the primacy of his intrinsic ontology to a thought that is only relational.[50] In the final analysis, this observation could lead us to explore an underused conceptual dimension available only to category theory.

By contrast, to *hold a point* is the experimental practice espoused by Badiou always from the double perspective that choice involves. "To hold a point means to hold this instance in the face of the world. Or, to have the subjective (that is, corporeal and formal) wherewithal to submit the situation to the decisional pressure of the Two."[51] The theory of points is that from which radical change is enabled since it filters the degrees of the transcendental. The theory of points is also what filters the onto-logic back into the ontology.

[48] Alain Badiou with Fabien Tarby, *Philosophy and the Event,* trans. L. Burchill, Polity Press, Cambridge 2013 [2010]), p. 116.

[49] Badiou, *Logics of Worlds,* p. 579.

[50] McLarty's reading is also voiced by Veilahti. Cf. Colin McLarty, "Review of Alain Badiou, Mathematics of the Transcendental, A. J. Bartlett and Alex Ling (trs.), Bloomsbury, 2014", *Notre Dame Philosophical Review* (2014) and Antti Veilahti, "Alain Badiou's Mistake – Two Postulates of Dialectic Materialism", *Math arXiv*:1301.1203v22013, 2013.

[51] Badiou, *Logics of Worlds,* p. 590.

With regard to the qualified communism of the second body, as demonstrated in Book VII, it is important to emphasize the growing nuances in the system that have allowed it to break with, at least the classical understanding of, binary essentialism, seen as early as in the final statement of *Manifesto for philosophy*.[52] There, the Mallarmean Constellation, anticipating the diversification of the system occurring in *Logics of Worlds* a decade later, had been summoned to evoke the new poetic significance of the event.[53] Therein a subject-thought is said to be disposed "point by point" to evoke a communism of the multiple. Taking hold of the divisible body is the stated task of the second body if and only if it reaches the experience of the "transhuman body".[54] It is difficult not to see in this form the inscription of pure multiplicity itself.

Final remarks on the *oeuvre*

Several critics of Badiou's system have accused the argumentative strategy in *Being and Event* as lagging behind debates in mathematics regarding the broader power of topos theory to analyze the nature of ontology in comparison to set theory. An aspect of these critiques has to do with the problem of the existence of infinite sets, a view aimed at showing they do not exist. While the philosopher of mathematics has found in *Logics of Worlds* a formal proposal adequate to the fact that set theoretic worlds can be analysed by category theory, many philosophers have been more receptive to the work for reasons that *Being and Event* does not accept. The emergence of radical generic subjectivation, they claim, would not be as rare as previously surmised. Nevertheless, when *Logics of Worlds* is read as a new and indeed complex theory of subjectivizable body, the evidence of plurality is not forthcoming. The reader is faced with an even more subtle, and demanding, radical philosophy grounded in formalism.

Badiou has brilliantly shown how mathematics and philosophy still have much to share. As to the question of whether the destiny of mathematics is fundamentally bound to the technologies philosophy takes to be an affront to its ethical principles, it does not sufficiently justify restricting further inquiry into number,

52 Alain Badiou, *Manifesto for philosophy,* ed. and trans. Norman Madarasz, State University of New Press, Albany 1999, p. 109.

53 Alain Badiou, *Briefings on Existence: A Short Treaty on Transitory Ontology,* trans. and ed. Norman Madarasz, State University of New York Press, Albany, NY 2006 p. 168.

54 Badiou, *Logics of Worlds,* p. 481.

sets, functions, and relations. As Badiou's commitment to irreducible multiplicity relies on a subject-form that is indiscernible, intrinsically non-visible and immanently bound to those who decide to take part in its validation through disparate practices, it recognizes set theory as its common ontological inscription.

Logics of Worlds was a project aimed in its preliminary stages at satisfying two important critical questions. First, if ontology is mathematics, and set theory is used as the prototype for mathematics, as in ZFC and Paul Cohen's generic extension of the set-theoretic universe, how does category theory, with its richer mathematical possibilities, stand in relation to ontology? Second, if ontology is the field of the objectless subject, how do we justify the overhauling of the phenomenal dimension merely through logic and not mathematics? We have examined both of these questions. In this sequence, we can add another thought: is the excess warranted by the Grothendieck topos on worlds, objects, change and bodies a capture of the set theoretic universe or does it merely capture a world consequent to its axioms, theorems and operational possibilities?

In his 2018 Prague keynote address[55], Badiou loosened his equation of ontology and mathematics to let the former rest solely upon set theory. However, he did not relinquish the axiomatic structure of the ontology in favor of the broader relational possibilities of category theory. Regarding his defiance, is the risk we face with *Being and Event*'s ontological framework in support of infinity, that is, of the existence of infinite sets, a new metaphysics, as some mathematicians would contend? As long as the formalism is preserved, the concept of multiplicity shown to be irreducible and the generic process stipulates an index of indiscernibility, the answer would seem to be no. By contrast, if the category and topos theories in *Logics of Worlds* turn out to give material support to the generic process regardless of *Being and Event's* ontological inquiry and refutations, it will at least have given philosophers a choice of priorities regarding the creation of an ontology. In that regard, we can all appreciate the beauty and assurance infinite sets ultimately provide to a theory of multiplicity, regardless of the relief found in the range of correlations offered by topos theory in its own capacity at preserving truth from the perspective of the infinity of relations.

---

55 Cf. Badiou's contribution to this volume: "Ontologie et mathématiques Théorie des Ensembles, théorie des Catégories, et théorie des Infinis, dans *L'Être et l'événement*, *Logiques des mondes* et *L'Immanence des vérités*".

References

Badiou, Alain, *Being and Event*, trans. Oliver Feltham, Continuum Books, London and New York 2005
— *Briefings on Existence. A Short Treatise on Transitory Ontology*, trans. ed. Norman Madaras, State University of New York Press, Albany, NY 2006
— *Conditions*, trans. Steven Corcoran, Continuum, London 2009- *Le Concept de Modèle. Introduction à une Épistémologie Matérialiste des Mathématiques*, Fayard, Paris 1969
— *Court traité d'ontologie transitoire,* Seuil, Paris 1998
— *Deleuze, "la clamour de l'Être",* Hachettes, Paris 1997
— Entretien avec Peter Engelman, *Quel communisme?,* Bayard, Paris 2015
— *Ethics. An Essay on the Understanding of Evil,* trans. and intro. Peter Hallward, Verso, New York 2001
— *La Tétralogie d'Ahmed,* Actes Sud, Arles 2010
— *L'Être et l'événement*, Seuil, Paris 1988
— *L'Éthique. Essai sur la conscience du mal,* Hatier, Paris 1993
— *L'Immanence des vérités. L'Être et l'événement 3,* Fayard/Ouvertures, Paris 2018
— *Le Nombre et les nombres,* Gallimard, Paris 1990
— *Logiques des mondes. L'Être et l'événement 2,* Éditions du Seuil, Paris 2006
— *Manifeste pour la philosophie*, Paris, Seuil 1989
— *Manifesto for philosophy, followed by two essays,* ed. and trans. Norman Madarasz, State University of New Press, Albany, NY 1999
— "Mathematics and philosophy", in *Virtual Mathematics*, ed. Simon Duffy, pp. 12-30, Clinamen Press, New York 2006
— *Mathematics of the Transcendental*, trans. and ed. A.J. Bartlett and Alex Ling. Bloomsbury Press, London 2014
— *Para uma nova teoria do sujeito,* Editora Relume Dumará, São Paulo 1994
— *Second Manifeste pour la philosophie,* Fayard/Ouvertures, Paris 2009
— *Théorie du Sujet*, Paris, Seuil 1982
Badiou, Alain and F. Tarby, *Philosophy and the Event,* trans. L. Burchill, Polity Press, Cambridge, UK 2013
Badiou Alain and Gilles Haéri, *Éloge des mathématiques,* Flammarion, Paris 2015
Balibar, Étienne, "Le Structuralisme : une Destitution du sujet?", *Revue de métaphysique et de morale* 45 (1/2005), pp. 5–22.
Burhanuddin, Baki, *Badiou's Being and Event and the Mathematics of Set Theory,* Bloomsbury, London 2015
Barwise, Jon and Lawrence Moss, *Vicious Circles: on the Mathematics of Non-Wellfounded Phenomena,* CSLI, Stanford, CA 1996
Cantor, Georg, "Foundations of a General Theory of Manifolds: A Mathematico-Philosophical Investigation into the Theory of the Infinite" [1883], trans. William Ewald, in

From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics, Volume II., ed. Ewald, Oxford University Press, Oxford 1996

— *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, trans. Philip Jourdain, Dover, London 1915

Carmello, Olivia, *Theories, Sites, Toposes. Relating and Studying Mathematical Theories through Topos-Theoretic Bridges*, Oxford University Press, Oxford 2018

Cohen, P. J., "The Independence of the Continuum Hypothesis", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 50 (6/1963), pp. 1143–1148

— *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 51 (1/1964), pp. 105–110.

Constantinou Marios and Norman Madarasz, "Being and Spatialization: an interview with Alain Badiou", *Environment and Planning D: Society and Space* 27 (2009), pp. 783–795

Desanti, Jean-Toussaint, "Quelques remarques à propos de l'ontologie intrinsèque d'Alain Badiou", *Les Temps Modernes* (526/1990), pp. 61–71

Fraser, Zachary, "The Law of the Subject: Alain Badiou, Luitzen Brouwer and the Kripkean Analyses of Forcing and the Heyting Calculus", *The Journal of Natural and Social Philosophy* 2 (1-2/2006), pp. 94–133

Gödel, Kurt, "What is Cantor's Continuum Problem?", in *Kurt Gödel: Collected Works*, vol II., ed. Solomon Feferman, et. al., pp. 1938–1974, Oxford University Press, New York 1995

— "The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis", *Proceedings of the national academy of sciences of the U.S.A.* 24 (1938), pp. 556–557

Grattan-Guinness, I., *The Search for Mathematical Roots.* (1870–1940): *Logic, Set Theories and Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*, Princeton University Press, Princeton, NJ 2000

Grothendieck, Alexandre, *Récoltes et Semailles*, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier 1985–1987

Hallward, Peter and Knox Peden (eds.), *Concept and Form*, Verso, New York 2012

Heidegger, Martin, *Being and Time*, trans. John Macquarrie and Edward Robinson, Harper and Row, New York 1962

Heller, Michael and W. Hugh Woodin, *Infinity: New Research Frontiers*, Cambridge University Press, New York 2011

Hunter, Ian, "Heideggerian Mathematics: Badiou's Being and Event as Spiritual Pedagogy", *Representations* 134 (Spring 2016), pp. 116–156

Jech, T., *Set Theory*, Springer-Verlag, Berlin 2003

Lacan, Jacques, *Séminaire livre XX: Encore (1972–1973)*, ed. Jacques-Alain Miller, Editions du Seuil, Paris 1999

— *Autres écrits*, Seuil, Paris 2001

Lautman, Albert, *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, Librairie Philosophique, J. Vrin, Paris 2006

Lejewski, Czeslaw, "Ontology and Logic", in *Philosophy of Logic,* ed. Stephen Korner, pp. 1–63, Basil Blackwell, Oxford 1976

Madarasz, Norman, *O Realismo Estruturalista: sobre o imanente, o intrínseco e o inato,* Filosofia e interdisciplinaridade, Editora fi, Brasil 2015

— *O Múltiplo sem Um. Uma apresentação do sistema filosófico de Alain Badiou*, Editora Ideias e letras, São Paulo 2011

— "On Alain Badiou's treatment of Category Theory in view of a Transitory Ontology", in *Alain Badiou: Philosophy and Its Conditions*, p. 23–43, Suny Series, Albany, NY 2005

Malicki, Maciej, "Mathemes and Mathematics. On the Main Concepts of the Philosophy of Alain Badiou", *ArXiv,* May 2014, available at: 2014arXiv1406.0059M

Maniglier, Patrice et Rabouin, David, "À quoi bon l'ontologie ? Les mondes selon Badiou », *Critique* (719/2007), pp. 279–294

Marquis, Jean-Pierre, "Category Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. Edward N. Zalta [forthcoming]

Mclarty, Colin, "Como Grothendieck simplificou a geometria algébrica", trans. Norman R. Madarasz, *Revista Veritas* 61 (2/2016), pp. 276–294

— "Review of Alain Badiou, Mathematics of the Transcendental, A. J. Bartlett and Alex Ling (trs.), Bloomsbury, 2014", *Notre Dame Philosophical Review* (2014), available at: https://ndpr.nd.edu/news/mathematics-of-the-transcendental/

— "Review of Simon Duffy, ed., Virtual Mathematics", *Australasian Journal of Philosophy* 86 (2008), pp. 332–36

— "The Uses and Abuses of the History of Topos Theory", *British Journal for the Philosophy of Science,* 41 (1990), pp. 351–75

Putnam, Hilary, *Philosophy of Logic*, Routledge Revivals, London 2011

Rahman, Shiva, "On Why Mathematics Can Not be Ontology", *Axiomathes* 29 (2019), pp. 289–296

Tasic, Vladimir, "Badiou's Logics: Math, Metaphor, and (Almost) Everything", *Journal of Humanistic Mathematics* 7 (1/2017), pp. 22–45

Veilahti Antti, "Alain Badiou's Mistake. Two Postulates of Dialectic Materialism", *Math arXiv*:1301.1203v22013 (2013)

Watkin, William, *Badiou and Indifferent Being. A Critical Introduction to Being and Event*, Bloomsbury, London 2017

Grands cardinaux et attributs de l'absolu
Large Cardinals and the Attributes of the Absolute

Filozofski vestnik | Volume XLI | Number 2 | 2020 | 311–340 | DOI: 10.3986/FV.41.2.12

Frank Ruda*

To the End: Exposing the Absolute

"*Toute infinité requiert une errance.*"[1]

"The task is indeed to demonstrate what the absolute is. But this demonstration cannot be either a determining or an external reflection by virtue of which determinations of the absolute would result, but is rather the *exposition of the absolute*."[2]

"*Notez que je suis absolument immanentiste.*"[3]

Introduction

The Immanence of Truths is the vineyard in which all the labour of the reader of the first two *Being and Event* volumes finally, and one might dare to say, absolutely pays off. And – as in the famous Jesus parable – those who start with the last volume will receive just as much as those who started years and years ago. Everyone will have received the same currency, notably orientation – and especially a reader of Badiou's last systematic volume is enabled to see what has any real value – and this means "absolute value."[4] For this reason alone, time does not matter much for the currency that the absolute provides us, as it is that "which in time exceeds time."[5] Yet, the peculiar place where this absolute value system is formulated is difficult to locate. It is close by,[6] yet and at the same time it does not exist in any standard sense of the term. The place of the absolute is

[1] Alain Badiou, *L'Immanence des vérités. L'Être et l'événement, 3*, Fayard, Paris,2018, p. 236.
[2] G. W. F. Hegel, *Science of Logic*, Cambridge University Press, Cambridge 2010, p. 466.
[3] Alain Badiou, "L'être en nombres", in *Entretien 1. 1981–1996*, Nous, Paris 2011, p. 177.
[4] Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 417.
[5] *Ibid.*, p. 176.
[6] Cf. Frank Ruda, "Tovariši absoluta, ali: Kje je '*auprès de nous*?'", in *Problemi*, (3–4/2019), pp. 133–150.

* University of Dundee

like an invisible, inexistent, yet under certain conditions universally accessible Fort Knox for the people, that is: for everyone.

In what follows I will take a field trip into this inexistent yet rigid fort of the absolute. To do so, I will: 1. elucidate the specific perspective of *Being and Event, 3* against the background of the two previous volumes; and 2. I will turn to the immanent but invisible dialectic of the general floorplan of the absolute fort that Badiou calls absolute ontology and offer a reading thereof. This will lead to a discussion (albeit limited) of the place "where all possible forms of" infinite "multiples"[7] are located, and will show in what sense it provides us with a means to "measure"[8] a truth's inner infinity, i.e. the absoluteness of a truth. The article will end by only pointing in the direction of what deserves further elaboration in the future, namely the conceptual requirement needed to conceive, metaphorically speaking, of the unfolding of the inner inconsistency of the (concept of the) absolute. How to form a (philosophical) concept (the absolute) which is barely still a concept due to the "absolute powderiness"[9] that follows from the "intrinsic diversity of [the] types of infinity"[10] that inhabit it? That the absolute, "the absolute referent [...] in-exists"[11] and nonetheless provides an – in this sense fictional[12] – orientational measure can be understood, as will be shown, against the background of an impossible yet necessary (i.e. forced) totalisation of the domain of the absolute. The article will signal that at the abyssal ground as well as at the impossible end of the absolute there is a paradoxical experience of freedom.

7 Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 245.

8 *Ibid.*, p. 333. Previously, it seemed that what Badiou called "nature," the ordered sequence of ordinals, could provide such a measure. "Nature, even infinite, is absolute," as he stated. Alain Badiou, *Being and Event*, Continuum, London / New York, 2006, p. 362. Now, the set of ordinals only provides us with an internal model, an attribute of the absolute, as there are not only ordinals in the latter. Cf. Badiou, *L'Immanence des vérités*, pp. 371ff.

9 Badiou, "L'entretien de Bruxelles", in *Entretien*, p. 107.

10 Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 374.

11 *Ibid.*, p. 417.

12 What precisely this kind of fiction is will become clearer in what follows. But it should be clear that it is not meant to be a mere construct of language or discourse. Cf. *ibid.*, p. 30. Badiou once linked it to the idea that a truth is always related to what it will have been (and due to this specific temporality has a fictitious being). Cf. Alain Badiou, "Philosophie & Politique", in *Entretiens*, p. 132.

This is just the roadmap or, if the reader prefers, the activity plan for the envisaged field trip. I take it that such a roadmap or activity plan (or both) can help when one seeks to exit from whatever cave one comes from (for example, one's preconceptions of what the infinite is, or what one believes Badiou is doing – anything that can actually work as a cave, and hold us hostage). It is mainly supposed to enable one to not lose the way on the way (out).[13]

From the being of truths to their appearing...

The Immanence of Truth is not a book that addresses the universality of truth nor its singularity but its absoluteness.[14] It therefore does not deal with the concept of the generic (set) that elucidates a truth's universality nor with that of the inexistent of a world from which its concrete singularity can be accounted for. It deals with the inner link between truth and the absolute and thereby with that of truth and the infinite.[15] The genuine perspective of *The Immanence of Truth* can best be established by depicting why such an absolute point of view is at all systematically necessary.[16] This is especially significant since it is, which for the average professional philosopher will sound irritating, a(n impossible) "view from nowhere."[17] But one should recall that "absoluteness"[18] already played an obvious role in *Being and Event, 1* and therefore Badiou's entire philosophical project seems to depend on how pertinent the perspective of Vol. 3 will prove to be.

---

13 Badiou claims that *The Immanence of Truths* depicts the cave (of finitude), leads us out of it (so that we encounter the blinding brightness of the different sizes of infinities in the absolute, i.e. a heaven of ideas). It then makes us return to the cave, so that we are able to make a difference (between waste [*déchet*] and work [*oeuvre*]). Badiou not only depicts the constitution of the (ontological) cave – which surprisingly disappears if we have a different orientation – but a philosopher is also he or she who, by confronting us with the absolute, drags us out of it: because one should remember that the prisoners do not want to leave voluntarily.

14 Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 275. Absoluteness also necessitates addressing the dialectic between the finite and the infinite. Cf. Alain Badiou, *Le fini et l'infini*, Bayard Culture, Paris, 2010.

15 This is already the gesture of Cantor, whose "ontological thesis is evidently that inconsistency [...] orientates thought towards the Infinite as supreme-being, or absolute." Cf. Alain Badiou, *Being and Event*, Bloomsbury, London / New York, 2013, p. 42.

16 Badiou himself raised this question: "But what is the general necessity for a third book?" Cf. Alain Badiou, "Conférence de Ljubljana", in *Filozofski Vestnik*, 32 (2/2011), p. 7.

17 Thomas Nagel, *A View from Nowhere*, Oxford University Press, Oxford 1986.

18 Cf. appendix 5 in Badiou, *Being and Event*, pp. 456ff.

What thus is the systematic need for a third volume? If it is systematically necessary, this necessity must derive from the specific gaps left by the first two instalments of *Being and Event*. These gaps do not turn their respective enterprises into flawed or failed ones. The point is not that they lack something that could have been done better. Rather, their respective perspectives, when taken together, enable us to see that something is missing (from their points of view), which only appears to be missing because of their points of view. Only after *Being and Event* and *Logics of Worlds* are we enabled to see that something is missing. So, what they brought to the fore was a systematic lack: a lack that only exists because they did what they did. After they established and achieved what they set out to do, it became evident that they only determined in a negative manner what necessarily also needs a positive elaboration. What is it that we only get a negative rendering of? Both books depicted only negatively what it means for a truth to emerge in a historically specific situated world as a set of consequences of an event. They did not positively deliver a demonstration of why and in what sense a thusly produced truth can actually be said to be (eternally) true.

Badiou always argued that "each truth is, in a sense, absolute,"[19] but the first two books did not tell us too much about the inherent conception of the absoluteness of truths. Rather, they did account for it in oppositional terms. This is a systematic implication of their perspective, since they did not positively begin from (within) the (immanence of the) absolute or infinite and then derive an account, for example, of the finite from it. They all argued for a need to think the infinite, yet did not conceive of it from within the immanence of a truth's inner unfolding, even if they relied on what specific generic processes made it possible to think.[20] But Badiou had to reverse the perspective: a(n almost Platonic) turn was needed.[21] To understand the precise coordinates of this turn, one may ask again: Why did the first two volumes of the *Being and Event* series not de-

---

[19] Alain Badiou and Maria Kakogianni, *Entretien Platonicien*, Lignes, Paris 2014, p. 52.

[20] In some sense, my rendering is imprecise and rather heuristic. Because already for *Being and Event, 1* it is clear that it is the infinite that "carries or bears the finite, a truth that carries a subject." Alain Badiou, "Beyond Formalization. An Interview", in *Angelaki. Journal of the Theoretical Humanities*, Vol. 8, No. 2, August 2003, p. 132. And equipped with an adequate concept of infinity, we can see that "the infinite, only the infinite testifies for the truths." Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 419.

[21] On this motive, cf. Frank Ruda, "Marx in the Cave", in Slavoj Žižek, Frank Ruda, Agon Hamza, *Reading Marx*, Polity, London 2018, pp. 62–100.

liver everything one needed to conceive of the (non-)relation between its main terms, being and event? Was this not what they set out to do?

An answer to this question can be sketched out if we recall the previous books' achievements in slightly greater detail. *Being and Event* articulated Badiou's meta-ontological concept of being – meta-ontological because, mind you, philosophy is "not [...] ontology."[22] It did so by identifying mathematics, i.e. axiomatised set-theory with the discourse of ontology. In the same book, Badiou conceptualised how such a philosophical meta-ontology allows the conception of an event, i.e. of 'something' which is not really some thing and which therefore is not what an ontology can possibly account for. It cannot do so, because if an event really is an event, it is not derivable from being (ontologically formalised) qua being.[23] This yields an important consequence for the overall systematic perspective of this volume and the whole project: events can happen even within ontology – as discourse on being. Ontology – but not being! – has a history, because its very concept of being can be transformed.[24]

The concept of the event and that which is directly linked to it, i.e. the concept of truth, was therefore determined in the first volume of *Being and Event* in a primarily negative or at least supplementary way. It was the "*and*", or as Badiou himself phrased it in almost deconstructive language, it was conceived as what "supplements"[25] being. In *Being and Event*, we start from being and get to that

22 Badiou, *Being and Event*, p. 3. This is the case, since "ontology [...] exists as a separate and exact discipline," i.e. mathematics.

23 For this, *ibid.*, pp. 184–190. If it were derivable from a given concept of being, it could be described by recourse to "the encyclopaedia of the situation" (*ibid.*, pp. 327ff.) and hence could be constructed by recourse to the already existing language (which conceptually means there could never be any evental supplement to being, everything would already be latently there and hence the book series could have been called simply *Being*). *Ibid.*, pp. 265–327. This problem will acquire a new dramatic form in *The Immanence of Truths*.

24 *Being and Event* philosophically deploys the conceptual consequences of the "Cohen-event," as something that happened – contingently – in and to ontology. *Ibid.*, p. 16. Yet if what 'substantiates' an event is what will have followed from it, there are therefore also necessarily ontological truths: This is why "there is a history of mathematical truths." Alain Badiou, "Dix-neuf réponses à beaucoup plus d'objections", in *Entretiens, 1: 1981–1996*, Nous, Paris 2011, p. 67.

25 This is why any generic procedure – that "practice" which produces the consequences of an event and thus makes the event into what it will have been – that is inaugurated by an event can be described as an "undecidable supplement" (Badiou, *Being and Event*, p. 355),

which is not being. That-which-"is-not-being-qua-being"[26] proved to be as important as that-which-is (being). Therefore, in a dialectical move, we need to say something about the being of that which is not being-qua-being and thereby we say something about (the being of) truth. Its primary characterisation was negative in the sense that it was doubly derived from the meta-ontological perspective on being: when a truth has originated in what is not-being-qua-being (an event), the being of this truth is – as also holds true for everything that is – also a type of multiple (even though a specific, generic one). *Being and Event* proposed "a complex thinking of *the being of truths*."[27]

The "impossible possibility"[28] of truths arises from what is not (being qua being) – and it *is* not, because it *happens*. After determining what is constitutive of truths, one is able to determine them as that which also and necessarily transforms that which is (even being qua being). So, we move from being to that which is not-being to that which results from the latter and transforms the former. Truths thus bring temporalisation (and history) to being – being, this was Badiou's anti-romantic (anti-Heideggerian) wager,[29] has no history of its own. A historicising truth is therefore always a non-derivable, aleatory supplement to being. History is aleatory and alethic time. *Being and Event* presents a number of concepts for grasping post-evental truths: the event, elucidating its "origin," the "generic" which determined the being of a truth, the concept of "fidelity" (describing its practical aspect) and the concept of "forcing" that determines "truth as truth,"[30] i.e. the being of truth in general. *Being and Event* says something about being and it elaborates what Badiou once called the subjective process, but it does not give us all the conceptual tools needed to think subjectivisation

which is itself sustained by a further, additional, or supplementary supplement, namely "the fiction of a theory" (*ibid*., p. 246), the "supplementary hypothesis" (*ibid*., p. 249) of assuming the totalisation and closure of a generic procedure (as in saying: "I will always love you" after falling in love due to encountering someone new). This is a simplified rendering of forcing.

26 *Ibid*., 15.

27 Badiou, "Dix-neuf réponses", p. 65.

28 Alain Badiou, *Can Politics Be Thought?*, Duke University Press, Durham / London 2019, p. 97.

29 The project is a "de-romanticization of the infinite." Cf. Badiou, "L'être en nombres", p. 189.

30 Badiou, "Dix-neuf réponses", p. 65.

proper.[31] Even though the concept of forcing – allowing one to conceive of the functioning of the "subject-language,"[32] i.e. of the interiority of an engaged subjective perspective and the immanent representation of what a subject believes it is doing – and Badiou's overall philosophy can already here be convincingly described as "genericism,"[33] the event and all related concepts were elucidated against the backdrop of being.

Logics of Worlds, the second volume of *Being and Event*, changes the perspective. It does not deal with being as such but with (formalising) all the possible ways in which (something of) being can appear. Everything that is can appear when it is localised in a determined logical space, in a world. *Logics of Worlds* thus presents a meta-phenomenology where phenomenology, the logic of appearance proper, is related to mathematical algebra and topology.[34] Different from traditional phenomenology, the meta-phenomenological perspective elides all references to an already given subject of (potential) experience. The book elaborated a non-subjective theory of the transcendental,[35] of that which governs the laws of appearance of a singular world. All appearances of being are worldly and thus historical.[36]And even though being appears, appearance has its own logics – roughly put: logic is to appearance what mathematics is to being. Its exposition leads to an account of the multiplicity of different worlds and the different forms

31 For this distinction, which Badiou himself uses (cf. Badiou, "Conférence", p. 15): Alain Badiou, *Theory of the Subject*, Continuum, London/New York 2009, pp. 241–275.

32 Badiou, *Being and Event*, p. 400f.

33 Badiou, "Philosophie & Politique", in *Entretiens*, p. 136.

34 Alain Badiou, *Logics of Worlds, Being and Event, 2*, Continuum, London / New York 2009, p. 234.

35 *Ibid*., pp. 97–188.

36 A reader of *Logics of Worlds* might be surprised that within the logics of appearance certain crucial concepts of the meta-ontological account seem to have disappeared (or been forgotten). But this can mostly be easily explained: What happened to the distinction between nature and history that was crucial for *Being and Event*? The explanation is obvious: whatever appears appears according to transcendentally governed laws; and even if the most stable form of multiplicities (nature) appears, it appears in a particular setting. Their ontological structure will not be transformed by their appearance (there can be factual changes to a natural world through evolution, for example – and factual changes are not events, which means that there are still no events in nature). But nature meta-ontologically, as *physis*, is obviously quite different from phenomenal nature.

of appearance within the frame of an "objective phenomenology."[37] This objective meta-phenomenology, to state the obvious, is not meta-ontology: it deals with a realm of its own in which (something of) being appears in the form of bodies that are accompanied by their respective languages or descriptions.[38]

This is the backdrop against which *Logics of Worlds* seeks to elucidate the appearance of what constitutes a truth and the appearance thereof. We thus get in this work also a theory of all the possible ways in which change can appear, the most intense being an event (pun intended). And we also get an account of the ways in which a post-evental truth-practice can appear[39] and of the appearance of a subject, of a subjective body – since true change that appears also appears as a body.[40] The appearance of an event is related – note the structural repetition – to that which in appearance does not appear, to that which appears so minimally that it appears not to appear, to what appears to "inexist"[41] in a world. An event effectively allows for a change in the laws of appearance, a change of the transcendental.[42] It makes exist that which inexisted by presenting a momentary suspension of the transcendental (which is therefore an appearance of disappearance) that consequently effectuates a transformation of its laws. *Logics of Worlds* accounts for this transformation by offering an account of what it means for a truth to appear within a concrete and particular world. Badiou thus accounted for the appearance of a truth by recourse to that which is not (because it happens, even to and in appearance).

37 Badiou, *Logics of Worlds*, pp. 277–280. Surprisingly enough, Thomas Nagel used the same term to describe his own, quite different project. Cf. Thomas Nagel, "What Is It Like to Be a Bat?", in *The Philosophical Review*, 83, (4/1974), p. 449.

38 Badiou, *Logics of Worlds*, pp. 191–296. On the meta-ontological level, this is referred to as the "language of the situation" (Badiou, *Being and Event*, p. 288f).

39 Meta-ontologically speaking, all elements of an evental situation can only refer in a positive or negative way to the event (when examined); meta-phenomenologically speaking, worlds know more variety, which is why Badiou here also must say something about the reactive and obscure subject (when elaborating what a truth-practice looks like).

40 Technically speaking: it is that whose identity with an event is maximal. Cf. Alain Badiou, *Le séminaire – Images du temps présent: 2001–2004*, Fayard, Paris 2014, p. 422.

41 Badiou, *Logics of Worlds*, pp. 321–324 and pp. 376–378. There is only one inexistent in a world and it is therefore the point on which the whole consistency of the world hinges and which singularises it.

42 Not all transformations affect the transcendental of a world, but an event does. For a catalogue of the different types of change, *ibid*., p. 374.

A truth appears when something appears, as a consequence of an event, which did not appear (and thus did not seem to exist or be possible) before. This conversion appears in the form of a new body that is engaged in a practice of phenomenal self-organisation or auto-transcendentalisation (a classical name for it is freedom). To account for how the product of an event within a world is able to suspend the transcendental and to itself take charge of the laws of appearance, Badiou develops a theory of the subjectivisable body. All that appears in a world are bodies and languages, except when truths appear. They appear as a different type of body, as truth-bodies. They are not simply finite, but inscribe something else into the apparently closed universe of a world. *Logics of Worlds* demonstrates that a subject is not only structured like a language, but also like a dialectic,[43] because within it infinity (truth) and finitude (every body is finite) are materially woven together in a truth-body that appears in a particular world. A subjectivised truth-body inscribes the infinite into a world – because it takes decisions what path to take, what type of consequences to explore, with whom to ally itself, etc., and these decisions are crucial not only for the body's continued existence, i.e. the "bodily [*en-corps*]"[44] materialisation of a truth's self-organisation, but also for the transformation of a world. These decisions are what *Logics of Worlds* refers to as points and they are how the infinite is "filtered by the form of the two,"[45] i.e. by the form of a decision (of how to continue) into the world (again: we are here talking about freedom).[46] *Being and Event, 2* says something about (the) appearance (of being) and it elaborates conceptual tools to account for the appearance of subjective truth-bodies. But it does not give us an account of what subjectivation looks like from the perspective of an individual who incorporates him- or herself into an active truth-body – surprisingly for many of its readers, forcing does not play a very explicit role in it. Even though the complex dialectic of the infinite and the finite is clearly at the centre of Badiou's account of the truth-body, its constitution and transformation, the

43 Cf. Alain Badiou, *Le séminaire – L'un: Descartes, Platon, Kant (1983-1984)*, Fayard, Paris 2016, p. 141.

44 Badiou, *Logics of Worlds*, p. 46.

45 A point is always the infinite treated in the form of the two. Cf. Badiou, *Images du temps présent*, p. 384.

46 It should be clear that inscribing the infinite into the finite by forcing it into the form of the two of an either-or choice means that the infinite (of any truth) is closely linked to freedom. This is an implication that comes fully to the fore in *The Immanence of Truths*. I will return to this point (pun again intended) below.

event and all related concepts, especially that of truth, were elucidated against the backdrop and within the frame of the logics of appearance.

… to their immanence

Two books, two accounts of eventally originating truths, none of which would put truth first. With the third and final volume, the turn must thus be made: truth first! Before we can see what this entails, it is worth pointing out a peculiar problem that arose with and from the publication of Badiou's *Logics of Worlds*. The problem can be described in the following simple way: What is the relation between Vols. 1 and 2 of *Being and Event*? Obviously, one deals with being, the other with appearance, and both deal with the respective relation to eventally originating truths. But is there anything that necessitated the appearance of being? If so, one would have to explain the origin of appearance outside of appearance (notably in being). This runs counter to the concept of being that *Being and Event* elaborates. Nothing in being drives being to appear. For in itself being is static. Therefore, the appearance of being cannot be derived from the concept of being. But why then is there appearance – is this a supplement to being (and what kind)? Is this just contingent?

This set of questions is further complicated by the fact that ontology (as mathematics) clearly appears and hence its world – since "*ontology is a situation*"[47] – follows specific, transcendental, laws[48] that govern what can appear and what cannot appear within it.[49] Here, it is again important to recall that ontology is

[47] Badiou, *Being and Event*, p. 27.

[48] Badiou, *Logics of Worlds*, pp. 183ff. This can mean that there is not first being and "then" also appearance, but that it is as plausible to speak of a primacy of appearing, since it is only within the appearing discourse of ontology, mathematics, that we – if we attempt to identify what it is doing from a meta-ontological position – formulate a concept of being. In this sense, Badiou systematically avoids a two-layer model of ontology and phenomenology.

[49] *Ibid.*, pp. 183–188. The following should be noted: 1. that ontology as such does not have a concept of the event – the event is a meta-ontological, i.e. philosophical concept. Which means "the event" appears as inexistent in the classical world of ontology. 2. It is here important to note that mathematics comes first (as ontology) and logics comes second (as phenomenology). Badiou himself worked in the 1960s within the framework of a "mathematicised logics," a "logical materialism" in which "the difference between a mathematical theory and a logical theory was itself thought from the interiority of logics." This obviously changed in the later development of his position. Alain Badiou,

a condition and that the whole perspective of *Being and Event* provides a meta-ontological, i.e. philosophical, re-formulation of what Badiou identifies as an eventally arisen truth (which transformed ontology). The key to understanding in what way the meta-ontological account of being relates to the meta-phenomenological one of appearing thus lies, what else could be expected, in the account of eventally emerging truths. This does not – and cannot – mean that there is a subject mediating the two distinct spheres of ontology and phenomenology. It rather means that from within a certain post-evental practice we become able to make and formalise the difference between being and appearance. This, therefore, does not necessarily mean that the appearance of being is an event and that such eventuality must be inscribed into our concept of being. Appearing as such is as unevental as being, even if the formal conceptualisations thereof are. But this also implies that the concept of being is not formulated within an objective ontology. It is itself part of a subjectivised truth-body that auto-dictates and regulates its own laws of appearance to itself. "Being" appears in ontology (as discourse) as it does in (philosophical) meta-ontology.

This is to say, 1. there is no path that leads from being to appearance: the concept of being as formalized after the Cantor and Cohen event in ontology is not generative of appearance. But these events changed something about the (transcendental regulation of the) appearance of ontology. There is, thus, 2. a path that leads from appearance to being, under the condition that there is appearance. The relation between being and appearance is a one-way street. Being and appearance look very different from the perspective of (meta-)ontology (as being is then just an immobile multiple of nothing and appearance is a form in which it is counted-as-one) and from that of the logics of appearance (where being is what appears and appearance is the variety in which it appears). In a conceptual sense, this means that there is no (reciprocal or deductive) relation between being and appearing. Thereby, the appearance of being is non-deriv-

"Préface de la nouvelle édition", in *Le concept de modèle. Introduction à une épistémologie matérialiste des mathématiques*, Fayard, Paris 2007, p. 30.

able (nothing necessitates it) and hence contingent.[50] Yet, when there *is* appearing, what appears is *being* (even when formalised within ontology).[51]

If there is no derivable relation between being and appearing, does this mean that – this may almost sound reminiscent of Kantian problems[52] – the third volume is supposed to provide the systematic consistency with – and hence relation to – the previous two unrelated accounts? The project of *The Immanence of Truths* is not to conceive of truths from the standpoint of either being or appearing, but to begin with truth (even though, generally speaking, the structure of the book first deals with the ideology of finitude and then moves on to depict its infinite outside and thereby reverses the constitutional relation between the infinite and the finite, so that the infinite finally comes first – we thus get a repetition in miniature of Badiou's overall path in his last philosophical book). The third volume does not simply fill a gap left open. But it contributes to the ways in which we will have to re-read the previous two volumes. The third volume makes it unambitiously clear that primacy will have been given to the infinite (and thereby to truths) all along. To elucidate this claim, one could argue that the three volumes are linked with one another as the circles are within a Borromean knot: we have being (in its meta-ontological account), appearance (within its meta-phenomenological account), and the two respective accounts of the evental emergence of truth. Finally, we have an immanent account of truth, a conception of truth on and in its own terms.

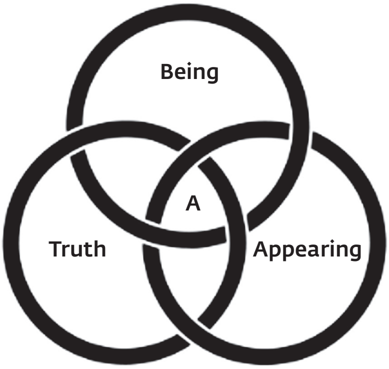
---

50 Does this force us to assume that appearance is therefore necessarily constituted by that which is not-being-qua-being and hence the existence of appearance is itself the result of an event? If this were the case, what kind of event would we be talking about (since it seems rather difficult to account for it in terms of one of the conditions – note: it cannot be an event in ontology, because ontology is the "discourse on being qua being" (Badiou, *Being and Event*, p. 7), but this cannot mean that whatever takes place in this discourse could actually generate the appearance of being (where there was none before).

51 One may see Badiou's claim that "[p]roblems of connection and continuity" – between *Being and Event 1* and *2* – "do remain, namely between 'generic procedure' and 'intra-worldly consequences of the existence of an inexistent'" as pointing also to the problem I address above. Thus, I have formulated a possible solution and follow Badiou's remark that he "leave[s] them for another time, or for others to solve." Badiou, *Logics of Worlds*, p. 39.

52 For a far more convincing reading, cf. Rado Riha, *Kant in Lacan'scher Absicht: Die kopernikanische Wende und das Reale*, Turia+Kant, Vienna 2018. It is important to note that whenever there is appearing, what appears is being, which means that we are not separated from being through appearing.

But to speak of truth in and on its own terms, we have to introduce the concept of truth again, we have to say something about the truthness of truth. Badiou does this by means of the concept of the absolute, which as he claims was therefore "with us"[53] all along – in the sense from *Being and Event, 1*. We thus get the following schema, a Borromean knot with the (inexistent – I will return to this) absolute at its core:



A = Absolute

This model suggests, apparently, that each of the domains has an overlap with the others and hence a unique perspective on how to conceive of them.[54] Only

[53] Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 415 and cf. also Ruda, "Tovariši". Here it is also interesting to note that with regard to the work Badiou did with(in) his seminar, he moves from: a) the logical theory of models (1980–1983) – already precipitated by his 1969 *Concept of the Model*; to b) (mathematical) set theory (1983–1989) – *Being and Event* is published in 1988; and then moves quickly through c) the (mathematical) theory of numbers (1989–1990) – *Number and Numbers* is the manifestation of this period; addresses d) the (mathematical) theory of categories, topos (1990–1996); and e) the philosophical theory of worlds (1996–2001); before finally dealing with f) the ideology of finitude (2001–2004); g) how to conceive of an exit therefrom (2004–2012); and ultimately h) deals with the immanence of truth (2012–2015).

[54] To my mind, one could give a similar rendering of Hegel's philosophical system, with Nature, Spirit, and Logic as circles and, again, the absolute located at their intersection. I offered an interpretation of Hegel's *Logic* along the lines of *The Immanence of Truths* in Frank Ruda, "Hegel's Immanence of Truths", in *Badiou and German Philosophy*, ed. by Jan Völker, Bloomsbury, London 2019, pp. 51–69. It might be interesting to discuss if one may read the above rendering as pointing out that the absolute is nothing but its own unfolding, its exposition.

through their entanglement are we able to see that the absolute is always close-by. The three books form a Borromean knot of being, appearance, and truth: there is being, a being of truth, a being of appearance and an appearance of being, and an appearance of truth; there are truths of the presentations of being, of specific worlds – and, as we will see: the truth of an account of being if formulated in a condition of philosophy can lead us to formulate an absolute ontology (I will get to this). In order to keep these rings together, the absolute is needed – and it only in-exists in this entanglement; it becomes conceivable in the margin(s) at the centre. It is the knot's off-side, out-side, out-of-sight, out-of-space, out-of-place, its *hors-lieu*.[55] One needs being, appearance, and truth to expose it.

Another way of putting this is the following: ontology is a condition and hence the site of potential truth procedures. Therefore, the determination of the being of a truth can itself be regarded as the (knowledge-) product of a truth-procedure. The absolute is what can be said to determine the truthness of truth. We can understand how to conceive of it by determining the consequences and implications of the truth procedure that allows for a new thought of the concept of being, by allowing for a new conception of infinity, and of its appearance as part of the truth-body that is unfolded within ontology in the aftermath of the (Cantor-event and) Cohen-event. This brings with it also a new conception of truth. We get an absolutely immanent account of the truthfulness of truth, of the absoluteness of truth if we take into account that ontology is itself a condition where something happened that philosophy has to incorporate. From this meta-ontological perspective, a truly novel ontological account of the being of infinity and thereby of truth must be read as a result of a truth procedure that has the peculiar features that it – qua result – also provides an immanent "measure" of its own truth-value. An ontological truth procedure produces a thinking of infinity that through the intervention of philosophy can be comprehended as providing an evaluation of a truth's truthness.

This does not lead us to the discovery of the one and only true truth. The absolute is not *the* truth. Rather, it is because of a truth-unfolding in (and as) ontology that we can forcefully imagine an absolute – and hence no longer historical – ontology. An ontology that allows us to verify that the truth we are engaged in –

55 Badiou, *Theory of the Subject*, pp. 3–21. This is why Badiou will indicate that the absolute is not a multiple and not a set.

sharing its ontological consequences – is actually true. Thereby it provides an immanent “measure” of itself and of all other potential truth procedures. A truth occurs in ontology in such a way that it creates a fiction of knowledge that allows us to determine the absoluteness, i.e. the truthness of the truth that created this very fiction. Badiou always insisted that “the *potency of a truth* depends on the hypothetical forcing. It consists in saying: ‘If we suppose the generic infinity to a truth to be completed, then such or such piece of knowledge must be imperatively transformed.’”[56]

An absolute ontology must be an ontology whose very constitution is impacted and effectuated by a truth procedure, yet which is only properly constituted with the hypothetical formulation – i.e. with the necessary even though impossible and thus fictitious forced totalisation – of all possible effects of this very truth procedure. We create such fictitious totalisation in ontology and thereby we articulate an absolute measure of truthness, which implies that we formulate a complete, absolute, ontology. It is precisely in this sense that we surpass the “structural” and “historico-existential”[57] determinations of truth and start to determine its proper truth character. In its unfolding, we bend the process back onto itself and totalise it.[58] Yet this totalisation is necessarily fictitious and, even though necessary, at the same time bears the mark of its own impossibility due to the fact that the consequences of a truth procedure are never just completed – otherwise, at least in an immediate understanding, a truth would be finite or limited.[59] Even though a truth procedure absolutises[60] itself in ontology and thereby generates the concept of the absoluteness of truth, we must “think a truth as at the same time grasped in its immanence to the absolute and at its distance to this grasp.”[61] If we were to forget that the totalisation is a hypothetical fiction bridging the impossible, we would reduce truth to knowledge or make truths into one truth (and end up either suspending truth altogether or turn philosophy into religion). An absolute ontology is a necessary and impossible project of a philosophy that identifies ontology with mathematics, mathe-

56 Alain Badiou, “The Ethics of Truth: Construction and Potency”, in *Pli* 12 (2001), p. 252.
57 Badiou, *L’Immanence des vérités*, p. 20.
58 This sounds highly compatible with certain contemporary readings of Hegel.
59 The solution, as I will only be able to indicate briefly at the end, will lie in splitting the concept of the end into two. One divides into two: even at and in the end.
60 Badiou, *L’Immanence des vérités*, pp. 415ff.
61 *Ibid.*, p. 402.a

matics with a specific thinking infinity (without one), and infinity (without one) as what allows for conceiving of truth: we must have a measure (of truths), we cannot have a measure, we will have a measure.

Impossible, yet necessary: forcing absolute ontology

The task is clear. *The Immanence of Truths* attempts to formulate what makes a truth truly, really true, so that it is ultimately not relative to the situation or world whose truth it is or in which it appears as truth. Even though truths are formed within (and with the material of) a world or situation, they must also be independent of it. Obviously, this demands a non-relative (non-situation specific, non-world specific), i.e. an absolute, take on truth. It necessitates an absolute ontology (of truth), which provides us with a kind of measure or orientational guideline for what is true (and for what might be truer than something else). If a truth is not relative, there must be a measure. And this measure cannot simply be timely and revisable, but it must be absolute. That is to say: to have a concept of truth one needs a concept of absoluteness,[62] because if one overemphasises the idea that a truth is always situated and is a truth of this or that situation, one gives up the idea of truth and endorses that everything is externally determined and relative (to a situation or world and this was what remained in part unresolved by the first two volumes of *Being and Event*). What is at stake here thus also immanently links the concept of truth and that of freedom. If there were no such concept that allows one to immanently determine what truths are, they would also not be transmissible and therefore would not be as universal as they conceptually must be. One thus needs a specific kind of dialectical take on truths' truth and this is only offered by an immanent perspective. Walter Benjamin once remarked that "the inner [*das Innere*] of history is reserved for the dialectical gaze,"[63] and if truths are what really makes history in all relevant senses of the term, the same holds for Badiou's project.

62 This even holds for the idea that there is no truth – since it, trivially, claims to be absolutely valid (and hence true). It is thus not that it is difficult to say something about truth (we do this all the time – and Hegel's *Phenomenology* shows us all possible ways in which we can be wrong about what we take to be true and how we attempt to avoid correcting ourselves), but it is difficult to confront what is true about truth. It is difficult because here we confront the infinite.

63 Walter Benjamin, "Ein Jakobiner von heute. Zu Werner Hegemanns ‚Das steinerne Berlin'", in *Gesammelte Schriften*, Vol. 3, Suhrkamp, Frankfurt am Main 1991, p. 263.

This necessitates that one creates the forced and forceful fiction of a totalisation, of an absolutisation of an active truth procedure in the condition of ontology. The result of this forcing is the idea of an absolute ontology. In *The Immanence of Truths*, V is the name of the result of such an operation of forcing. Yet, it is of importance to qualify that V is more than what makes a merely fictitious[64] whole of a truth. Since the operation of forcing – i.e. a constitutive element of any truth procedure whatsoever[65] – is what enables truths to have an effect on knowledge. Forcing compels new terms into knowledge and in the present case it forces a paradoxical fiction of a knowledge of truth into knowledge.[66] It is here that we must emphasise the fictitious qualification of the forced concept of an absolute ontology: that it is fictitious means that we do not reduce and dissipate truth to and in knowledge. But we operate as if there were a knowledge of truth, a real science fiction of truth in the form of an absolute ontology. To reduce truth to knowledge is, on the other hand, what the constructability hypothesis (shorthand for: Gödel – "who constitutes the latent force of the ideology of finitude"[67] – since the publication of the first volume of *Being and Event*) is ultimately about.

In its third volume Badiou must make a strong case why the universe of absolute ontology, with the absolute as the place where all possible forms of being are placed (this idea being the result of the operation of forcing), must be different from the constructible universe. Otherwise, we would violate what *Being and Event* stated about the being of truths, namely their generic nature, bringing together elements that have nothing else in common than having been brought together. The danger lies in seeing in the result of ontological forcing an absolute validity

64 "Fiction" here does not mean that we are dealing with an illusory or merely fake being (of language or metaphysics only – cf. Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 22). Rather it means that truth (in its totality), in Lacan's phrasing, has the structure of a (necessary, yet impossible) fiction.

65 This is already the argument of Vol. 1. Cf. Badiou, *Being and Event*, pp. 391–440.

66 In precisely this sense, Badiou speaks of "an – almost true – knowledge of what can be, grasped in its proper advent, the almost absolute being of truths." Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 393.

67 *Ibid.*, 246. "Gödel" stands for a specific kind of problem – since he does not simply defend a formalist interpretation of mathematics, wherein mathematics is understood as a (language) game, but is a "convinced Platonist" (*ibid.*, p. 67). There is thus a struggle within the Platonic conception of mathematics – one (philosophical Platonism) divides into two (constructivism and genericism). That is to say: Gödel also absolutises, but the outcome is quite different, namely he stands for "the possibility of an integral absolutisation of finitude." *Ibid.*, p. 257.

of the constructible universe – or in Badiou's rendering, in assuming "V = L"[68], which describes "the victory of what is (constructible) over what is not" and is ultimately "'realist' propaganda."[69] Against the assumption that "all that is, is constructible," which is the foundational axiom of "the ontology of finitude,"[70] it is crucial not to misconceive the forced totalisation of an immanently untotalisable ontological truth procedure in a finitising way. This is what is at stake with the concept of absolute ontology.

Forced ontological totalisation must be non-constructible. It can neither lead to "*das Seiende im Ganzen*," to "beings as a whole"[71] in Heidegger's sense – as there is no existing whole in set theory – nor can and should we assume that by means of forcing we would find a structural paradigm that enables us to imagine how the absolute – of an absolute ontology – actually exists. This is the fundamental problem with Cantor's continuum's hypothesis, since it assumes that the relation between different sizes of infinity (more adequately: between the size of the infinite set of natural numbers and the size of the larger infinite set of real numbers) could be constructed by applying the successive ordering structure of the set of natural numbers. Then their relation could be described by recourse to the structure of natural numbers.[72] The problem with this, as with "whole numbers," which "have become the alpha and omega of each evaluation when it comes to ideas [...] or of the value of historical experience,"[73] is that this finitises infinity by assuming there is a constructible structure. The domain of infinity is thereby turned into a domain where there is more of the same (finitude). One therefore must create an impossible yet necessary forced totalisation of what is non-totalisable, i.e. one must create an absolute ontology within which one also forcefully wards off the temptation of constructability.

68 *Ibid*., p. 247. "L" stands for the constructible universe and V for the formalisation of "the Vacuum, the great void, but also the Truths." *Ibid*., p. 40.

69 *Ibid*., p. 247.

70 *Ibid*., p. 441.

71 Martin Heidegger, *What is Metaphysics? Original Version* ed. by Dieter Thomä, in *Philosophy Today*, 62, (3/2018), p. 738.

72 One problem with this is that it does not allow us to see that when we attempt to say something about infinity, we actually do not know what we are talking about. This becomes even more problematic for Badiou when we use the concept of "infinity" without knowing anything about what happened in mathematics in the last fifty years. Cf. Alain Badiou, *In Praise of Mathematics*, Polity Press, London 2016, p. 43f.

73 Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 444.

If this cannot be done, our attempts are wasted; if we can, there might be an oeuvre. The task is to first provide an outline of such a forced absolute ontology and then to delineate the conditions under which it remains non-constructible. And this is what *The Immanence of Truths* does, *inter alia*, by positing that "V is not, itself, a set" and that it has the "capacity to welcome infinitely many infinite forms of possible-being." Even though it presupposes "a kind of ultra-infinity,"[74] this should not lead us to the assumption that an absolute ontology implies an ontology of the absolute. The absolute is the place of all possible forms of being, yet this place does not exist: it is and must be inconsistent.[75] It inexists and hence forcing an absolut(ised) ontology – i.e. "the possible anticipation of a real phenomenon"[76] – does not ontologise the absolute.[77] The absolute is rather the real of truth(s).

Dialectics of axioms

Almost at its beginning, *The Immanence of Truths* formulates an absolute ontology – and it argues that set theory fulfils all criteria to be such an ontology. An absolute ontology is "the existence of a universe of reference, a place of thinking being qua being"[78] that has four defining features. The first of its features is that "it is immobile." This means that being as such does not have a history – which is itself, more or less obviously, an implication of the term "absolute ontology." Being does not have a history because being does not move. It provides the background against which one can conceive of movement and history, but neither is it an internal attribute of being as such. For an absolute ontology, being is unmoved – and this implies that even the mathematical formalisation of movement itself is articulated somewhere, where there is no movement: "the

[74] *Ibid.*, p. 370. Also instructive here is W. Hugh Woodin, "The Realm of the Infinite", in *Infinity: New Research Frontiers*, ed. by Michael Heller and W. Hugh Woodin, Cambridge University Press, New York 2011, pp. 89–118.

[75] In this sense, this operation of ontological forcing remains faithful to Cantor, who "does not step back from associating the absolute [absoluité] and inconsistency." Badiou, *Being and Event*, p. 41.

[76] Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 41.

[77] Badiou therefore repeatedly insists that V is not a multiple (not a set) and hence is truly inconsistent within the universe in which it is formulated.

[78] Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 36.

mathematical equation that formalizes the thinking of movement has no specific location, except, in fact its mathematical absoluteness."[79]

Being is, secondly, intelligible in all its dimensions on the basis of nothing. This implies that we do not have to refer to any kind of substance (or positive properties), nor to a subject to conceive of being qua being.[80] The only thing we need is no-thing. We need (substanceless) nothing – a nothing without nothingness – to unfold this ontology consistently – which obviously is always an advantage in comparison to needing something. Being is composed of nothing and nothing does not move: there is nothing in the grand void which composes being.[81] This means that being is not composed i.e. it is "non-atomic."[82] Thirdly, being can only be thought by means of the "axioms to which it corresponds."[83] This allows us to distinguish an absolute ontology from all kinds of phenomenology (being cannot be experienced) and all types of empiricism – being is not empirical (but constructed by axioms on the basis of nothing). This is crucial, since thinking being is independent of the fact whether it is or is not. In an absolute ontology, thinking and being are the same when we are thinking being. The final and fourth feature of the absolute ontology is that it obeys a principle of maximality, namely that "any intellectual entity whose existence can be inferred without contradiction from the axioms that prescribe it, exists by that very fact."[84] What is rational is real, what is real is rational. That is to say, any "thing", any being, that can be derived from the axioms of the absolute ontology alone is taken to exist because it can be inferred without contradiction. The four principles relate to one another dialectically. There is a dialectic of the axioms of absolute ontology:[85]

79 Badiou, *In Praise of Mathematics*, p. 75.

80 Badiou gives the following example: "Take a revolutionary movement, an uprising that will become historic, such as the storming of the Bastille, let's say. Considered in terms of its pure political value, as a symbol, a reference point, an absolute beginning of a process, this event cannot be broken down into separate units. It's not the result of an addition of factors." *Ibid*., p. 75f.

81 Here it is interesting to consider the beginning of Hegel's *Logic* which Badiou commented on in similar terms in Alain Badiou, *The Rational Kernel of the Hegelian Dialectic*, re.press, Melbourne 2011; cf. also Rebecca Comay and Frank Ruda, *The Dash – The Other Side of Absolute Knowing*, MIT Press, Cambridge, 2018, pp. 87-106.

82 Badiou, *L'Immanence des vérités*. p. 36.

83 *Ibid*., p. 37.

84 *Ibid*.

85 In what follows I recapitulate a public discussion with Alain Badiou (and Jan Völker) on the concept of absolute ontology. Cf. the recording at: https://vimeo.com/28417395.

Beginning with and within an immobile place (i.e. "V"), which is entirely static, the thought of being does not introduce any kind of movement into it (1st feature). How must this place be conceived to be really immobile? There must be no-thing in it, there must be a pure nothing-ness "in" it (2nd feature). The place where we think being is absolutely empty and hence entirely immobile. Only such nothing(-ness, even though the substantialising postfix is misleading) is immobile, since every-thing, certainly any (concrete) thing moves and is in transformation all the time. From the first principle – being is entirely immobile – we are thus necessarily led to assume that an absolute ontology commences in (and with) nothing(-ness). This forces us to consider how we are able to think this nothingness – since it obviously can neither be empirically experienced nor can we simply deduce it from a given preceding concept. There is one possibility of how to think it as such, notably by recourse to principles or axioms (3rd feature). Axioms represent a set of theoretical affirmations needed to realise and comply with the first two features of an absolute ontology. The affirmative positing of axioms is thus a consequence of the 2nd feature, which is a dialectical consequence of the 1st feature. The principle of maximality can now also be regarded as a dialectical consequence of the 3rd feature, because if you think on the basis of axioms, you must admit all of their consequences to really think in accordance with them. This is to say, the decision that being is immobile is what leads us to the set of features by means of which an absolute ontology is unfolded. Set theory fulfils all these criteria and thereby becomes the paradigmatic candidate for an absolute ontology.

As a consequence of a truth procedure taking place in ontology, we can force an absolute ontology that we then meta-ontologically identify with the very discourse on being that we (already had) identified as ontology.[86] The results of ontological forcing are also registered in a meta-ontological manner and affect the conception philosophy has of its ontological condition. It affects meta-ontology. The formulated absolute ontology debunks – different from Spinoza, who for Badiou was the first to claim that "a consequent materialism demands an

[86] I named this operation – an operation which can happen under the specific historic condition that the very existence of conditions, i.e. of truths as such, is threatened – *philosophical forcing* and have shown in what way it is linked to what psychoanalysis calls "working through", in Frank Ruda, *For Badiou. Idealism without Idealism*, Northwestern University Press, Evanston 2015, pp. 127ff.

absolute referent"[87] – all substantial, i.e. unifying and one-ifying, properties of substance. It is important that V does not exist and incoheres, since thereby it also avoids introducing substantial attributes of an already given subject (and eliminates all substantial links between the two, too). It is important that such non-substantial absolute ontology is absolute, but not objective. It is not an objective ontology because it does not give a description of any kind of object nor any objective account. But this does not make it relative or relativist. Yet, here we encounter a peculiar almost Kantian question (slightly resonant of debates around his table of categories): is this set of axioms of absolute ontology complete or not? If it were not complete, it may be accidentally incomplete – and then nothing would change with regard to the status of this ontology – or it may be systemically incomplete – and this would change its absolute character. To avoid jeopardising the absoluteness of ontology, Badiou insists that the set of axioms can be completely determined, even though it has not yet been entirely discovered.

Truths "in" the absolute: forced freedom and necessary totalisation

Thus far, I have reconstructed Badiou's claim that ontology is a condition of philosophy and that this implies that there can be truth procedures taking place within it. The specificity of this type of truth procedure lies in the fact that it unfolds the potential of scientific discoveries within the field of mathematics and that this unfolding – in its retroactive and creative dimension[88] – leads to a theorisation of different types of infinity, which in turn can itself be read as offering a conceptualisation of the truthness of truths. This finally allows us to apply its conceptualisation of truths as part of the unfolding of a truth procedure taking place in ontology onto the very concrete procedure that formulates this concept of truth. There is a torsion of the ontological truth procedure. This means that the very truth-conceptualisation which it allows by means of theorising different sizes of infinity applies to itself and thereby it allows for an absolute – in the sense of being fully detached from everything but itself – and a fully immanent "measuring" of its own truth (i.e. infinity) by means of its own creation. We get a true theory of truths – which evaluates truth solely from within its own imma-

87 Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 37.
88 *Ibid.*, p. 588ff.

nent practical unfolding. This theory of truth is practically self-absolutising.[89] The further we force this immanent and absolute self-measurement, the more we are forced to formulate the idea of an absolute ontology[90] – something that philosophy articulates so that this idea will prove compossible with contemporary creations in other conditions of philosophy, allowing us, for example, to philosophically identify a truth in politics. The self-absolutisation here chimes with philosophy's "desire for truth."[91]

What has been missing from the argument thus far is how the dialectically interconnected axioms of absolute ontology relate to the conceptualisation of the different sizes of infinities. This move, in all its demanding mathematical intricacy, leads Badiou to undertake in *The Immanence of Truths* a veritable and majestic renewal of the dialectics of quantity and quality, a dialectics of quantity and quality exploding in all directions – creating the absolute place "V", which can be imagined to be structured similar to the letter that names it.[92] This move into the mathematical discussion of infinity is crucial since only with this step do we complete the torsion, the peculiar circle, and only thereby see how we can force mathematics into the status of an absolute ontology (even though the latter is a meta-ontological concept). We only get a proper absolute ontology that provides us with a real conceptualisation of truths if we explore the domain of infinity, the powderiness of V. This is why two – at least – further clarifications are needed concerning the previous remarks:

First, an absolute ontology must reject the Continuum Hypothesis – as it would impose a structural model for the relations between different sizes of infinity and thereby the realm of infinities would be made constructible and finite.[93] This

89 Badiou identifies this move that happened "in the last twenty years" with the work of Woodin. Cf. Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 68f. For reasons that would explode the length of the present article, I cannot elaborate why this move is justified and yet cannot be repeated, such that after establishing an absolute ontology it is truly absolute. The reason for this is elaborated in Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 495ff. I will return to this elsewhere.

90 Which is the reason why the absolute must be in a strict identity with itself: *ibid.*, p. 451f.

91 Badiou, "L'entretien de Bruxelles", p. 91.

92 Cf. schema 2 in Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 688f. One can read this as Badiou's take on the famous "parallelism" argument in Spinoza.

93 Which is why Badiou takes it to be false, even though it is compatible with the axioms of pure set theory, cf. Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 310.

must mean that we simply cannot derive and deduce the infinite from finite succession. To overcome the finitising constructivist orientation, we must disentangle thinking the infinite from "the false infinity of hopeless successions."[94] This false succession is false because it has three problematic implications: 1. we have a succession that follows *one* steady model whereby any infinite set is followed by a greater infinite set and the relation between the two is always of the same kind (which is constructible in advance). But the infinite can only be properly thought if we unbind it from any link to the one and do not problematically generalise the move by means of which we can get from one infinity to a larger one (otherwise we would in advance unify, make consistent, and count as one all these transitions). There is neither a largest one nor is there any one-structure by means of which we could construct all relations between infinite sets. 2. this succession is false because with each new and larger infinite set, it would happen that we simply finitise the previous set. That is why we are tempted to encounter only potential infinity in the realm of natural numbers, at least if our concept of infinity emerges from the idea of stable succession. 3. It is false because it is a paradigm of what Hegel called bad infinity, since it continues endlessly – and this internal endlessness is precisely the ruse of potential infinity. In order to formalise actual truth, there must be actual infinity. We would not get an immanent measurement of truth if we simply followed an infinite succession of infinities nor an absolute ontology.

Second clarification: it is here that a choice needs to be made: "a crucial choice,"[95] which Badiou identifies with the "fictitious opposition Cohen / Gödel."[96] Either everything is constructible and hence finite (Gödel), a position that does not necessitate any choice at all, or there is a choice, a choice for which we have no criteria other than what we can anticipate will follow from opting for one or the other side. A choice which in this sense is determined by the fictitious anticipation of what it entails and which is constructed from a meta-ontological perspective. Philosophy here becomes an imitator and mimics a feature of the forcing-operation happening in its condition(s). If there is such a choice,

94 Alain Badiou, "Toward a New Thinking of the Absolute", in *Crisis and Critique*, Special Issue, 1, (2/2014), p. 21.

95 Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 257.

96 *Ibid*., p. 266.

philosophical forcing constructs a fundamental fictitious incompatibility:[97] two sides that are so infinitely different that each amounts to an entirely different orientation with a whole range of implications (from consequences for the existence or inexistence of absolute truths, to what kind of ontology one defends and political positions one finds defensible, say if one's ontology is compatible with present regimes of domination or not, etc.). The infinite gap that we encounter between the finitising orientation of constructability and its finitised, only potential infinite, and the actual infinite of genericism with its "infinite potentiality,"[98] on the other side, forces us to choose. We here, through a forced philosophical fiction, surprisingly experience infinity, namely the infinity that separates the two sides of the choice. We experience the infinite when we identify the fictitious choice as a real choice, as one that forces us to be free and we cannot not choose. But we only encounter it if we construct the choice as choice and see that we must choose; otherwise, we have already chosen (constructability).[99] And if we identify it as choice, we also have already chosen, since then we see that the constructible orientation absolutises de-absolutisation, i.e. it absolutises finitude, and this contradiction cannot but be a reactive (or obscure) defence mechanism against some truth taking place. If something truly happened in ontology with Cohen, its anticipated consequences absolutise ontology and this forces philosophy to create the fiction of a choice, which has already been made. With an ontological truth procedure there originates the fiction of an absolute ontology and philosophy is itself forced to force a fiction. Philosophy is meta-forced, forced to force the fiction of a choice whose only criterion lies in its anticipated consequences for ontology – which adds another layer of forcing. When we identify the choice as a choice, the choice has immediately been taken, it never existed as a matter of deliberation. This is the experience of freedom that *The Immanence of Truths* transmits. A freedom of and in thought, the free-

97 That it is a forced philosophical fiction becomes manifest in the fact that this choice does not seem to be a necessary choice at all for the mathematician – but for the philosophically informed, to put it neutrally, mathematician or for the mathematically informed philosopher it cannot but be one (for Badiou).

98 *Ibid*., p. 223.

99 Max Horkheimer once remarked in a radio conversation that Sartre believed that people no longer decide. He added critically, and in line with the above, that the true problem is rather that they do decide but are not aware of it. Opting for Gödel is a spontaneous ideology that one barely notices as such.

dom of a forced choice that we do not (as individuals) arbitrarily decide (according to our preferences), but that is decided within the immanence of thought.

But it is important to note that both sides are equally valid: both are compatible with set theoretical mathematics,[100] even though its ontological status changes quite drastically if we opt for the one or for the other. This choice confronts us with freedom as we have no objective reasons to choose the one or the other; there is no normative grounding whatsoever apart from the anticipation of consequences and if we see what is at stake with the choice – if we understand the choice as choice – ultimately there is no choice, as there is only one option to choose when we anticipate what the consequences will have been. Between equal rights, forcing decides. As any choice, this choice is a real choice because it is structurally undecidable and this also means that it is already decided when we identify the choice as choice. What we have at our disposal is only the anticipation of what results from choosing either side. This anticipation is what Badiou calls "idea."[101]

The philosophical thinking of what was thought in its ontological condition manifests in the fictitious construction of a choice. This fiction of choice is forceful, since as long as one starts to see it, one can no longer choose to escape it and therewith one has already chosen – philosophy reminds us of what we were unaware we knew before. It is a choice of one's way of thinking that may manifest a "non-constructible subjectivity."[102] By being forced to choose one experiences freedom, since one experiences something of the infinite in identifying the infinite abyss that separates thinking under the guidance of an idea from the ideology of finitude. Freedom in thought exists only in the fictitious realm of a forced choice that has consequences in and for everything. This fiction provides us not only with a genuine experience of freedom in thinking – or in spirit, as one could say with Hegel, or more precisely: with a genuine experience of free-

[100] Which is why, as Badiou points out, mathematicians as such would not come across this choice, since both positions are compatible with the delineated set theoretical universe.

[101] Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 265. This is the treatment of a point – in the terminology of *Logics of Worlds* – I elaborated above. It should be clear why this shatters the predominant conceptions of freedom. I tried to make an argument pointing in this direction in Frank Ruda, *Abolishing Freedom. A Plea for a Contemporary Use of Fatalism*, Nebraska University Press, Lincoln 2016.

[102] Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 265.

dom in absolute spirit. If there are real differences at stake in this constitutive choice – and the subsequent development of the mathematics of different types of infinity will essentially develop these in different ways – this proves that there are some things one can only do within the realm of thought (and not in the same way in concrete life[103]). But thereby we may get a "new idea of human action,"[104] of thought and of truth. This forced freedom touches the absolute – through the infinite gap separating the sides. In the absolute spirit of meta-ontology's constitutive choice there is an experience of freedom and of truth, since it is an experience of infinity[105] – an experience that is transmissible under the condition that the fiction of this choice is transmissible.

The status of an absolute ontology is thus linked to an experience of freedom. It therefore does not come as a surprise that Badiou endorses that the absolute ontology (set theory) must also entail the axiom of choice. This axiom is only relevant for infinite sets and indicates that from any given infinite set, a set can be extracted that is composed of an element of each set that is an element of the original set – yet it does not offer any means to construct it. The axiom of choice indicates that there is a choice but it leaves open the criteria and framework of this very choice. When relating this back to the four features of an absolute ontology, this implies that the latter is fundamentally based on an essentially indeterminate choice: a choice that does not have any objective or subjective or concrete conditions, a choice that is determined by nothing, a pure (indeterminate) choice, a lawless choice. "It validates a choice whose norm does not pre-exist, a representation whose Law is unknown."[106] The axiom of choice is an inner-mathematical dialectical consequence of the pure and lawless choice between constructability and genericism – on which the very inexistent existence of an absolute ontology relies – which takes axiomatic form. It repeats something of the immediate choice (conditioned by the torsion of ontology), yet in a different form. It is – in Hegelian terminology – a repetition of the immediate

---

103 But the former fundamentally changes our effective – ontological, etc. – take on the latter. It means that we get a different concept of what thinking (and freedom) is. And we get it in thought and this can change everything. This was what Hegel argued for when he emphasised the non-practical nature of philosophy (in absolute spirit). And should not an absolute ontology be part of absolute spirit?

104 Jean-Paul Sartre, *Search for a Method*, Knopf, New York 1963, p. 45.

105 Which again proves the old point that truth can only be accessed in a one-sided manner.

106 Badiou, "Toward", p. 20.

as result, but, and this is crucial, now the pure choice repeats not at the ground and foundation of absolute ontology but in the literal heights of its development, namely in the theory of different sizes of infinity. An absolute ontology is framed by freedom at its ground – the forced choice to unfold the consequence of an event – and peak, the meta-forcical impact that the forced self-absolutising of ontology has for the very concept of meta-ontology. A freedom that is not a given unless we identify the choice as a choice and are thus forced to make it actual, because we have already done so.

(Too) brief addendum on the end of infinity

Based on a given infinite set, one can easily construct a new sort of infinity by means of what is called orthogonal operation.[107] To do so, we measure it and determine its size, i.e. the number of its elements. This holds if the set is finite or infinite. If we call "Hans" the given infinite set – provided that we have managed to measure it – we can attempt to determine a set that is so incomparably larger than "Hans" that there are at least "Hans" many infinite sets that are smaller than it. So, we have a set, let us call it "Super-Hans" in comparison to which "Hans" is small, since there are "Hans" many infinite sets that are all smaller than "Super-Hans". "Super-Hans" comprises "Hans" times "Hans"-sized sets. It is "Hans" Hans-times. If "Hans" is infinite, "Super-Hans" is clearly super-infinite. The problem that occurs within this type of construction of infinite sets is that retroactively the previous infinite set is finitised. "Super-Hans" finitises "Hans". If this were the case, we would only in appearance be dealing with infinite sets – until they are superseded and then they are finite again. We would thus end up again with a bad infinite and with a potential invalidation of everything we held to be true (if this is what we are talking about when we talk about the infinite).

In *The Immanence of Truths*, Badiou mobilises an astounding theorem that was developed in 1971 by Kenneth Kunen. It elaborates a meta-ontological precondition for conceiving of actual infinity (and hence truths). To cut this down violently: it proves that "numerical openness is not the law of infinity" and that there is no endless succession. The only way we encounter actual and true in-

[107] I am taking this elaboration from Alain Badiou, "Toward a New Thinking of the Absolute" (manuscript). All subsequent quotes are from this paper.

finity therefore is, so to speak, by ending it somewhere. There is unwilling finitisation – in the idea of potentially infinite and eternal succession – and there is a different type of finitisation. The introduction of a limit, a region where the endless "process of the resorption of successive infinities" comes to an end. A bad infinite and – emphasising its Platonic undertones – a good infinite. There is no actual infinity without this peculiar type of end. Once the end of history was proclaimed as a precondition for an adequate concept of history, which implies that the resurgence of history will necessarily end and revolutionise what we conceive as history, and the end of art was proclaimed to be preparation for the emergence of a new art that will thoroughly shake what we previously deemed possible to be art. This was always different from the endless blabber about the end of (political history in democracy or art in art-theory, and of) philosophy, which Badiou has been heroically combatting for decades now. In the end, what the thinking of actual infinity ontologically and meta-ontologically necessitates is an emancipatory theory of the end. Only then can an actual infinity be thought that measures up to the infinity of the forced freedom at its origin. It might not be accidental that *The Immanence of Truths* represents the end of Badiou's philosophical enterprise.

References

Badiou, Alain, "The Ethics of Truth: Construction and Potency", in *Pli* 12 (2001), pp. 247–255

— "Beyond Formalization. An Interview", in *Angelaki. Journal of the Theoretical Humanities*, 8 (2/2003), pp. 111–133

— *Le concept de modèle. Introduction à une épistémologie matérialiste des mathématiques*, Fayard, Paris 2007

— *Theory of the Subject*, trans. B. Bosteels, Continuum, London/New York 2009

— *Logics of Worlds, Being and Event, 2*, trans. A. Toscano, Continuum, London / New York 2009

— *Le fini et l'infini*, Bayard Culture, Paris 2010

— "Conférence de Ljubljana", in *Filozofski Vestnik*, 32 (2/2012), pp. 7–24

— "Dix-neuf réponses à beaucoup plus d'objections", in *Entretien 1. 1981–1996*, Nous, Paris 2011, pp. 59–80

— "L'entretien de Bruxelles", in *Entretien,* pp. 81–110

— "Philosophie & Politique", in *Entretiens*, pp. 125–140

— "L'être en nombres", in *Entretien*, pp. 167–196

— *The Rational Kernel of the Hegelian Dialectic*, re.press, Melbourne 2011

— *Being and Event*, trans. O. Feltham, Bloomsbury, London / New York 2013
— *Le séminaire – Images du temps présent: 2001–2004*, Fayard,Paris 2014
— “Toward a New Thinking of the Absolute”, in *Crisis and Critique*, Special Issue, 1 (2/2014), pp. 19–24
— *In Praise of Mathematics*, trans. S. Spitzer, Polity Press, London 2016
— *Le séminaire – L’un: Descartes, Platon, Kant (1983–1984)*, Fayard, Paris 2016
— *L’Immanence des vérités. L’être et l’événement, 3*, Fayard, Paris 2018
— *Can Politics Be Thought?*, trans. B. Bosteels, Duke University Press, Durham / London 2019
Benjamin, Walter, “Ein Jakobiner von heute. Zu Werner Hegemanns ‚Das steinerne Berlin’”, in *Gesammelte Schriften*, Vol. 3, Suhrkamp, Frankfurt am Main 1991, pp. 260–265
Comay, Rebecca and Ruda, Frank, *The Dash – The Other Side of Absolute Knowing*, MIT Press, Cambridge 2018
Hegel, G. W. F., *Science of Logic*, trans. G. Di Giovanni, Cambridge University Press, Cambridge 2010
Nagel, Thomas, “What Is It Like to Be a Bat?”, in *The Philosophical Review*, 83 (4/1974), pp. 435–450
— *A View from Nowhere*, Oxford University Press, Oxford 1986
Riha, Rado, *Kant in Lacan’scher Absicht: Die kopernikanische Wende und das Reale*, Turia+Kant, Vienna 2018
Ruda, Frank, *For Badiou. Idealism without Idealism*, Northwestern University Press, Evanston
— *Abolishing Freedom. A Plea for a Contemporary Use of Fatalism*, Nebraska University Press, Lincoln 2016
— “Hegel’s Immanence of Truths”, in *Badiou and German Philosophy*, ed. by Jan Völker, London, Bloomsbury, 2019, pp. 51–69
— “Tovariši absoluta, ali: Kje je “*auprès de nous*?””, in *Problemi*, (3–4/2019), pp. 133–150
Sartre, Jean-Paul, *Search for a Method*, trans. H.E. Barnes, Knopf, New York 1963
Woodin, W. Hugh, “The Realm of the Infinite”, in *Infinity: New Research Frontiers*, ed. by Michael Heller and W. Hugh Woodin, Cambridge University Press, New York 2011, pp. 89–118
Žižek, Slavoj, Ruda, Frank, Hamza, Agon, *Reading Marx*, Polity Press, London 2018

Filozofski vestnik | Volume XLI | Number 2 | 2020 | 341–360 | DOI: 10.3986/FV.41.2.13

Jana Ndiaye Berankova*

The Immanence of Truths and the Absolutely Infinite in Spinoza, Cantor, and Badiou

The relationship between mathematics and ontology and the slogan "mathematics is ontology" has been a constant topic of investigation among thinkers who follow Alain Badiou's philosophical project. In 2018, at the conference *Thinking the Infinite* at the National Gallery in Prague, Badiou was supposed to give a talk proving the logical necessity of mathematical ontology. However, instead of providing the final proof that some members of the public were asking for, he delivered a different talk reworked at the last minute. He elicited great perplexity in the room by retracting the slogan "mathematics is ontology" for being nothing but an advertising simplification of a necessarily complex problem.[1] He observed that this clear and easily memorable slogan falls into the sphere of the *doxa* and cannot exhaust the nuanced relationship between the two fields. My intention in the present article will be to provide an interpretation of these puzzling remarks along with an exegesis of the mathematical concepts that appear in the recently published third volume of *Being and Event*: *The Immanence of Truths*. In this third volume, Badiou relies on the mathematical theory of large cardinals, which addresses sets and classes so large that they can almost approximate the entire universe of numericity. He proposes a renewed theory of the absolute "substance" and of the attributes of the absolute. As abstract and complex as such thinking might seem, it builds upon problems which appeared – although in their naïve and schematic form – already in the mathematico-philosophical considerations of Georg Cantor. By reading Badiou's and Cantor's texts closely together, we might be able to comprehend the articulation of philosophy and mathematics and the role played by philosophical choices.

[1] Alain Badiou, "Ontologie et mathématiques : Théorie des Ensembles, théorie des Catégories, et théorie des Infinis, dans *L'Être et l'événement, Logiques des mondes* et *L'immanence des vérités*".

* Columbia University

Mathematical ontology and its consequences

Did Badiou truly disavow the relationship between ontology and mathematics, or more broadly, between philosophy and mathematics? My conviction is that the response to this question might not be scandalous at all: "the discourse of Prague" constitutes nothing but a clarification of the hierarchy between these two fields. Badiou posits that "the thinking of being is a thinking on different forms of the multiple."[2] He departs from the philosophical statement "being is the multiplicity-without-the-one."[3] This starting point is not a mathematical statement. It would thus be misleading to say that "ontology is mathematics" for the latter expression would imply that we can derive knowledge of being directly from mathematics without passing through philosophical decisions and that mathematical inventions must have a direct and immediate effect on our understanding of Being. "Being is the multiplicity-without-the-one"[4] is nothing but an initial philosophical decision; it is the philosopher's choice: the philosopher chooses this position over another one by comparing their possible consequences. In other words, the decision situated at the beginning of any philosophical system is an initial "wager", a "working hypothesis", perhaps something like a philosophical "axiom". Such an "axiom" can be legitimated only by the richness of its consequences. The dialogue between mathematics and philosophy can be portrayed as follows: "a philosopher outlines a certain idea, and then uses mathematics, wherein this idea can be verified, and in the end returns to philosophy."[5] It is the "very construction of the [philosophical] system [that] proves the statement. This means that this initial statement is *a posteriori* proven and vindicated thanks to the scope of its consequences. But we never have demonstrative certainty which would resemble mathematical formalism."[6] In the present volume, Badiou states similarly that "the alliance organized between mathematics and philosophy becomes strong only when we observe its consequences."[7] In other words, mathematics is but philosophy's methodological tool for verifying its initial *philosophical* hypotheses. The phi-

---

2 Interview with Alain Badiou on *The Immanence of Truths*, Paris, 13 February 2018.
3 See p. 22 in the present volume.
4 See p. 30 in the present volume.
5 Jana Beránková, "Communism is a New Idea, Interview with Alain Badiou by Jana Beránková", *Contradictions* 2 (2/2018), p. 118.
6 *Ibid.*, 118.
7 See p. 22 in the present volume.

losopher needs mathematics in order to build a method, and it is in this sense that a great part of ontology remains "mathematical", and yet we cannot affirm that philosophical statements are deduced directly from mathematics. To the philosopher, mathematics is but a modality to develop his or her thought; the origin and the finality of thinking remains philosophical. In fact, ontology is grounded in philosophy, not in science. In Prague, Badiou merely clarified the hierarchy between these two fields by alluding to the ineluctable arbitrariness of philosophical decisions; in no manner did he reject the relationship between ontology and mathematics. Instead of "mathematics is ontology," it might be more exact to say that "ontology uses mathematics as a methodological instrument for creating a possibility of our understanding of being." Mathematics is a mere condition of philosophy along with politics, art, and love. The relationship between philosophy and mathematics is not that of "suture": philosophy is not *sutured* to anything; it highlights the existence of truth procedures in its conditions (science qua mathematics being one of them).

Note that in the above cited passages, the relationship between mathematics and philosophy is portrayed on the basis of inductive, not deductive, reasoning. Here, the induction generates the possibility of building up a philosophical system from mathematical grounds. As long as mathematics assists philosophers by successfully elucidating otherwise unsolvable problems, its use in ontology is legitimate. Such reasoning sounds surprisingly Gödelian, for it can call to mind the concluding paragraph of Kurt Gödel's 1947 article "What is Cantor's Continuum Problem?": "There might exist axioms so abundant in their verifiable consequences, shedding so much light upon a whole field, and yielding such powerful methods for solving problems (and even solving them constructively, as far as that is possible) that, no matter whether or not they are intrinsically necessary, they would have to be accepted at least in the same sense as any well-established physical theory."[8] Badiou – who valued Gödel's article for the emphasis it placed on the role that mathematical intuition and axiomatic decisions play in solving mathematical problems[9] – remarked that "Every thought – and therefore, mathematics – sets off decisions (intuitions)

8 Kurt Gödel, "What is Cantor's Continuum Problem?", in *Collected Works, Vol. II, Publications 1938–1974*, Oxford University Press, Oxford 1990, p. 261.

9 See Badiou's comments on Gödel's article in *Briefings on Existence: A Short Treatise on Transitory Ontology*, State University of New York Press, Albany 2006, p. 92.

from the standpoint of the undecidable (of nondeductible inference)."[10] Ontology's use of mathematics is nothing but an initial decision that can be justified *a posteriori* by the solutions it provides to otherwise unsolvable problems.

Critics of Badiou's mathematical ontology (some of whom are included in this volume) tend to see as deduction what in reality is inductive reasoning. The criticism usually follows this trajectory: If set theory is ontology (i.e. a rational discourse on being qua being defined as an inconsistent multiplicity without the one), could some other mathematical theory (e.g. category theory, mereology)[11] be ontology too? Why should we privilege set theory, an obscure field of knowledge that seems to be but a burden to many working mathematicians? These questions are legitimate but also tautological. For had we departed from a different philosophical axiom, e.g. that "being is a pure multiplicity without the one," a different mathematical or scientific theory might be much more suitable to our thinking. It is very likely possible to build ontology on a different basis than a set-theoretical basis. Any true criticism cannot dispense with the long and laborious task of system building. The usefulness of a given mathematical theory for philosophical thought can only be seen after we have sketched and exhausted its consequences in the domain of philosophy. Thinking moves from ontology to mathematics and not vice versa. A correct reasoning cannot be "there is theory y in mathematics, therefore being must be x," but rather: "being is x, therefore we should use mathematical theory y to develop our reflection." And even this second reasoning can be vindicated only *a posteriori* depending on the fruitfulness of its consequences. Philosophy cannot have the certitude of a mathematical formalism; it is *consistent* but necessarily *incomplete*. It begins with an axiom and not with a totalising origin that would close its field of the possible. Philosophical axioms, the statements in which the long trajectory of thought originates, can be verified only *a posteriori*, after accomplishing a certain philosophical journey. Only by elaborating a different and similarly complex philosophical system grounded in a competing statement that "ontology is y" will it be possible to measure the richness of its consequences with those of Badiou's set-theoretical ontology. Philosophical "working hypotheses" do not

10 Alain Badiou, *Briefings on Existence: A Short Treatise on Transitory Ontology*, State University of New York Press, Albany 2006, p. 95.

11 See Roland Bolz's article in the present volume, "Mathematics is Ontology? A Critique of Badiou's Ontological Framing of Set Theory".

act immediately but with delay. Thus, the question "Why is ontology not y?" constitutes a philosophical suspicion, not a true criticism. It can become a seriously voiced criticism only when – accompanied by the effect of time – it has gone through a patient and laborious procedure of system-building.

Badiou's portrayal of the relationship between philosophy and mathematics reminds us of Georg Cantor's affirmation of the freedom of mathematics in the 1883 *Foundations of a General Theory of Manifolds*, a text that was reprinted in 1969, in the 10th and last issue of *Cahiers pour l'Analyse* on "*La Formalisation*", which was coedited by Badiou.[12] According to Cantor, in the introduction of new numbers the mathematician is "only obliged to give definitions of them which will bestow such a determinacy and, in certain circumstances, such a relation to the older numbers that they can in any given instance be precisely distinguished. As soon as a number satisfies all these conditions, it can and must be regarded in mathematics as existent and real."[13] According to Cantor, mathematical concepts appear as *causa sui*; they contain in themselves an almost functionalist corrective according to which if a concept "is fruitless or unsuited to its purpose, then that appears very soon through its uselessness, and it will be abandoned for its lack of success."[14] Like the above-mentioned philosophical decisions, mathematical concepts are legitimated by their consequences, by inductive reasoning or by *reductio ad absurdum*. However, it would be absurd to pretend that philosophy can "accumulate" knowledge in the same way as mathematics does and that philosophical statements do not contradict the work of their predecessors. Philosophers' *desire for scientificity* makes them confront new conjectures with the work of previous masters (in Badiou's case, such confrontation appears namely in his seminars examining the work of thinkers such as Plato, Leibniz, Spinoza, and Kant). And yet, a rigour equivalent to mathematical formalism can be never attained by philosophy.

12 See Georg Cantor, "Fondements d'une théorie générale des ensembles", *Cahiers pour l'Analyse* (10/1969), pp. 35–52.

13 Georg Cantor, "Foundations of a General Theory of Manifolds: A Mathematico-Philosophical Investigation into the Theory of the Infinite", in *From Kant to Hilbert: A Sourcebook in the Foundations of Mathematics*, Vol. II, ed. William Ewald, Clarendon Press, Oxford 2005, p. 896.

14 *Ibid.*, 896.

Infinitum Absolutum: the actual or potential infinite?

Much of the confusion about the relationship between mathematics and philosophy might have been spurred by the fact that Badiou began his trajectory referring to problems proper to the philosophy of mathematics without practicing a "philosophy *of* mathematics". Such a detour through this field and mathematics' own "crisis of foundations" had the function of creating space for a new realist orientation of thought and of "break[ing] with the linguistic turn that has seized philosophy."[15] Badiou rejected the Aristotelian and Leibnizian algorithmic and constructive vision of mathematics and inscribed his own philosophical project into the genealogy of Plato and Spinoza. In some cases, he had to redefine terms commonly used in the philosophy of mathematics. For instance, he proposed that instead of the definition of mathematical Platonism put forward by Benaceraff and Putnam, i.e. the belief that "mathematical objects are independent of our minds and, unlike physical objects, do not interact with our bodies to cause alterations in our brains that lead ultimately to knowledge of them,"[16] Platonism should be understood as "*the recognition of mathematics as a thought that is intransitive to sensible and linguistic experience, and dependent on a decision that makes space for the undecidable, while assuming that everything consistent exists.*"[17] Badiou also frequently referred to the crisis of the foundations in mathematics as a moment in which mathematics was "compelled to think its thought *as the immanent multiplicity of its own unity.*"[18] However, he rejected all three major issues of this crisis formulated in the first half of the 20th century (i.e. Frege's and Russell's logicism, Hilbert's approach to conceiving of mathematics as a complete and consistent formal system, and Brouwer's intuitionism recognising only the existence of denumerable sets). He renounced the very delineation of the concepts and questions that these three orientations imply. Badiou criticised what he saw as philosophy's linguistic turn and the "algorithmic or constructivist finitism"[19] in mathematics. For a constructivist, "whatever is not distinguishable by a well-made language is not"[20] and the language builds a

15 Badiou, *Briefings on Existence: A Short Treatise on Transitory Ontology*, p. 111.
16 Paul Benaceraff, Hilary Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge 1983, p. 30.
17 Badiou, *Briefings on Existence: A Short Treatise on Transitory Ontology*, p. 91.
18 *Ibid.*, 54.
19 *Ibid.*, 104.
20 Alain Badiou, *Being and Event*, Continuum, New York 2006, p. 283.

proximity between the presentation and the representation. To these orientations of thought, Badiou opposed a philosophical doctrine in which "number is a form of being"[21] and not a linguistic convention. If being qua being is an inconsistent multiplicity without the one, sets and numbers must be more than empty words.

Badiou's three major works are three different takes on this relation between mathematics and philosophy. *Being and Event*, by focusing on ontology, is grounded in the key notions of set theory and Paul Cohen's forcing. *Logics of Worlds* uses category theory in order to explain existence, or what there is. *The Immanence of Truths* creates a bridge between these two books by mobilising the theory of large cardinals.[22] Each of these three books is cantered on a different notion: *Being and Event* on that of universality (the book posits the existence of universal and infinite truth procedures), *Logics of Words* on singularity (it questions how these truths appear in a given world), and finally, *The Immanence of Truths* on the notion of the absolute. By referring to cardinal numbers so large that they can approximate the entire universe of numericity, in the third volume Badiou tries to answer the question: "How do truths relate to the absolute?" According to Badiou, "neither universality, nor singularity have a constant explicit relation with infinity."[23] The category of the absolute is necessary to connect these two categories. Without the notion of the absolute, a given set might be generic in one world and not in another one. What seems universal and infinite in our world could be merely our own, localised, and culturally-determined universalism. To a certain extent, Badiou invokes the absolute as a response to the criticism coming from the side of Anglo-Saxon empiricism and postcolonial studies. For he admits that "without grounding universality in the absolute, it becomes merely empirical."[24] Thus, he describes the goal of *The Immanence of Truths* as "to examine what in the constitution of a truth makes it touch the absolute in such a manner that universality can be created and affirmed in singularity."[25]

[21] Alain Badiou, *Number and Numbers*, Polity, Cambridge 2008, p. 25.

[22] Among the rare bibliographical references, Badiou cites Thomas Jech's *Set Theory*, Akihiro Kanamori's book on the *Higher Infinite*, and the work of Hugh Woodin.

[23] Alain Badiou, *L'Immanence des vérités*, Fayard, Paris 2018, p. 515. [My translation.]

[24] Interview with Alain Badiou on *The Immanence of Truths*, Paris 13 February 2018.

[25] *Ibid.*, Paris, 13 February 2018.

In *The Immanence of Truths*, the category of the absolute appears marked by the capital letter V; V denotes the absolute class or the place of all thinkable forms of multiplicities. The absolute class V is not a mathematical object – a place where we can find all possible forms of the multiple cannot itself be a form of the multiple. V is an operator; it is not a mathematical object but "that from which we abstract mathematical objects."[26] The absolute class V is the universe of thought; it is that from which we have to depart in order to think multiplicity.

In order to elucidate some of the paradoxes of the absolute class V, it might be useful to return to the prehistory of this concept in Georg Cantor's philosophico-mathematical essays and correspondence. For although Cantor's set theory was later described as "naïve," some of his considerations manifest a striking similarity to the problems that Badiou faced. From Aristotle's failed attempt to solve Zeno's paradoxes until Cantor, the majority of Western philosophers had been contesting the existence of the actual infinite and had seen the potential infinite as the only imaginable infinite that could resolve these paradoxes. It was only with Georg Cantor's invention of set theory that the category of the actual infinite (the infinite as actually present, as "what there is") was brought back into the forefront and mathematicians and philosophers began to consider the infinite as a mathematical object. Cantor famously distinguished between cardinal and ordinal numbers, by naming the set of all natural numbers by Greek and Hebrew letters such as ω (the ordinality of this set) or $\aleph_0$ (its cardinality). Thanks to his discovery of the power set theorem, he was able to surpass the elementary infinite ω and build an entire hierarchy of the uncountable actual forms of infinity (beginning with the first uncountable infinite ordinal ω_1.

In his 1887–88 text *Mitteilungen zur Lehre vom Transfinitem*, Georg Cantor defined the potential infinite as "an indeterminate, always finite, variable magnitude taking values which become either as small as we please or larger than any arbitrary finite bound."[27] He described the actual infinity as a "constant quantum which is larger than any finite magnitude of the same kind."[28] How were the potential and the actual infinity articulated in Cantor's work? Cantor men-

---

26 *Ibid*.

27 Georg Cantor, "Mitteilungen zur Lehre vom Transfinitem", in *Gesammelte Abhandlungen Matematischen and Philosophischen Inhalts*, Springer, Berlin 1932, p. 401. [My translation.]

28 *Ibid*., p. 401. [My translation.]

tions that "a variable magnitude x successively taking the different finite whole number values 1,2,3...v... represents a potential infinite, while the set (v) of all whole finite numbers, conceptually determined by a full conceptual law, offers the simplest example of an actual infinite quantum."[29] In *Mitteilungen*, Cantor divided the infinite into the following categories:

- the potential infinite (i.e. the series of natural numbers 1, 2, 3...). Cantor remarked that this potential infinity is "improper" and it might even be better not to call it "infinite" at all;[30]
- the transfinite or increasable [*vermehrbares*] actual infinite. Cantor gives ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$... among examples thereof;
- the absolute infinite or the true non-increasable [*unvermehrbares*] infinite. Cantor remarks regarding this form of infinity that "it is not possible to add to or to take away anything from its size and on the quantitative level it should be seen as the absolute maximum."[31]

Cantor states clearly that while the transfinite can be manipulated by mathematicians, the absolute infinity "eludes mathematical determination"[32]; it is not a mathematical object. More specifically, Cantor was convinced that the category of the absolute belongs to theology, and not to mathematics. The absolute *inexists* from the point of view of mathematics. Transfinities are forms of intermediate infinities that are actual without being absolute and are located between the potentiality of the improper infinite and the absolute. In his letter to Wundt of 5 October 1883, Cantor characterised the absolute as "what cannot be enlarged or perfected and is analogous to the 'absolute' in metaphysics. My proper infinite, or if you'd like, transfinite numbers w, w+1 are not 'absolute' because – although they are not finite – they can be increased. The absolute cannot be increased at all and therefore it is inaccessible to us."[33] Elsewhere, Cantor famously declared that "the absolute can only be acknowledged [*anerkannt*] but never known [*erkannt*] – and not even approximately known."[34] We can subtract transfinite sets from the absolute, but as large as these sets might be, we will never even approximate

29 *Ibid.*, p. 409. [My translation.]
30 *Ibid.*, p. 404. [My translation.]
31 *Ibid.*, p. 405. [My translation.]
32 *Ibid.* [My translation.]
33 Georg Cantor, *Briefe*, Springer, Berlin 1991, p. 139. [My translation.]
34 Georg Cantor, "Foundations of a General Theory of Manifolds: A Mathematico-Philosophical Investigation into the Theory of the Infinite", p. 916.

the whole universe of numericity. For this absolute universe of numbers is what Cantor described in his late correspondence as an "inconsistent multiplicity".

It is not always very obvious to see the correspondences between the actual and potential infinite and the various categories put forward by Cantor (improper infinite, transfinite, proper infinite). Ignacio Jané divides Cantor's work into two periods: "between the writing of *Grundlagen* and the appearance of *Beiträge*, Cantor conceived the absolute infinite as actually existing (although not as an object of mathematics, while after *Beiträge* (from 1897 on) he viewed the absolute infinite as existing only potentially."[35] Jané remarks that the potentiality of the absolute infinite (which corresponds to what Badiou describes as the "absolute class V") guaranteed for Cantor the *actual* existence of the intermediate transfinities. In a letter to David Hilbert of 2 October 1897, Cantor emphasised that "the 'transfinite' coincides with what has since antiquity been called the 'actual infinite',"[36] while sets such as the "set of all alephs" are absolutely infinite and cannot be thought of as existing together. Thus, it might seem that in Cantor's work the potential infinity did not disappear, it was merely transposed to a higher level.

In the letter to Richard Dedekind of 3 August 1899, Cantor delineated the distinction between consistent and inconsistent multiplicities. An inconsistent or "absolutely infinite" multiplicity is that in which "the assumption of 'being-together' of all its elements would lead to a contradiction; thus, it is impossible to conceive this multiplicity as a unity, as a 'finished thing'."[37] The "epitome of all that is thinkable"[38] is an inconsistent multiplicity. In consistent multiplicities, "the totality of the elements of the multiplicity can be thought without contradiction as 'being-together' so that it is possible to conceive it as 'a thing'."[39] Consistent multiplicities can also be called *sets*. Following this distinction, Cantor

35 Ignacio Jané, "The Role of the Absolute Infinite in Cantor's Conception of Set", *Erkenntnis* 41 (3/1995), p. 383.

36 Georg Cantor, "Letter to David Hilbert, 2 October 1897", in *From Kant to Hilbert: A Sourcebook in the Foundations of Mathematics*, Vol. II, ed. William Ewald, Clarendon Press, Oxford 2005, p. 928.

37 Georg Cantor, *Briefe*, p. 407. [My translation.] "Finished thing" is my translation of "ein fertiges Ding" in German.

38 *Ibid.*, 407.

39 *Ibid.*, 407.

asked if the collection of all that is thinkable is a consistent multiplicity or an inconsistent one. Cantor indexed the system of all numbers, of all that is thinkable by the letter Ω. He remarked that such a system forms the following increasing sequence:

$0,1,2,3\ldots\ \omega_0,\ \omega_0+1,\ldots.\ \gamma$, and so on…

Then, he answered his question by asserting that Ω cannot be a consistent multiplicity (a set of all sets), because if Ω were consistent, for every well-ordered set there would have to be a number δ that would be bigger than all numbers contained in Ω and that would be its successor. This δ would be bigger than everything that is in Ω, which is a contradiction since Ω is defined as the set of all sets. For this reason, Ω must necessarily be an inconsistent multiplicity and there cannot be a set of all sets.[40] Following such a trajectory of reasoning, we might get the impression that Cantor's thought began with potential infinities (the series of natural numbers 1, 2, 3…), then passed through an architecture of actual infinities (ω_1, ω_2, …), in order to finally fall back into the potentiality of Ω.

The absolute place and the hierarchy of the infinite

Badiou's description of the whole universe of numericity as *universe* or *place* in line with recent mathematics might be his manner of avoiding the previously mentioned paradox of Cantor: the paradox in which Ω can be interpreted as a potential infinity that has merely been pushed to the higher level. Badiou remarks that the absolute class V is similar to what Plato describes as "the intelligible realm"[41] [*le lieu intelligible*], which means the "non-representable place within which all representation is deployed."[42] V is "the place of all that can validate the propositions about multiplicities as such."[43] It is "the place where the formal possibility of all existent multiplicities is thought, and which can be reduced to neither language nor the power of nothingness."[44] V recalls Leibniz's "being of the possible"[45] [*l'être du possible*] and Spinoza's "substance,"

[40] *Ibid.*, 408.
[41] Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 42. [My translation.]
[42] Interview with Alain Badiou on *The Immanence of Truths*, Paris, 13 February 2018.
[43] Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 40. [My translation.]
[44] *Ibid.*, p. 41. [My translation.]
[45] *Ibid.*, p. 41. [My translation.]

with the only difference being that V cannot be identified to the intellect of God. In the absolute class V, being and thinking are identical. By describing V as "the absolute ontological place,"[46] Badiou avoids collating V with the potential infinity of Cantor's Ω. For if Cantor defined the actual infinity as a "constant quantum which is larger than any finite magnitude of the same kind,"[47] V might not be a *quantum*, but it is certainly constant and larger than any finite magnitude. In other words, the "absolute" means that V is a maximum, there is no V_V. A "place" can be conceived as being-together, thus, using this term to describe V as "place" enables its potentialisation to be avoided.

The absolute class V is stratified, it has the structure of an unattainable horizon; we can create higher and higher approximations of this horizon but we can never reach it. In mathematics, such a universe is generally represented as a triangle standing on its top. There is the horizon V, and the approximations of this horizon: its sub-classes. If we consider, for instance, a class of all ordinals, which as such belongs to the absolute class V, we see that the notion of class is based on a connection of intentional and extensional characteristics: a class is defined by its attributes (being an ordinal) and it also has an extensional relationship with other subclasses (the class of all ordinals belongs to V). However, to say that one class *belongs* to another class is nothing but a metaphor used by mathematicians because, strictly speaking, the relation of belonging exists only between sets. Understanding these approximations of the absolute and the closeness to the absolute was a major task of Badiou in *The Immanence of Truths*.

In the mentioned book, Badiou distinguishes four different kinds of the finite:

- the accessible finite (a new set can be invented only with the resources of the existing situation);
- the divisible finite (the decomposition of a large infinite set into smaller sets);
- the limited finite [*le fini borné*] (preferring totality to openness, the particular to the universal); and
- the finite that negates all absoluteness.

46 *Ibid.*, p. 42. [My translation.]
47 Cantor, "Mitteilungen zur Lehre vom Transfinitem", p. 401. [My translation.]

These four kinds of the finite are symmetrically juxtaposed with four different species of infinity organised in ascending order (from the smallest to the largest infinite). Each higher order of the infinite "finitises" the previous one.

a) Inaccessible infinity or infinity via transcendence

This elementary form of infinity is close to the potential infinite and is relatively small; "transcendent" means merely that we cannot gain access to it and that it can be defined through negation. In theology, the God transcendent to the human world might constitute an example of such an inaccessible infinity. In mathematical language, Badiou formalises the infinite via transcendence as the strongly inaccessible cardinal.

A strongly inaccessible cardinal κ

1) is superior to ω;
2) is a limit cardinal;
3) is regular = it is bigger than the union of all cardinals smaller than κ;
4) is bigger than the cardinality of the power set of any cardinal that is smaller than this strongly inaccessible cardinal.

Badiou remarks that, for a long time, a strongly inaccessible cardinal has been seen as the limit of set theory. Had this cardinal κ existed, we could find its corresponding class V_K and the latter would become the model of all axioms of ZFC. However, according to Kurt Gödel's second incompleteness theorem, given a formal system containing basic arithmetic, it is impossible to prove its consistency from within that system. Therefore, the existence of inaccessible infinity cannot be proved from within the axioms of ZFC. Inaccessible infinity evokes Blaise Pascal's wager: we can only wager that God qua inaccessible infinity exists, without ever being able to possess a final proof of the existence thereof.

b) The infinity defined by its indivisibility

In *The Immanence of Truths*, Badiou compares this infinity to the division of God into a trinity in Christian theology and the related question of how it is possible that such a division does not diminish God's power. If we attempt to cut the "indivisible" infinity into very small parts, these parts will be always able to form a subset that will be of the same cardinality as the entire infinite set. To explain this kind of infinity, Badiou uses the Ramsey theorem. Frank P. Ramsey studied the first countable infinite ω and the possibility of dividing it by two. He realised that if this set is divided by two, it will always be possible to form a subset H that will belong to the same half of this divided set and will have same cardinality as the whole set (before division).

The Ramsey cardinal, devised by Paul Erdős and András Hajnal and named after Frank P. Ramsey, transposed the latter's discovery into the sphere of the uncountable infinite. According to Erdős and Hajnal, if we divide this uncountable infinite set by any number, it will always be possible to find a manner of classifying the parts into which it was divided and transform them into a subset of the initial set, a subset that is *homogenous to the partition*. Saying that this subset is *homogeneous* means that it has the same cardinality as the initially divided infinite set. Thus, the Ramsey cardinal evokes the idea of an infinite set that is so compact and dense and whose elements are in such proximity to each other that even if we cut it into small parts, a large infinite residual set will always escape our cutting.

Badiou mobilises the above-mentioned concepts in order to reflect on how emancipatory political movements could avoid capitalism's oppressive tendency to divide them into smaller parts. By helping to sow the division into any genuine emergent political movement, the dominant regime is able to preserve its sovereignty. The division is an operator of finitude. In contrast, any truth procedure will engender an infinity equal at least to the Ramsey cardinal. Any emancipatory political movement, any true "event", relates to the emergence of new forms of infinite truth procedures.

c) The infinity of big parts

This form of infinity invokes the question of what it means that something is *close to the absolute*, or that it is "almost" absolute. Are there any classes interior and inferior to V that can still *express* the absolute V? Can the absolute be approximated in any manner? Is there anything like *bigness in itself*?

On a formal level, Badiou attempts to respond to this question by using the difficult concept of the *non-principal* κ*-complete ultrafilter*. A *filter on a set* is a mathematical apparatus helping us to distinguish small parts from the large ones; it works like a sieve that only catches large parts, while the small ones pass through.

If we have a set E, we call *a filter on E* a set F composed of parts of E, which has the following properties:

1) It does not contain the empty set; the empty set must be "small".
2) It contains the set E: the largest part.
3) If parts A and B belong to the filter, the filter also contains their intersection. In other words, if both A and B are large parts, their intersection will be large.
4) If the filter contains part A and A is included in part B, it must contain part B, because B is bigger than A.

In order to transform this filter into an *ultrafilter*, a property of exhaustivity has to be added:

5) If we consider any part of E, it either belongs to the ultrafilter or its complementary part (i.e. its negation) belongs to the ultrafilter. Thus, the ultrafilter exhausts everything that there is: either one element belongs to it or its opposite does.

A *non-principal* ultrafilter means:

6) that this ultrafilter does not contain any singleton (a set containing only one element). Badiou is particularly interested in this property for it enables him to disconnect the infinite from the one.

And finally, κ-complete

7) is a mathematical procedure of ultrafiltering constructing a huge cardinal κ that has this non-principal κ-complete ultrafilter on itself. This mathematically complex section of the book translates into philosophical language as follows: the ultrafiltering engenders an infinite set so large that it exceeds the previous two forms of infinities and constitutes a testimony of the existence of the absolute class V. This set is "almost absolute"; it is a proof of the existence of the absolute class V. The statement "truths are absolute" is equivalent to the affirmation that the infinity of a truth is so large that it can attest to the existence of the absolute class V.

d) The infinity defined by its proximity to the absolute

This infinity corresponds to Badiou's theory of the attributes of the absolute and is elucidated in the most Spinozist part of the book. In this section, Badiou emphasises that the relationship between the absolute and one of its attributes implies the existence of a very large infinite set – a complete cardinal – that becomes witness to the existence of the absolute class V. Using Mostowski lemma and Jerzy Lós theorems, Badiou explains the mathematical concept of the elementary embedding, which plays a similar structural role in the book as forcing does in *Being* *and Event*. In simple words, elementary embedding is a mathematical procedure entailing taking a transitive sub-class of V – which we can call here M (e.g. a class of all ordinals because ordinals are defined by their transitivity) – and transforming it into a model of V. In this manner, the absolute class V will be embedded in one of its attributes, in the transitive sub-class M. There will be a relation j between M and V. However, this relation j will not be that of identity: V will remain different from the attribute M and contain sets that we cannot find in M. V is "embedded" in this class somewhat like an edifice is embedded in its concrete foundations.

The attributes of the absolute and the philosopher's choice

In Plato's vocabulary, we could say that this fourth kind of infinity *participates* in the absolute class V. If V is equivalent to Spinoza's notion of substance, the fourth infinity equals Spinoza's notion of the attribute of the absolute: the absolute expresses itself through its attributes but nevertheless remains separated from them. Or as Badiou remarks, "the expressive capacity of the absolute is intelligible for us only through the mediation of attributes."[48] Saying that we consider "all the sets" is a weak characteristic; it gives us a feeble understanding of the absolute. However, using an attribute such as the "class of all ordinals" can provide at least some grasp of the absolute because we possess a definition of an ordinal: we know that an ordinal is a set that is transitive and well-ordered by $\in$. Thus, by approaching the absolute through its attributes we are able to gain a certain and limited knowledge of the absolute. We can never entirely know the absolute as such, but we can at least approximate it through the use of attributes.

It would be interesting to compare Georg Cantor's own references to Spinoza to those of Badiou. For instance, in *Foundations of a General Theory of Manifolds*, Cantor averred that "an especially difficult point in Spinoza's system is the relationship of the infinite modes to the infinite one; it remains unexplained how and under what circumstances the finite can maintain its independence with respect to the infinite, or the infinite with respect to still higher infinities."[49] Cantor alluded here to "Proposition 22" of Spinoza's *Ethics*, according to which "*whatever follows from some attribute of God insofar as it is modified by a modification*

[48] Interview with Alain Badiou on *The Immanence of Truths*, Paris, 13 February 2018.

[49] Cantor, "Foundations of a General Theory of Manifolds: A Mathematico-Philosophical Investigation into the Theory of the Infinite", p. 892.

which, through the same attribute, exists necessarily and is infinite, must also exist necessarily and be infinite."[50] In contrast, in "Proposition 28," Spinoza postulated that "*any thing which is finite and has a determinate existence, can neither exist nor be determined to produce an effect unless it is determined to exist and produced an effect by another cause, which is also finite and has a determinate existence*."[51] Thus, it seems that the infinite and the finite exist in Spinoza in two independent chains of causes and effects which do not interact with each other: on the one hand, the infinite attributes of the substance, on the other hand, the finite modes of our existence. To bridge these two chains, Spinoza proposed the concept of the "infinite mode," and yet he did not adequately explain how the infinite mode can engender the finite. The lack of connection between the finite and the infinite puzzled Cantor, as well as Badiou, who in his 1984-85 seminar remarked that in Spinoza's work "the finite produces the finite and the infinite produces the infinite. This is an enigmatic point."[52]

Badiou's concept of "oeuvre", presented in the concluding chapters of *The Immanence of Truths*, constitutes an endeavour to disentangle the unsolved problem of Spinoza. Badiou posits that it is necessary to "postulate that the working of a truth is subjectively structured in tension within a play of various distinct infinities, and the result is certainly a finite oeuvre, or in other words, its absoluteness is related to the fact that this finitude conquers the status of an oeuvre instead of being a simple waste [*déchet*] of the infinite. It is a *finite result that reaches the level of its infinite causality because it inscribes itself into an attribute of the absolute*."[53] If truths, in Badiou's work, correspond to Spinoza's attributes of the substance, and the very procedures of these truths to infinite modes, the oeuvre is the finite mode engendered by the infinite. The oeuvre is a paradoxical finite fragment of reality that in spite of its finitude remains indexed to the absolute. "All oeuvre of truth is finite, singular, universal, and absolute,"[54] states Badiou. The indexation of the finite oeuvre by infinity makes it participate in

50 Benedictus de Spinoza, *A Spinoza Reader: The Ethics and Other Works*, Princeton University Press, Princeton 1994, p. 101.

51 *Ibid*., p. 103.

52 Alain Badiou, *L'infini, Aristote, Spinoza, Hegel, Le Séminaire 1984-1985*, Fayard, Paris 2016, p. 170.

53 Badiou, *L'Immanence des vérités*, p. 393. [My translation.]

54 *Ibid*., p. 512. [My translation.]

the absolute. The oeuvre of the absolute is a manifestation of the connection between universality and singularity.

In *The Immanence of Truths*, the concept of the oeuvre is juxtaposed with that of a "waste" [*déchet*]. If the oeuvre is indexed to the absolute, the idiosyncratic property of the "waste" is that it can be covered by constructible sets, that it is nothing but "a mode of existence of multiples which have no other figure than to remain under the law of the world in which they appear."[55] *The Immanence of Truths* completes Badiou's critique of the linguistic orientation of philosophy by identifying finitude with the property of constructibility. A given set is finite, or "constructible" if all its elements can be defined by a given language. In the constructivist orientation of thought, the mathematical real is subjugated to language. Badiou remarks that "any set can become a material for covering and thus become finite if it has as its sole elements other multiplicities that constituted definable parts in an already pre-existing and finite set. Such finite set will be said to be 'constructible'."[56] Constructivism operates through the logic of "covering" [*le recouvrement*]: a new potentially infinite multiple is "covered" by already existing multiples. An emerging large infinity is rendered finite by being covered by a multiplicity of finite sets. The inconsistent multiplicity is transformed into a multiplicity of consistent ones. In mathematical terminology, the hypothesis that the word "set" signifies a finite or constructible set has been generally marked by the capital letter L. V = L denotes the hypothesis of a constructible universe, the idea that there are no actual infinities and that the only things that exist are finite, constructible sets. If V = L were true, Georg Cantor's Continuum Hypothesis (there is no set that is greater than the set of all integers and smaller than the set of all real numbers) would be necessarily and logically valid.

Badiou admits, in Chapter 19 of *The Immanence of Truths* that from the mathematical point of view, both options of accepting and rejecting constructivism (V = L) are possible: on the one hand, Kurt Gödel proved that it is possible to preserve the consistency of ZFC set theory by adding to it the axiom of constructibility; on the other hand, Paul Cohen, in the 1960s, invented the technique of forcing, thus showing that it was possible to admit the existence of non-constructible generic multiplicities. Both options are equally admissible for working mathematicians.

55 *Ibid.*, p. 511. [My translation.]
56 *Ibid.*, p. 240. [My translation.]

Thus, he is left with nothing but a "crucial choice" between the constructible or truly infinite and a generic orientation of thought. He decides in favour of Cohen against Gödel. The affirmation that "*there is the infinite*"[57] is nothing but a purely philosophical act, in which *The Immanence of Truths* originates. Such an act can be justified only *a posteriori*, by the *abundance of its consequences*. Badiou decides as a philosopher, and not as a mathematician, that there must be something unnamable or indiscernible that cannot be described by the language of the dominant order. Once again, he subordinates mathematics to philosophy. The task of the philosopher might be to cut the Gordian knot that mathematics cannot untie. Such *cutting* operates in Badiou's thinking by finding in Spinoza resources to think an actual non-denumerable infinity and turning them against the ideas of Leibniz, by privileging the realist orientation of the *matheme* over the supremacy of language. Maintaining philosophy in close relation to its mathematical condition is necessary for freeing thinking from its capture by the linguistic turn. Mathematics is but Badiou's shield against the reduction of thought to the constructible; it is in this sense that the three volumes of *Being and Event* could also be renamed "Three Critiques of the Constructible". Philosophy is not *sutured* to anything – not even to mathematics – it is free and bound only by its consistency while operating in a necessarily incomplete field.

References

Badiou, Alain, *Being and Event*, Continuum, New York 2006

— *Briefings on Existence: A Short Treatise on Transitory Ontology*, State University of New York Press, Albany 2006

— *L'Immanence des vérités*, Fayard, Paris 2018

L'infini, Aristote, Spinoza, Hegel, Le Séminaire 1984–1985, Fayard, Paris 2016

— *Number and Numbers*, Polity, Cambridge 2008

— Interview with Alain Badiou on *The Immanence of Truths*, Paris, 13 February 2018

— Benaceraff, Paul, Hilary Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge 1983

Beránková, Jana, "Communism is a New Idea, Interview with Alain Badiou by Jana Beránková", *Contradictions* 2 (2/2018), pp. 117–132

Cantor, Georg, "Fondements d'une théorie générale des ensembles", *Cahiers pour l'Analyse* (10/1969), pp. 35–52.

— "Foundations of a General Theory of Manifolds: A Mathematico-Philosophical Investigation into the Theory of the Infinite", in *From Kant to Hilbert: A Sourcebook in the Foundations of Mathematics*, Vol. II, ed. William Ewald, Clarendon Press, Oxford 2005

57 *Ibid.*, p. 265. [My translation.]

— “Mitteilungen zur Lehre vom Transfinitem”, in *Gesammelte Abhandlungen Matematischen and Philosophischen Inhalts*, Springer, Berlin 1932

Gödel, Kurt “What is Cantor’s Continuum Problem?” in *Collected Works, Vol. II, Publications 1938–1974*, Oxford University Press, Oxford 1990

Jane, Ignacio, “The Role of the Absolute Infinite in Cantor’s Conception of Set”, *Erkenntnis* 41 (3/1995)

Spinoza, Benedictus de, *A Spinoza Reader: The Ethics and Other Works*, Princeton University Press, Princeton 1994

Filozofski vestnik | Volume XLI | Number 2 | 2020 | 361–395 | doi: 10.3986/fv.41.2.14

Norma M. Hussey

A New Hope for the Symbolic, for the Subject

Symbolization and ontology

> *Tradition* is the old world of castes, nobilities, religious obligation, … local mythology, the submission of women, the father's absolute power over his children, and the official division between a small group of rulers and a condemned mass of toilers, in which the differences inherent to human life were *regulated and symbolized in a hierarchical form*. The most important binaries, like old and young, men and women, … commoners and nobles, town and countryside – were all addressed (in language, in mythologies, in ideologies, and in the established religious models) by recourse to ordered structures setting everyone's place in a set of overlapping hierarchical systems.[1]

From the philosophical writings of Alain Badiou (illuminated by the mathematical ontology) it is recognized here that the hierarchical symbolization of 'tradition' found its guarantee, at the abstract level, in the supposition that beyond the multiple, the one is. In other words, the ontological basis for the hierarchical form of the traditional symbolic assumes the being of the one, and relies on it for the "normative power"[2] of its deployment. As such, it is a symbolic based on finitude, which means that (in the mathematical ontology) it "resides within the elementary immanence of … finite ordinals."[3] This is the case whether the one be finite or infinite. For instance, "Christian monotheism, despite its designation of God as infinite, does not immediately and radically rupture with Greek finitism" – it can be based on a thinking in which being as such "remains essentially finite;" the assumption of an infinite one does not yet break with the finite,

1 Alain Badiou, "True and False Contradictions of the Crisis", trans. David Broder, *Verso blog*, May 29, 2015. Emphasis added.

2 Alain Badiou, *Theoretical Writings*, trans. Ray Brassier and Alberto Toscano, Bloomsbury Academic, London and New York 2014, p. 44.

3 Alain Badiou, *Being and Event*, trans. Oliver Feltham, Continuum, London and New York 2007, p. 160.

because it is still "hierarchically representable as beyond [or unknowable], yet deducible from," the finite world.[4] According to Badiou, the onto-theological device – trying to save truth – pays the price of the absolute transcendence of the one, thereby subordinating finite multiplicities to the formal authority of the One-infinity that has often been called God.[5]

> *Modernity* is effectively a break with tradition. In barely three centuries, this break with the world of tradition has swept aside forms of organization that had lasted for millennia. When this break takes a bourgeois, capitalist form, it opens up a gigantic crisis of humanity's symbolic organization. It *does not in fact propose any active new symbolization*, but only the brutal, independent play of the economy: the neutral, a-symbolic reign of what Marx called "the icy water of egotistical calculation."[6]

It could be said that the breakdown of the traditional symbolic corresponds to modern ontological confusion owing to the *death of God*,[7] i.e. the infinite One. Modernity – in a world structured by globalized capitalism – has revealed that being is essentially multiple; it has exposed the one as pure semblance, and therefore ruined the supposition on which the hierarchical symbolic depends. In his *Manifesto for Philosophy*, Badiou writes that

> The only thing we can and must welcome within Capital [is that]: it exposes the pure multiple as the foundation of presentation; it denounces every effect of One as a simple, precarious configuration ... To think over and above Capital ... we must still have as a departure point what it has revealed: Being is essentially multiple.[8]

Symbolization and subjective orientation

Rejection of the traditional hierarchy and its oppressions exposes the being of the one as un-credible. But freedom from hierarchy, from subordination to the

---

4 *Ibid*, p. 142.

5 Badiou, as reported by Jana Berankova in "The Immanence of Truths: the Absolute between the Singular and the universal", *Presentation at the International Conference "Thinking the Infinite"*, April 11, Prague 2018.

6 Badiou, "True and False Contradictions of the Crisis". Emphasis added.

7 Badiou, *Theoretical Writings*, pp. 27–30.

8 Alain Badiou, *Manifesto for Philosophy*, trans. Norman Madarasz, SUNY Press, Albany, New York 1996, pp. 56–57.

normative power of the one, *without symbolic replacement*, “creates a subjective crisis ... one of whose most remarkable aspects is the extreme and growing difficulty that young people in particular face finding themselves a place in this new world.”[9] Disorientation arises with the breakdown of symbolization, i.e. with the lack of a common understanding of the symbolic organization. Perhaps this is why the theme of the subject has been a constant for modernity.

Faced with the crisis of humanity’s symbolic organization (and the associated crisis of general subjective disorientation) some would have us believe that there is no crisis, and that there is nothing better than this liberal ‘democratic’ model of freedoms weighed down by the neutrality of market calculations. This is Western capitalism’s a-symbolic vision, which creates monstrous inequalities and pathogenic upheavals; under the auspices of ‘freedom’ in the a-symbolic reign, exploitation replaces the oppressions of hierarchy, and often inspires the reactive desire to return to the traditional hierarchical symbolization.[10]

With respect to the break with tradition then, the subjective orientations of modernity range from the embrace of this liberal a-symbolic model of freedoms (especially by the rich), to the reactive desire to return to the traditional symbolization (especially by the ex-privileged), and in the wider context of general disorientation, from imaginary utopianism to hopeless nihilism. But there is another subjectivity which, recognizing the non-being of the one and the unavoidable break with tradition, is convinced that a non-hierarchical symbolization is possible and that it must be invented, i.e. “an egalitarian symbolization that restructures differences – [recognized of equal subjective right] – based on a total sharing of resources.”[11]

A new symbolic requires a coherent ontological referent

From reading Badiou, it is my understanding that a symbolic (defined as a universal structure encompassing the entire field of human action and existence)[12] can only be based (contrary, it would seem, to Lacan) on a credible thinking of being as such, i.e. a stable and consistent ontology. The normative power of an

9 Badiou, “True and False Contradictions of the Crisis”.
10 *Ibid.*
11 *Ibid.*
12 Encyclopedia.com, *Symbolic, the (Lacan)*, available at: https://www.encyclopedia.com>psychology>symbolic-lacan

assumed one (finite or infinite) sustained the hierarchical symbolic for millennia, but such an assumption is no longer credible – it has been exposed as pure semblance, and being is revealed as essentially multiple. If all is multiple, is a symbolic even possible? That is, a symbolic which recognizes the non-being of the one and therefore cannot rely on the deployment of its normative power, as such a non-hierarchical and therefore egalitarian symbolic? It would at least require a coherent, i.e. stable and consistent, ontology of multiplicity.

An ontology of multiplicity

The thesis of Alain Badiou which equates ontology with mathematics[13] is underscored by the philosophical decision that being, or what we can think under the name of 'being,' is composed of pure multiplicities, and that "the one is not," be it the one of an Idea (Plato), or a God, or Presence, or any-one; "the one exists solely as operation."[14] Since the axiomatic system of mathematical set theory delivers the multiple *without implying the being of the one*,[15] Badiou adopts it as the thinking of being as such (ontology). Set theory is the area of modern mathematics devoted to the study of infinity; mathematics thinks (infinite) multiplicities in the form of the notion of a (infinite) set.[16] It is based on a formal axiom system called ZFC (Zermelo-Fraenkel system with the axiom of choice). Quantitative infinity is not deducible from finitude, but is authorized solely by the axioms of mathematical set theory.[17] It is by recognition of the mathematical existence of quantitatively distinct *infinite* multiples, that the ruin of the being of the infinite one is achieved.[18] This thorough-going rationalization of actual infinities (as opposed to a transcendent one) teaches us that there is no reason to confine thinking within the ambit of finitude because we can have access to a rational, secular thinking of infinity.[19] Mathematical ontology (i.e. set theory) is the proposal of an infinite ontology which is, finally, a radical rupture with the finitism of tradition, and in which "the finite is qualified as a region of being, a minor form of the latter's presence."[20]

[13] Badiou, *Being and Event*, p. 4.
[14] *Ibid*, p. 23.
[15] *Ibid*, p. 43.
[16] *Ibid*, p. 145.
[17] *Ibid*, p. 148.
[18] *Ibid*, p. 273.
[19] Badiou, *Theoretical Writings*, p. 19.
[20] Badiou, *Being and Event*, p. 159.

Badiou, in fact, proposes the universe of set theory – conventionally denoted by V – as an *absolute* ontological referent, where V can be said "to formalize … the place … of everything that can be constructed by axioms."[21] He argues that "the absoluteness of the thinking of the pure multiple, in the atheistic takeover from monotheism … is feasible."[22]

But is it a coherent theory?

In *Being and Event* (1988),[23] Badiou described the then prevailing situation of ontology (set theory), with all of its intricacies and its metaontological implications. In particular, he highlighted the *impasse* concentrated in the continuum problem which, as Paul Cohen established in 1963, is undecidable from the contemporary ZFC axiomatic. Since then, the formal axiom system itself has been in crisis – which challenges the very conception of mathematical infinity,[24] together with the credibility of set theory as a consistent ontology. It doesn't auger well for the invention of an egalitarian symbolic which can only be based on an ontology of the multiple, if that ontology is inconsistent or uncredible. The prevailing incoherence of the mathematical ontology underscores a contemporary deficit of symbolization which, in turn, yields confusion and conflict in terms of subjective orientation.

But something momentous is happening right now in set theory, in response to the recent surprise discovery now encapsulated in the *universality* theorem (see later); a new axiom, conjectured as yet, promises to resolve the crisis of its formalization,[25] and achieve the *pass* of the impasse. The consequent realization of a *coherent* set theory – a stable and consistent ontology of multiplicity – would suggest that an egalitarian symbolization is possible, i.e. a modern symbolic which receives its guarantee solely, but *transparently*, in its mathematical consistency. Indeed, "mathematics is the only discourse in which one has a com-

21 Acheronta Movebo (Badiou), "Towards a New Thinking of the Absolute", *Crisis and Critique* 1 (2/2014), p. 12. Badiou was one of the contributors to this journal as part of the anonymous collective Acheronta Movebo.

22 *Ibid.*, p. 21.

23 The original edition of *Being and Event*, i.e. Badiou, *L'Être et L'Événement*, Éditions du Seuil, Paris, was published in January 1988.

24 W. Hugh Woodin, "Generalizing Gödel's Constructible Universe: Ultimate L", *Presentation at the IMS Graduate Summer School in Logic*, National University Singapore, June 2018.

25 W. Hugh Woodin, "In Search of Ultimate-L, the 19th Midrasha Mathematicae Lectures", *The Bulletin of Symbolic Logic* 23 (1/2017), p. 2. (DOI:10.1017/bsl.2016.34).

plete guarantee and a criterion of the truth of what one says, to the point that this truth is unique inasmuch as it is the only one ever to have been encountered which is fully *transmissible*."[26]

This remarkable development in set theory, led by W. Hugh Woodin,[27] offers hope for the pursuit of a new symbolic in a modern age of actual infinity, and a consequent resolution of the general subjective disorientation which arises from our current crisis of symbolization.

The premise here, then, is that the process for the articulation of a coherent and transmissible ontology on which to ground an egalitarian symbolic has already begun; it originated with the Cantorian inventions of set theory and quantitative infinity, but it is still undergoing development as the contemporary set theoretic axiom system (ZFC) is not yet stable/complete.

Set theory – historical development

The saga surrounding the development of set theory over the past 150 years – its splits, its advances, its dramatic crises – reflects the extreme difficulty of invention of an ontology of multiplicity which is not in the least intuitive as it depends on complex mathematical reasoning and innovation for the thinking and comparison of distinct quantitative infinities. Mathematical infinity is a counter-intuitive concept, even at its simplest level, for instance "the infinite set of even numbers {2,4,6,...} can be placed in a one-to-one correspondence with all counting numbers {1,2,3,...}, indicating that there are just as many evens as there are odds-and-evens,"[28] therefore we cannot rely on intuition, but require the patient and painstaking work of mathematical rigor, in order to understand it. The development of set theory also seems (almost uncannily) to have mirrored the general underlying situation in the social and political world over the same period (see below).

---

26 Badiou, *Being and Event*, p. 9. Emphasis added.

27 W. Hugh Woodin is the mathematical set theorist leading the remarkable developments in set theory referenced throughout this article, at Harvard University since 2014, and before that at the University of California, Berkeley.

28 Natalie Wolchover, "To Settle Infinity Dispute, a New Law of Logic", *quantamagazine.org*, November 26, 2013 (reprinted on *ScientificAmerican.com*, December 3, 2013).

The nine axioms of ZFC were laboriously developed around the turn of the 20th century, thereby putting Cantor's still partly intuitive theory of sets on a secure axiomatic (or non-intuitive) footing.[29] They accord with the iterative conception of sets as cumulative hierarchies, where sets are constructed by a combination of axiomatically prescribed procedures in successive steps from an assumed foundational empty set Ø, and the sets accumulate – hence 'cumulative.' The universe of sets V (as formalized by ZFC) is calibrated by the ordinals through the definition of the cumulative hierarchy of sets,[30] in which the successor step is obtained by the power-set (i.e. the set of all subsets) of the preceding set. According to Badiou, the ordinals – as the ontological schema of natural multiplicity – "*say* that nothingness is a form of natural being [the empty set Ø being an ordinal, and therefore a natural multiple], and that the infinite, far from being retained in the One of a God, is omnipresent in nature, and beyond that, in every situation-being."[31]

Constructibility and conservatism

Set theory was tentatively concluded with a tenth axiom, i.e. Kurt Gödel's axiom of constructibility (1938), which asserts that the universe of sets V is the constructible universe L, i.e. V = L. Gödel's definition of L arises from *restricting* the successor step in the definition of the cumulative hierarchy to the constructible power-set (also called the definable power-set), which is the set of all subsets of the preceding set such that each subset is logically definable (in the set structure) from parameters in the set.[32]

[29] Peter Hallward, "On the development of Transfinite Set Theory", in Peter Hallward, *Badiou: A Subject To Truth*, University of Minnesota Press, Minnesota 2003, p. 337. He also notes that Cantor's own position was anti-axiomatic.

[30] The cumulative hierarchy of sets V, is the collection of sets V_α indexed by the class of ordinal numbers. For each ordinal α, a set V_α is defined by induction on α as follows: 1. V_0 = Ø, 2. (Successor step) $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$, the power-set of V_α, 3. (Limit step) If α is a limit ordinal, then $V_\alpha = U \{V_\beta | \beta < \alpha\}$, the union of all the V-stages so far.

[31] Alain Badiou, *Number and Numbers*, Polity Press, Cambridge UK and Malden USA 2008, p. 84.

[32] W. Hugh Woodin, "The Transfinite Universe", in *Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics. Horizons of Truth*, ed. M. Baaz, C. H. Papadimitriou, H. W. Putnam, D. S. Scott, and C. L. Harper Jr., Cambridge University Press, Cambridge 2011, pp. 449–471.

Gödel's axiom "does provide a clear conception of the universe of sets V,"[33] but as a *minimal* statement about the universe of sets (because if the set is infinite and the axiom of choice holds, then the definable power-set is never the set of *all* subsets of the set)[34] it was never fully embraced as a true axiom for set theory.[35] In addition, the constructible universe cannot accommodate the *large cardinals* in the higher infinite which, although unprovable from ZFC, are now considered to be genuine.[36] (Since the existence of such a set cannot be proven on the basis of ZFC, it has to form the object of a new axiom. What is then at stake is an axiom of infinity, stronger than that of ZFC which guarantees only the existence of a limit ordinal,[37] i.e. a large cardinal axiom stating that there exists a cardinal (or perhaps many of them) with some specified large cardinal property. Such axioms appear to occur in strict linear order by consistency strength, thus forming the large cardinal hierarchy. A measurable cardinal is a relatively 'small' large cardinal, i.e. it is low in the hierarchy.[38]) By Scott's theorem (1961), there are no measurable cardinals in the constructible universe and therefore no stronger large cardinals either.[39] As such, V = L "severely limits the nature of infinity."[40]

It could be said that Gödel's constructible universe represents a first attempt at an abstract referent for an egalitarian symbolic, in that it does yield a model for ZFC, i.e. a stable and consistent framework (albeit restricted) for an ontology of multiplicity. It is a universe for all ordinals (i.e. natural multiplicities) indicating that "the infinite is omnipresent in nature," but beyond that (i.e. with respect to non-natural multiplicities) it has nothing to say. As such it may be considered as a natural ontology, but it doesn't account for *every* situation-being. Its mathematical experimentation coincided with the period of social and political *conservatism* of the 1940's and '50's, which is not to suggest that Gödel was re-

33 *Ibid*.
34 W. Hugh Woodin, "Strong Axioms of Infinity and the Search for V", in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Hyderabad, India 2010.
35 Woodin writes: "We know that Gödel [himself] rejected the axiom V = L", in "The Transfinite Universe".
36 Woodin, "Generalizing Gödel's Constructible Universe: Ultimate L".
37 Badiou, *Being and Event*, p. 513.
38 Colin J. Rittberg, "How Woodin Changed his Mind: New Thoughts on the Continuum Hypothesis", *Archive for History of Exact Sciences* 69 (2/2015), pp. 125–151.
39 *Ibid*.
40 Woodin, as quoted by Wolchover in "To Settle Infinity Dispute, a New Law of Logic".

sponsible for that period of conservatism but, perhaps, that his work explains the abstract thinking behind what was going on at the time.

In *The Immanence of Truths*,[41] Alain Badiou claims that we (still) live in a constructible universe without being aware that this is the case.[42] He argues that the constructible universe largely equals ... finitude,[43] i.e. a modern finitude where the finite is defined (here) as a set that can be 'covered' by a constructible set with the same cardinality as the former.[44] Badiou asserts that this modern form of finitude is one of 'movement and innovation,' as opposed to the classical finitude of 'stability and repetition;'[45] nevertheless it represents a return to the figure of oppression, to the normalization of the one, and a closure of thought to the realm of actual infinity. Such 'finitude' is precisely what Badiou rejects.

Independence and dissatisfaction

The axiom system (ZFC) *itself* has been in crisis since 1963 when Paul Cohen demonstrated that the most basic problem of set theory – that of Cantor's continuum hypothesis – was not solvable on the basis of the ZFC axioms; it can neither be refuted nor proven from the axioms of set theory, it is an independent statement.[46] This result established the impossibility, within ZFC, of determining the type of multiplicity of the continuum (which corresponds to the power-set of the very first infinity, i.e. all the subsets constituted from whole numbers); set theory could not determine "the measure of the set of parts of an infinite set," or in Badiou's metaontological terms, "the excess of the power of the state with respect to that of its situation."[47] Easton's theorem (1970) extended this result

41 Alain Badiou, *L'Immanence des Vérités*, Fayard, Paris 2018.

42 Terence Blake, "My Path Through Badiou's *The Immanence of Truths*", available at: https://terenceblake.wordpress.com/2018/10/06/my-path-through-badious-the-immanence-of-truths.

43 Jana Berankova, *Presentation at the Graduate Workshop with Alain Badiou on The Immanence of Truths*, November 13, Columbia University, New York 2019.

44 Jana Berankova, "The attributes of the absolute and Alain Badiou's response to Spinoza", in *Sometimes We Are Eternal*, ed. J. N. Berankova and N. Hussey, Suture Press, Lyon 2019, pp. 174–175.

45 Terence Blake, "Badiou's *The Immanence of Truths*: Introduction (sketch)", available at: https://terenceblake.wordpress.com/2017/01/19/ badious-the-immanence-of-truths-introduction-sket/

46 Woodin, "Generalizing Gödel's Constructible Universe: Ultimate L".

47 Badiou, *Being and Event*, p. 275.

and established the "quasi-total errancy of the excess of the state over the situation," in that it is consistent with ZFC that the power-set could be any cardinal as immense as you like, provided that it is a successor.[48]

Cohen's method of *forcing* ushered in a new age of 'freedom' from the restricted formalization assumed by the constructible universe; it exposed the formal *independence* of not just the continuum hypothesis, but also the axiom of constructibility (Gödel's constructible universe), from the set-theoretical framework[49] – it inherently implied the non-obligation of conservatism. In the immediate term, however, the focus was on the unquantifiable excess of the infinite power-set itself, rather than on the implication of crisis for ZFC, owing to such independent statements. The recognition of the "exorbitant excess," the "innumerable injustice," implied by the almost-total un-measure of the state with respect to the situation,[50] seems to underlie the general dissatisfaction prevailing in the 1960's & '70's and articulated against the state – whether in the domain of mathematics itself, or in the domains of art, or love, or politics.

Incoherence and disorientation

But today it's a question of credibility with respect to the *capacity* of set theory to deliver a coherent framework for infinite multiplicities. The intractability of the independence phenomenon due to Cohen's method of forcing, still unresolved more than fifty years later, challenges the foundational issues of truth in set theory (ZFC) itself, and raises the question of whether the continuum hypothesis has a truth value at all, or even whether one can "coherently talk of the realm of the infinite."[51] Hugh Woodin adds that the modern significance of Scott's theorem – in light of significant advances in large cardinal theory since then – establishes that the axiom of constructibility is false, i.e. that $V \neq L$, but he acknowledges that this claim is not universally accepted.[52] By Jensen's dichotomy theorem,[53] both hypotheses (i.e. $V = L$, and $V \neq L$) are completely valid in con-

48 *Ibid*, p. 280.
49 Woodin, "The Transfinite Universe".
50 Badiou, *Being and Event*, p. 282.
51 W. Hugh Woodin, "The Realm of the Infinite", in *Infinity. New Research Frontiers*, ed. M. Heller and W. H. Woodin Cambridge University Press, Cambridge 2011, pp. 89–118.
52 Woodin, "The Transfinite Universe".
53 The Jensen dichotomy theorem shows that V must be either very *close* to L or very *far* from L. Refer to Woodin, "In Search of Ultimate-L, the 19th Midrasha Mathematicae Lectures", p. 2.

temporary mathematics, which contributes to the ambiguity of set theory. The prevailing incoherence of the frame of reference for thinking the infinite (or the crisis of formalization) coincides with contemporary widespread disorientation as manifested in dissatisfaction with society, mental ill-health, troubled youth, popular frustration, a feeling of obscure disorder, lack of orientation/stability.

Platonism, pluralism, and the skeptic

Set theory's contemporary indeterminacy undermines its candidacy as an absolute referent. As such, two major contradictory orientations arise; the universe view (or Platonism), and the multiverse view (or pluralism), together with a third: the reactionary orientation of the skeptic.

The *universe* view (or Platonism) holds the conviction that there is a unique absolute background concept of set, realizable in the corresponding absolute set-theoretic universe, V, in which every assertion has a definite truth value, i.e. that quantitative infinity is rationally thinkable in a *coherent* framework. Questions such as the continuum hypothesis and others have definitive final answers, and it is considered that the pervasive independence phenomenon is due to an insufficiency of the theory in finding the truth, rather than about truth itself – because the independence of a statement from ZFC tells little about whether it holds or not in the universe.[54] With regard to the continuum hypothesis, Gödel wrote that "it must be either true or false ... and its undecidability from the axioms as known today can only mean that these axioms do not contain a complete description of reality."[55] For Hugh Woodin, also Platonist, this undecidability is "perhaps tolerable on a temporary basis during a period of axiomatic discovery but it certainly cannot be the permanent state of affairs."[56] He also considers that, based on set theoretical work (his own and others), "there is the very real possibility that we can find a new optimal axiom (from structural and philosophical considerations) that prevents us from undecidability of some important properties of set. In which case, we will have returned, against all the odds or reasonable expectation, to the view of truth for set theory that was present

54 Joel David Hampkins, "The Set-Theoretic Multiverse: a Natural Context for Set Theory", (MR2857736 (2012h:03002)), based on a talk given by the author at the *Philosophy of Mathematics Conference* (New York University, April 2009).

55 As quoted by Wolchover in "To Settle Infinity Dispute, a New Law of Logic".

56 Woodin, "Strong Axioms of Infinity and the Search for V".

at the time when the investigation of set theory began."[57] Alain Badiou writes: "By saying that set theory constitutes an absolute reference, I am assuming that there exists a system of axioms, incompletely discovered as yet, which defines the universe V … and defines it alone. In other words, no important, significant, useful property of sets will remain undecidable once we have been able to fully identify the axioms."[58]

The opposing *multiverse* view (or pluralism) considers that there are many distinct concepts of set, each realized in their corresponding universes which, in turn, exhibit diverse truths. Its adherents argue that we may prefer some universes to others, and that there is no obligation to consider them all as somehow equal. Here, the continuum problem is already settled, having a different answer in different universes, and it is considered that the Platonist's 'dream' solution of a new axiom for set theory by which the continuum hypothesis is decided, is impossible. This view does not necessarily undermine the claim that set theory serves as an ontological foundation for mathematics, but rather is directed against the claim that there is an absolute frame of reference in which set-theoretic truths are immutable.[59] Absolute, of course, means not relative, and for Badiou, the current of thought corresponding to this vision is *relativism*. He writes: [60]

> Regarding the possibility that V could be an ontological referent, the most important group of opponents is made up of those who have given up on any referent at all and claim that a truth is never anything but relative or local … This current of thought, suited like no other to representative democracy and cultural relativism, is the prevailing one today … [E]ven those who acknowledge a sort of practical value in it … have objected that the statement "there are only opinions" must be absolutely true, otherwise something other than opinions might well exist, and an absolute truth would therefore exist.

57 W. Hugh Woodin, "The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal", in *De Gruyter Series in Logic and its Applications*, ed. W.A. Hodges, R. Jensen, S. Lemp, M. Magidor, 2nd ed., De Gruyter, Berlin 1999.

58 Badiou, "Towards a New Thinking of the Absolute", p. 16.

59 Hampkins, "The Set-Theoretic Multiverse: a Natural Context for Set Theory".

60 Badiou, "Towards a New Thinking of the Absolute", p. 13.

The multiverse view – which ultimately corresponds to an a-symbolic vision since a symbolic requires an absolute referent – is dominant today so that disorientation reigns as we are cast adrift in an a-symbolic world.

The *skeptic* refers to the meta-mathematical position which asserts that the only meaningful existence assertions are those that can be verified in the physical universe – which certainly excludes set theory (the mathematics of infinite sets).[61] According to Woodin, it is a position which denies any genuine meaning to a conception of uncountable sets and considers that set theory and its extensions do not reflect any mathematical reality – they are merely a reflection of the mathematician. [62] For the skeptic, the continuum hypothesis is neither true nor false, and consistency claims (e.g. for large cardinal axioms) can never be meaningfully made, because the entire concept of the universe of sets is a complete fiction; as such, this view is simply a rejection of the infinite altogether.[63] For example, taking a view originally espoused by Aristotle, Stephen Simpson[64] argues that actual infinity doesn't really exist and so it should not so readily be assumed to exist in the mathematical universe. As reported by Natalie Wolchover, he leads an effort to wean mathematics off actual infinity, by showing that the vast majority of theorems can be proved using only the notion of potential infinity. "But potential infinity is almost forgotten now," he says. "In the ZFC set theory mindset, people tend not to even remember that distinction. They just think infinity means actual infinity and that's all there is to it."[65]

The current of thought corresponding to the skeptical vision responds to the crisis of formalization (ontology's contemporary indeterminacy) with a rejection of infinity altogether, and proposes a return to finitude, i.e. to the one of hierarchy, or a traditional symbolic. One might consider that such skepticism in mathematics is analogous with the political orientation which is very obviously

---

61 Andrés Eduardo Caicedo, reviewing Woodin's "The Realm of the Infinite", submitted to *Mathematical Reviews/MathSciNet*, MR 2767235, June 26, 2012.
62 Woodin, "The Transfinite Universe".
63 Woodin, "Strong Axioms of Infinity and the Search for V".
64 Stephen Simpson is a mathematician and logician at Pennsylvania State University, USA.
65 Wolchover, "To Settle Infinity Dispute, a New Law of Logic".

gaining traction in the contemporary world, as manifested by popular support (reflecting obscure revolt)[66] of Trump, Orban, Erdogan, Modi, etc.[67]

Contemporary assessment of set theory (ontology)

Set theorists (today) are broadly drawn from three camps, which pursue the development and refinement of set theory from different angles: the doctrine of *constructibility* (originating in Gödel's constructible universe, and pursuing an inner model program for the incremental understanding of large cardinals),[68] the doctrine of *genericity* (originating in Cohen's theory of generic extensions, and pursuing a forcing program for expanding the width of the universe of sets),[69] and the doctrine of *large cardinals*, where the hierarchy of large cardinals, while unmoored from ZFC, is increasingly emerging as an intrinsic, fundamental conception within set theory.[70] As described in *Being and Event*, the orientations in thought corresponding to these three doctrines, hold mutually antagonistic positions, especially with respect to the question of the state.[71] But in recent times perhaps, the 'universists' among them find more common cause in recognition of their shared conviction (albeit differing approaches) of the possibility of an absolute framework in which set-theoretic truths are immutable, and they continue its pursuit, often even against reasonable expectation.

Since the turn of the 21st century, adherents of the universe view have insisted on a rational discussion and investigation based on a contemporary assessment of the facts and developments in set theory to date. For instance, they recognize that Cohen's result (1963) and its mathematical descendants have severely challenged any hope for a concise conception of the universe of sets, since it is not provided by the axioms ZFC – as has been well-documented in the (more than) 50 years since.[72] In fact Cohen's method of forcing has been vastly developed and many

66 Badiou, "Reflections on the Recent Election", *Verso blog*, November 15, 2016, which is a transcript of his *Presentation at the University of California*, November 9, Los Angeles 2016.

67 These are the current (2020) democratically elected presidents of the USA, Hungary, Turkey, India, respectively – all with characteristics of proto-fascism.

68 Woodin, "In Search of Ultimate-L, the 19th Midrasha Mathematicae Lectures".

69 Wolchover, "To Settle Infinity Dispute, a New Law of Logic".

70 Woodin, "The Transfinite Universe".

71 Badiou, *Being and Event*, chap. 27.

72 Woodin, "Strong Axioms of Infinity and the Search for V".

questions have been shown to be unsolvable; it's not only about the continuum hypothesis which is just a statement about an infinitesimal fragment of V.[73]

Also, large cardinal axioms are not provable from ZFC by Gödel's 2nd incompleteness theorem.[74] A large cardinal axiom is a statement that a 'very large' infinite set with certain properties exists; these cardinals carry names such as, for example, inaccessible, weakly compact, Ramsey, measurable, strong, Woodin, superstrong, strongly compact, supercompact, extendible, huge, ω-huge, Reinhardt. "With the definition of huge cardinals, we approach the point of rupture presented by inconsistency,"[75] but we cannot determine that point from ZFC.

All of this challenges the very conception of mathematical infinity; there is a temptation to yield, and to accept the skeptical assessment that the conception of the universe of sets is incoherent.[76] The skeptic wants to reject actual infinity for the sake of certainty (ontological coherence); this represents an extreme conservatism, to which adherents of the constructible universe are also vulnerable in the face of increasing recognition, among set theorists, of 'large' large cardinals without any formal consistency.[77] Yet Woodin, for example, still insists that "there are statements (predictions) which we expect to be false (or true), but there does not seem to be a coherent argument that would explain 'why' unless we adopt as meaningful the conception of a non-physical realm, a view where it makes sense to talk of the existence of at least some infinite objects."[78] For Badiou, in any case, it is meaningless to propound the theory of finitude since a rational, ramified thinking of infinity exists, i.e. large cardinal theory – which is the modern theory of infinity.[79] Recall that the theory of finitude (for him) extends beyond the classical form (embraced by the skeptic) to the modern form of finitude which is the constructible universe L.

73 Woodin, "Generalizing Gödel's Constructible Universe: Ultimate L".
74 *Ibid.*
75 Badiou, *Being and Event*, p. 448. Badiou quoting set-theorist Thomas Jech.
76 Woodin, "Generalizing Gödel's Constructible Universe: Ultimate L".
77 The constructible universe cannot accommodate even a measurable cardinal – which is a relatively 'small' large cardinal in the hierarchy.
78 Woodin, "The Realm of the Infinite".
79 Badiou, "Towards a New Thinking of the Absolute", p. 14.

Over the last few decades it has become commonplace to doubt that an ultimate completion of set theory can be articulated, or that a natural completion will settle the continuum problem.[80] The greater pressure then, is to conform to the dominant view that there can be no certainty with regard to infinity (relativism), that the arbitrariness is precisely what is so exciting about it (liberalism), and in any case the pursuit for a coherent conception of V goes against reasonable expectation.

Forcing axioms

Meanwhile, forcing axioms (from the doctrine of genericity) continue to extend the frontiers of mathematics – the universe of sets is extended to form a new, wider universe; a forcing axiom called 'Martin's maximum' (after the mathematician Donald Martin) discovered in the 1980's, extends the universe as far as it can go. Forcing axioms fill some problematic holes in everyday mathematics; work over the past few years (including new-found uses of Martin's maximum) by Stevo Todorcevic[81] and others shows that they bestow many mathematical structures with nice properties that make them easier to use and understand. They also solve the continuum hypothesis – deeming it false by adding a new size of infinity; in the extended universe created by forcing, there is a larger class of real numbers than in the original universe defined by ZFC, which means the real numbers of ZFC constitute a smaller infinite set than the full continuum. If the point is to find the most fruitful seeds of mathematical discovery (as opposed to the grains of truth that yield the most pristine mathematical universe), then forcing axioms emerge as a possible contender for addition to ZFC. Nevertheless, according to Todorcevic, "it is difficult to justify Martin's maximum as an axiom from a philosophical point of view; it can only be justified in terms of the influence it has had on the rest of mathematics." Woodin considers that it is a rich theory for understanding structures in classical mathematics but "it's not clear how it would lead to a better understanding of infinity," which (for him) is what set theory is about.[82]

[80] Abstract for "The Joint Quest for Absolute Infinity and the Continuum – From Cantor to Woodin", *Series of (three) lectures by Hugh Woodin at the University of Turku*, May 9-11, Finland 2019.

[81] Stevo Todorcevic is a mathematician at the University of Toronto, and the French National Center for Scientific Research in Paris.

[82] Paragraph paraphrased from Wolchover, "To Settle Infinity Dispute, a New Law of Logic".

Large cardinal hierarchy

As already mentioned, large cardinal axioms are not provable from ZFC. Nor is it known whether the existence of such sets is even consistent with ZFC, with one exception; a basic theorem proved by Kunen (1971)[83] shows that the existence of a Reinhardt cardinal is inconsistent with ZFC. The proof relies on the axiom of choice, and it is not known if the existence of a Reinhardt is inconsistent with ZF (i.e. ZFC minus the axiom of choice).[84] But large cardinal axioms can be well-ordered by their consistency strength, thus yielding the large cardinal hierarchy.[85] Also, they can decide some of the problems which are unsolvable from ZFC alone, for example, the existence of a measurable cardinal implies that the universe of sets is larger than Gödel's constructible universe.[86] (This is because the existence of a measurable cardinal implies the existence of Silver's $0^{\#}$ (zero sharp),[87] where $0^{\#}$ is the set of true formulae about indiscernibles and order-indiscernibles in the constructible universe L. The existence of $0^{\#}$ however, like that of a measurable cardinal, is unprovable from ZFC).[88]

But they cannot decide the continuum hypothesis. (This is because the continuum hypothesis can be made true or false by forcings (Cohen) which are small in the sense that they only act on the lower (infinite) levels of the cumulative hierarchy, but these small kinds of forcings do not act on the level of a measurable cardinal or beyond, therefore the existence of a measurable (or any stronger large cardinal) simply has no bearing on the truth value of the continuum hypothesis).[89]

83 For the actual statement of Kunen's theorem, see Akihiro Kanamori, "The Higher Infinite", *Perspectives in Mathematical Logic*, Springer-Verlag, Berlin 1994. This is Ref [5] in Woodin, "The Transfinite Universe".

84 Rittberg, "How Woodin Changed his Mind: New Thoughts on the Continuum Hypothesis".

85 One theory has a higher consistency strength than another, if the consistency of the former implies the consistency of the latter. The order of consistency strength in the large cardinal hierarchy is not necessarily the same as the order of the size of the smallest witness to a large cardinal axiom. For example, the existence of a huge cardinal is much stronger, in terms of consistency strength, than the existence of a supercompact cardinal, but assuming both exist, the first huge is smaller than the first supercompact.

86 Rittberg, "How Woodin Changed his Mind: New Thoughts on the Continuum Hypothesis".

87 $0^{\#}$ (zero sharp) was first introduced in Silver's 1966 thesis, which was later published as: Jack H. Silver, "Some Applications of Model Theory in Set Theory", *Annals of Pure and Applied Logic* 3 (1/1971), pp. 45–110.

88 Woodin, "In Search of Ultimate-L", p. 3.

89 Rittberg, "How Woodin Changed his Mind: New Thoughts on the Continuum Hypothesis".

Yet the development of set theory after Cohen has led to the realization that formally unsolvable problems have degrees of unsolvability which can be exactly calibrated by large cardinal axioms, which has proven to be useful. As a consequence of this calibration, it has been discovered that in many cases very different lines of investigation have led to problems whose degree of unsolvability is the same. Thus the hierarchy of large cardinals emerges as an intrinsic, fundamental conception within set theory.[90]

An interesting example in this context is that large cardinal axioms do not exist in the universe of number theory, yet their existence generates new truths of that universe; more precisely, assuming the large cardinals to be true, one can infer as true specific statements of number theory which arguably cannot otherwise be proven. How then can the number theorist account for these truths? The skeptic of course will object here that all one is asserting about large cardinal axioms is formal consistency, and that such consistency claims cannot be meaningfully made since the concept of the universe of sets is so 'incomplete' that it is a complete fiction.[91] For so long as large cardinal axioms remain independent set-theoretical statements, this skeptical position cannot be refuted.

Exploring the universe from below (the local argument)

'Universists' however point to the increasingly stable consequences of the large cardinal hierarchy as evidence that we are on the right track towards final answers to set-theoretical questions.[92] Large cardinal axioms not only fit together, but all extensions of set theory 'considered in practice' seem to be equiconsistent with large cardinal axioms; their arithmetic consequences are compatible, and (eventually) so are their projective consequences, thus providing, for example, a coherent theory of the reals (i.e. of $V_{\omega+1}$). This is illustrated by the axiom of determinacy (an assertion about infinite games and pivotal to current research in set theory) that turns out to be equiconsistent with the assertion that there are infinitely many Woodin cardinals.[93] The axiom of determinacy (with extrinsic justifications) and 'there exist Woodin cardinals' (with intrinsic justifications) are proved to coincide. "This sort of convergence of conceptually distinct do-

[90] Woodin, "The Transfinite Universe".
[91] *Ibid.*
[92] Hampkins, "The Set-Theoretic Multiverse: a Natural Context for Set Theory".
[93] Caicedo, reviewing Woodin's "The Realm of the Infinite".

mains is striking and unlikely to be an accident," as Peter Koellner[94] wrote in 2006.[95] Yet despite these successes, with the amount of mathematical effort and development which was required – which yielded the correct axioms for a certain part of the universe of sets, i.e. $V_{\omega+1}$ (in which the real numbers appear), and noting that this is just an infinitesimal fragment of the universe of sets V, then the prospects for understanding V itself to this same degree (or even just $V_{\omega+2}$ in which all sets of reals appear, and which would reveal whether the continuum hypothesis is true) seem daunting.[96]

Probing the 'whole' universe of sets (the global argument)

Taking another track, the successes of the inner model program (from the doctrine of constructibility) were encouraging, and led to the realization that the large cardinal hierarchy is a very 'robust' notion.[97] The inner model program is the detailed study of large cardinal axioms, by seeking generalizations of the definition of the axiom of constructibility (Gödel) which are compatible with these axioms (such as the axioms for measurable cardinals and beyond),[98] i.e. by enlarging the constructible universe (denoted by L) to accommodate targeted large cardinal axioms. The axiom of constructibility, i.e. V = L, severely limits the nature of infinity, but the constructible universe L, does have the benefit of being pristine and analyzable (unlike the cumulative hierarchy of sets V), and enlargements of L, being L-like, offer the same advantage. Inner models, i.e. enlargements of L, are constructed using both constructible elements *and* extender elements as defining parameters, where an *extender* is derived from the 'elementary embedding' which is closely linked to the large cardinal under consideration.[99] Large cardinals can be defined in terms of elementary embeddings, i.e. an embedding of V itself into some inner model M,[100] and extenders are non-trivial fragments of the elementary embedding.[101] More precisely, one

94 Peter Koellner is a philosophy professor specializing in mathematical logic at Harvard University.

95 As quoted by Zhaokuan Hao, (Fudan University, China) in "Gödel's Program and Ultimate L", *Presentation at the National University of Singapore*, September 2017.

96 Woodin, "Strong Axioms of Infinity and the Search for V".

97 Woodin, "The Transfinite Universe".

98 *Ibid*.

99 Rittberg, "How Woodin Changed his Mind: New Thoughts on the Continuum Hypothesis".

100 Where M is a transitive model of ZFC containing all the ordinals, and an elementary embedding is a function (not the identity) between models which preserves truth. *Ibid*.

101 Woodin, "The Transfinite Universe".

has to require that the large cardinals of the inner models which constitute the solution have some form of ancestry in the large cardinals of V. As such, the extender models are constructed as refinements of V, which preserve enough extenders from V to *witness* that the large cardinal axiom holds.[102]

By the year 2000, the inner model program had been unconditionally extended to the level of Woodin cardinals – which are limits of strong cardinals, and conditionally extended to the level of superstrong cardinals.[103] But the incremental nature of the program seems to be an absolutely fundamental aspect: each new construction of an enlargement meeting the challenge of a specific large cardinal axiom comes with a theorem that no stronger large cardinal axiom can hold in that model. Since it's very unlikely that there could ever be a *strongest* large cardinal axiom, this methodology seems unlikely by its very nature to yield an ultimate enlargement of the constructible universe, i.e. to ever succeed in providing the requisite axiom for clarifying the conception of the universe of sets.[104] The pursuits for a new axiom for set theory *from below* (analyzing the set-theoretic universe fragment by fragment) looked daunting, and *from above* (a form of extension of ZFC based on the whole universe) seemed hopeless.[105]

Then something happened…

Circa 2010 the situation changed dramatically, with the "remarkable and completely unexpected" discovery within the inner model program, that at a specific, critical stage in the hierarchy of large cardinal axioms, there is a breakaway point: at the level of one supercompact cardinal, the inner model construction *must* yield an enlargement which is compatible with *all* stronger large cardinal axioms, i.e. it must yield an *ultimate* enlargement of the inner model L.[106] The requirement for enough suitable extenders from V to witness that the supercompact cardinal holds, necessarily must generate 'phantom' witnesses (extenders) for all large cardinals stronger in the hierarchy.[107] This is now formulated in the

[102] *Ibid.*
[103] Woodin, "In Search of Ultimate-L", p. 1.
[104] Woodin, "Strong Axioms of Infinity and the Search for V".
[105] Rittberg, "How Woodin Changed his Mind".
[106] Woodin, "Strong Axioms of Infinity and the Search for V".
[107] Woodin, "The Transfinite Universe".

'universality theorem.'[108] If such an inner model could be found, then it would accommodate *all* large cardinals (that are consistent with ZFC), which amounts to a paradigm shift in the whole conception of inner models.[109] Is this not a mathematical event?

The entire framework for the inner model program was transformed from a program for the incremental understanding of large cardinals into a program for perhaps understanding V itself, and it led to the isolation of a candidate for an axiom that V is an ultimate version of L. W. Hugh Woodin is on the brink (in a decadal sense) of demonstrating a *transcendent* version of Gödel's axiom of constructibility for the universe of sets; but where Gödel's axiom is minimal (i.e. the mimimum possible universe of sets containing all ordinals), Woodin's axiom is a maximal statement about the nature of the universe of sets. Everything now hinges on the fate of the 'ultimate-L' conjecture which, if true, provides an absolutely compelling case that V = ultimate-L.[110]

Strategic-extender models

The various approaches to inner model theory have to be *fundamentally* altered to provide the solution to the inner model problem for one supercompact cardinal.[111] The ultimate-L program introduces a new class of model for V – a different, previously unknown class of extender model called the *strategic-extender* models, which can no longer be layered (as in the non-strategic case);[112] based on the strategic-extender models, one can formulate the axiom, V = ultimate-L, *without* referring to the detailed fine-structure theory of these models, or even using the definition of the structures yielding the levels of these models. The point (here) is that, in the context of a proper class of Woodin cardinals, there are naturally defined approximations to ultimate-L and the collection is rich enough to make a definition of the axiom, V = ultimate-L, possible without specifying the detailed level-by-level definition of ultimate-L. Woodin notes that

108 Woodin, "Generalizing Gödel's Constructible Universe: Ultimate L".
109 Rittberg, "How Woodin Changed his Mind".
110 Woodin, "Beyond the Age of Independence by Forcing," Presentation at the Chinese Mathematical Logic Conference", May 20, 2017.
111 Woodin, "In Search of Ultimate-L", p. 1.
112 *Ibid*, p. 93.

this situation is analogous to being able to formulate the axiom, V = L, without specifying the definition of L.[113]

Strategic-extender models were developed by generalizing on the earlier success in understanding $V_{\omega+1}$ and the projective sets – which provided a good theory of the reals (assuming the existence of Woodin cardinals). They make use of the class of all hereditarily ordinal definable (HOD) sets, i.e. the class containing all those sets which are definable from ordinal parameters.[114] Originally defined by Gödel,[115] Woodin gives an equivalent reformulation of the class HOD which highlights it as some sort of merge of the definitions of the cumulative hierarchy V and of the constructible universe L. For the power-set in L, the subset is logically definable from parameters in the set, whereas in HOD, the subset is definable without parameters. He also notes here that there is a remarkable theorem of Vopenka which connects HOD and Cohen's method of forcing,[116] and which illustrates why Cohen's method is so central in set theory (and for reasons other than simply establishing independence results).[117]

Ultimate-L program

The program to prove the ultimate-L conjecture is a 4-stage project. Stage 1 has been completed (~2013) and it survived its first critical test; this was the construction of an L-like weak extender model for the finite levels of supercompactness. Then, "in an unexpected twist," Woodin reported, "the remaining three stages collapsed into a single final stage, and subsequent analysis has provided the key clues as to how to proceed."[118] With many evidences leaning toward a positive answer for the ultimate-L conjecture, Woodin is quite confident of the outcome. However, as he wrote in March 2017, "given the series of unexpected events to date on this subject, an abundance of caution seems prudent here."[119]

113 *Ibid*, pp. 94–95.
114 Woodin, "The Transfinite Universe".
115 More precisely, the definition of the class HOD originates in remarks of Gödel at the Princeton Bicentennial Conference in December, 1946. According to Woodin, the first detailed reference appears to be Ref [8] in *Ibid*.
116 Theorem (Vopenka). For each set $G \subset \mathrm{Ord}$, if $G \notin \mathrm{HOD}$, then HOD_G is a Cohen extension of HOD.
117 Woodin, "Strong Axioms of Infinity".
118 Woodin, "Beyond the Age of Independence by Forcing".
119 Woodin, "In Search of Ultimate-L", p. 3.

As of May 2017 there was a draft of a proof and, according to Woodin (at that time), "things look promising."[120]

In 2019, Woodin said that the ultimate-L conjecture reduces the entire post-Cohen debate on set theoretic truth to a single question which must have an answer – true or false, i.e. it cannot be meaningless. Either the conjecture is true, in which case the axiom, V = ultimate-L, is very likely the key missing axiom for V. Or it is false, in which case the program to understand V, by generalizing the (local) success in understanding $V_{\omega+1}$ and the projective sets, fails.[121]

The axiom V = Ultimate-L (conjectured)

- Large cardinal axioms can (and therefore do) exist in the universe given by ultimate-L.

This is the key new feature which sets it apart from all previous generalizations of L. Ultimate L is mathematically analyzable – in this sense it is L-like – and yields a much deeper understanding of the large cardinal axioms; it identifies more precisely the transition for large cardinal axioms from the possible to the impossible (i.e. the demarcation of consistent and inconsistent sets), and provides a framework for a continuing evolution in the understanding of this transition.[122] One obtains a new generation of inconsistency results for the large cardinal hierarchy (in the setting where the axiom of choice fails) which includes a mild strengthening of Reinhardt cardinals, and also Berkeley cardinals.[123]

- The conjectured axiom affirms the ZFC axiomatic, and in particular the axiom of choice.

It recognizes all large cardinal axioms (both known, and those yet to be discovered) consistent with ZFC, but will eliminate essentially all the large cardinal axioms known to contradict the axiom of choice.[124] For example, the *existence* of

[120] Woodin, "Beyond the Age of Independence by Forcing".
[121] W. Hugh Woodin, "The Continuum Hypothesis", *Presentation at the University of Münster (WWU)*, Germany, June 20, 2019.
[122] Woodin, "The Transfinite Universe".
[123] Woodin, "In Search of Ultimate-L", p. 3.
[124] *Ibid.*

weak Reinhardt cardinals – which was already proven to contradict 'choice' by the well-known Kunen inconsistency (1971)[125] – is actually refuted here.[126] More fundamentally, it reveals deep connections between large cardinal axioms and *proving* instances of the axiom of choice.[127] One also obtains, in the context of the axiom of choice, that what seem like natural generalizations of axioms of definable determinacy, are false if sufficient large cardinals are assumed to exist.[128]

- The continuum hypothesis is decided.

Surprisingly in fact, it holds,[129] which runs counter to the intuitive expectations of notable Platonists, from Gödel, to Woodin himself, to Badiou. The type of multiplicity of the power-set is decided and with a minimum of excess; the continuum is the second infinity. In fact the axiom renders Cohen's method of forcing completely useless for establishing independence from the resulting conception of the universe of sets;[130] it settles all questions about 'small' sets which have been shown to be independent by that method. This is because the axiom V = ultimate-L (or V = L, for that matter) strongly couples the width of the universe of sets V, to its height. Woodin explains that V has two dimensions, width and height; the height is a large cardinal issue, and the width is – how many reals do you have, i.e. how many sets of reals. V = ultimate-L binds the width to the height; if you change the width, you cannot recover the axiom without changing the height. Cohen's method changes the width, but preserves the height of V, and that's why it is useless – it cannot affect the axiom.[131]

Woodin further conjectures that this axiom is *true*, i.e. that it will eventually be validated on the basis of accepted and compelling principles of infinity, exactly as the axiom of projective determinacy was validated,[132] and the truth of which only became evident after a great deal of work, i.e. mathematical results proven

[125] Kenneth Kunen, "Elementary embeddings and infinite infinitary combinatorics", *J. Symbolic Logic* 36 (1971), pp. 407–413. This is Ref [7] in Woodin, "The Transfinite Universe".
[126] Woodin, "The Realm of the Infinite".
[127] Woodin, "Strong Axioms of Infinity and the Search for V".
[128] Woodin, "In Search of Ultimate-L", p. 3.
[129] Woodin, "Generalizing Gödel's Constructible Universe: Ultimate L".
[130] *Ibid*.
[131] Woodin, "The Continuum Hypothesis Set Theory", *Presentation at the California Institute of Technology (Caltech)*, February 23, 2019.
[132] Woodin, "Strong Axioms of Infinity and the Search for V".

by the set theoretic community. This demonstrated (for him) that the discovery of mathematical truth is not a purely formal endeavour.[133] Using the phrase "truth beyond our formal reach," Woodin maintains that there's a component in the evolution of our understanding of mathematics which is not formal, that there is mathematical knowledge which is not entirely based in proofs.[134]

Some meta-ontological implications

Set theory's contemporary indeterminacy – which renders the impossibility of regarding it as an absolute referent – stems from the independence of large cardinal axioms, and the undecidability of the continuum hypothesis. The non-intuitive nature of the axiom of choice, which is "without any known procedure,"[135] doesn't help either.[136] There are many implications raised not just by the fact, but also by the manner of the resolution of these issues by the axiom V = ultimate-L, *if* indeed it is demonstrated to be true…

- The conjectured axiom, V = ultimate-L proposes to complete the system of axioms which define the universe V; it offers a *coherent* conception of the universe of sets, presenting an unambiguous concept of the transfinite universe. Addressing the questions of independence with respect to large cardinal axioms and the continuum hypothesis, it resolves the contemporary crisis of formalization. The resulting conception of V is maximal and univocal, i.e. not in the least indeterminate or relative; it thereby affirms the universe (or non-pluralist) orientation, and *facilitates the adoption of set theory as an absolute ontological referent*.

- The skeptical assertion that V is meaningless (i.e. a fiction) is undermined by the articulation of a coherent and ultimately complete (but not closed) set theory. V = ultimate-L provides a framework for understanding and ana-

---

133 Rittberg, "How Woodin Changed his Mind".
134 Woodin, "The Continuum Hypothesis Set Theory".
135 Badiou, *Being and Event*, p. 228.
136 The axiom of choice has long been subjected to criticism. It is a purely existential axiom in that it asserts the existence of a function of choice without providing any means of constructing it; it is impossible to specify any rule that might guide an infinite set of arbitrary choices. Yet it has been proved that it does not introduce any contradiction. Moreover, the axiom of choice is required to establish that every set can be well-ordered.

lyzing large cardinal axioms as true axioms about the universe of sets, and no longer as independent set-theoretical statements. Large cardinal axioms exist in the universe given by V = ultimate-L, which allows the number theorist, for example, to account for new truths generated in the universe of number theory by their existence. Such examples serve to *ground a refutation of the skeptic*.

- The universe given by V = ultimate-L – unlike the constructible universe (given by V = L) – recognizes all large cardinals (both known, and those yet to be discovered) consistent with ZFC, but *refuses* an incoherent "prodigality of being."[137] The impossibility, heretofore, of determining consistency in large cardinals is surpassed, so that an axiomatic realized in the ultimate-L model transcends the fear of incoherence, the tension of uncertainty. As such, it offers *a coherent way out of the constructible universe*.

- V = ultimate-L, affirms the axiom of choice. In fact 'choice' emerges as a crucial axiom for determining formal consistency in large cardinal axioms, which therefore are no longer independent from the resulting conception of sets. For Badiou, the axiom of choice provides the precise concept of the being (as opposed to the act) of subjective intervention; he associates it with a 'principle of infinite liberty.'[138] But in the contemporary world, freedom is generally associated with a principle of independence. Perhaps freedom will yet come to be re-defined (positively) as the expression of choice within a coherent yet unrestricted axiomatic, rather than (negatively) as the exemption (independence) from any formalization.

- Woodin's axiom affirms the truth of the continuum hypothesis. Woodin originally set out to falsify the continuum hypothesis; between 1999 and 2004, he presented three very similar yet different arguments against the continuum hypothesis, in each case, exploring the universe from below.[139] But in the course of his endeavour to find the true axioms for $V_{\omega+2}$ – in which the continuum hypothesis would have an answer – he was obliged to start a program in inner model theory which led to the completely unexpected discovery of

[137] Badiou, *Being and Event*, p. 283.
[138] Hallward, "On the Development of Transfinite Set Theory", p. 339.
[139] Rittberg, "How Woodin Changed his Mind".

> the breakaway point in the hierarchy of large cardinal axioms, and the subsequent isolation of an axiom that V = ultimate-L. The truth of the continuum hypothesis is something demonstrated by this axiom, but the resulting model was not the original expectation or motivating goal.

Alain Badiou's objection to the continuum hypothesis as true (ever since he was working on what was to become *Being and Event*) stems from a consideration that adopting it leads to a restriction of set theory's axiomatic powers, and is therefore opposed to the principle of maximality. Yet, as he says, there were reasons for hesitating, since adopting it would introduce no contradiction, and the mere negation of the hypothesis doesn't tell us what type of infinity the continuum really is either.[140] Perhaps Badiou's objection to the truth of the continuum hypothesis stems more particularly from an objection to the restrictions (minimality) of the constructible universe – which is the only situation (heretofore) which has demonstrated that truth. But Woodin's axiom is a *maximal* axiom for V; it accommodates all genuine large cardinal axioms, including that of a measurable cardinal which therefore implies the existence of Silver's $0^{\#}$ and brings the doctrine of indiscernibles (generic) into the resulting conception of V. The key point here is that ultimate-L is not at all L, that in fact the inner model approach has to be altered – in a fundamental way – to provide the solution for one supercompact cardinal; ultimate-L is not simply an L enlarged to accommodate large cardinal axioms, but (having developed from a coherent theory of the reals) an L re-cast such that the resulting model can accommodate the reals which are overlooked (indiscernible) in L.

The normalization of the state – its minimum of excess (represented by the truth of the continuum hypothesis)[141] – which was primitively achieved in the constructible universe, is accomplished *here* in the context of an axiomatic which is capable of challenging a much greater indeterminacy, that of consistency with respect to large cardinals; genuine large cardinals are admitted due to their (demonstrable) formal consistency and false large cardinals are refuted. It seems then that the state proves to be unduly excessive only in the absence of a coherent formal framework; beyond the narrow constructible universe (which can't admit even a measurable cardinal) and before an ultimate universe (which ad-

140 Badiou, "Towards a New Thinking of the Absolute", pp. 17–18.
141 Badiou, *Being and Event*, p. 296.

mits all large cardinals consistent with ZFC), the specter of independent large cardinal axioms coincides with an excess of the state which is immeasurable. Once the formal framework has the capacity to identify and accommodate all genuine large cardinals, the state seems to settle into normalcy and lose its (potentially) exorbitant power of oppression.

- The axiom completely negates the ramifications of Cohen's method, leading Woodin to present a vista for set theory "beyond the age of independence by forcing."[142]

Badiou's maxim that "there are only bodies and languages, except that there are truths," is based on the existence of the pure theory of the multiple as an absolute ontological referent. In this respect, he writes "it is that theory, and not the general principle of the existence of truths, that it is a matter of defending here."[143] Set theory as an absolute referent implies a system of axioms fully identified such that no important, significant, useful property of sets will remain undecidable; any such theory has to "banish the specter of undecidability as demonstrated by Cohen's method of forcing."[144]

It is noteworthy here that Alain Badiou recently remarked that he now accepts that his definition of universality – as genericity (due to Cohen) – in *Being and Event* is purely negative.[145] He added that "genericity signifies, exclusively, that universality is not reducible to properties in the situation," and that maybe it is impossible to solve the question of universality with a negative definition of this kind. He said that universality does not just consist of negative genericity, but also of something which has a form of relationship to an affirmative concept of absoluteness which he proposes in *The Immanence of Truths*.[146] Badiou also notes that 'elementary embedding' somehow plays a similar role to 'forcing,'[147] in the sense of as a truth procedure. He says that the absolute class V is embed-

[142] Woodin, "Beyond the Age of Independence by Forcing".
[143] Badiou, "Towards a New Thinking of the Absolute", p. 13.
[144] Woodin, "Strong Axioms of Infinity".
[145] Badiou, Presentation at the Graduate Workshop on Being and Event, Columbia University, New York, October 24, 2017, subsequently published in *Sometimes We Are Eternal*, p. 58.
[146] Badiou, referring to the English translation (yet unpublished) of *L'Immanence des Vérités*.
[147] As reported by Berankova, in "*The Immanence of Truths*: the Absolute between the Singular and the Universal".

ded in one of its 'attributes' (Spinozist notion), i.e. in the transitive subclass M, which is thereby transformed into a model of V. There is a relation between V and M but this is not the identity, i.e. V will remain different from the attribute M and contain sets that we cannot find in M. Thus, to say that a 'truth' is absolute does not mean that a 'truth procedure' is absolute; rather, the absolute is embedded in its attribute.

Ultimate-L – with strategic-extender models and the class HOD – seems to embrace these truth procedural conditions. The subset in HOD is definable *without parameters*, and HOD is connected to Cohen's method of forcing (Vopenka), so it seems that forcings are somehow already inscribed in ultimate-L giving a widening of V. But this widening is strongly coupled with a heightening of V to the level of a supercompact cardinal and (thus) beyond, yielding an inner model which is very 'close' to V.

Forcing, i.e. the Cohen symptom of a sort of legal insubordination to a restricted (conservative) formalization – which is effective and necessary to demonstrate the insufficiency of ZFC – does not itself propose a solution to the crisis (of ZFC) which it initiated, but the indiscernibles which it indicates must be incorporated in any such solution. It only becomes redundant *as an intervention* when the formalization is sufficient. This is also the case with the 'attributes of the absolute,' i.e. large cardinals, which are indicated by the procedure of elementary embedding.

Alain Badiou has not written about ultimate-L, but then he generally does not write about what is only conjecture in set theory – he waits for results and their establishment among the set theoretical community. Woodin's axiom however seems to present the possibility of a new framework for infinite thought which is universally consistent in the sense indicated by Badiou; it completes a system of axioms which define a model which is very 'close' to V with the capacity to accommodate all of the reals, together with all large, demonstrably consistent 'attributes of the absolute' (large cardinal axioms). It seems to embrace a principle of maximality,[148] and it affirms a 'principle of infinite liberty' (axiom of choice).

[148] This is in the sense that "any intellectual entity, whose existence can be inferred *without contradiction* from the axioms that prescribe it, exists by that very fact," Badiou, "Towards a New Theory of the Absolute", p. 11.

Implications for the symbolic, for the subject

The argument presented in this paper is that humanity's symbolic organization, or a symbolic, requires a credible ontological referent. The breakdown of the hierarchical symbolic (of tradition) accompanied the ruin of the ontological supposition – of the being of the one – on which it relied. The modern revelation of the pure multiplicity of being as such cannot be undone. A new symbolic (if such is possible) has to recognize the non-being of the one, which means that it can only be non-hierarchical, which is to say, egalitarian. An egalitarian symbolic therefore requires a *credible* ontology of pure (infinite) multiplicity as referent; mathematical set theory is proposed (Badiou).

In *Being and Event*, Badiou wrote that metaontology "serves as an unconscious framework for every orientation in thought."[149] In this respect, the commonplace doubt that an ultimate completion of set theory can be articulated, corresponds to a general conviction of impossibility – with respect to an egalitarian symbolic – which has dominated since the 1980's; such a conviction equates a symbolic solely with hierarchy, and resigns itself to (or lauds) the reign of the a-symbolic, (unless it attempts a retrogression to hierarchy).

But set theory – with the axiom V = ultimate-L (conjectured) – now affords the real possibility of a coherent, ultimately complete, and therefore credible, ontology of multiplicity. As such it proposes the *possibility* of an egalitarian symbolic. This is not to suggest that an abstract formalization in itself constitutes a concrete new symbolic, but a coherent ontology of multiplicity is an a priori requirement, i.e. a condition of possibility. The articulation – even as conjecture – of a coherent, rational thinking of infinite multiplicities challenges the dominant conviction of impossibility with respect to an egalitarian symbolic;[150] it re-opens the question of a symbolic for an age of multiplicity. It implies that the idea of an egalitarian symbolic may be more than just a utopian dream.

149 Badiou, *Being and Event*, p. 282.

150 It is of course still quite possible that ultimate-L will fail, and that an optimal axiom (or otherwise concluding axioms) for V will eventually take a form other than that of an inner model. Nevertheless, the significance of the supercompact cardinal and the universality theorem cannot be ignored.

This can modify, or even flip, a subjectivity; a wishful orientation (unfounded desire), or even a hopeless one, has new reason to hope (desire combined with expectation). A condition of possibility (as opposed to impossibility) gives a subjective motivation to act (rather than hopelessly react) in the concrete world. Ontology may indicate how to proceed: such is Badiou's endeavor, with the adoption of forcing (in *Being and Event*) and elementary embedding (in *L'Immanence des Vérités*) as the being of truth procedures. It is by such "arduous and protracted procedures" that "the new pulls itself away from the old."[151] But the advance from doubt, or beyond conviction, to reasonable expectation that we can have access to a 'place' of thinking where such truth procedures can be decided, gives impetus to the subject to pursue them in the objective world, whenever chance arises, or the 'event' happens.

More speculatively (and this is an *impressionistic* response to accounts of the remarkable developments in set theory by Hugh Woodin and colleagues), ontology might even suggest that recent phenomena such as the generation of mass testimony ('target witnesses') by activists in, for example, the 'Me Too' or the 'Black Lives Matter' movements, to challenge the inherent male/white/power bias in the existing legal, social and economic systems, will have effect. Or that the advocation of 'choice' by activists, for instance for same-sex marriage or abortion, is valid. More tantalizingly, the deep awareness of the requirement for social and economic justice by contemporary (genuine) climate activists,[152] suggests the inadvertent generation of non-targeted or 'phantom' witnesses. All of these orientations have their correspondences in (speculative) ontology in the present moment.

Moreover, the development of the axiom V = ultimate-L demonstrates how the unexpected discovery (encapsulated here in the *universality* theorem) can change everything. It harnesses and combines the efforts of the 'universists' in the three camps of set theory, i.e. the inner model program, the generic and the large cardinal doctrines, using the resources of all three but privileging none. Those aspects of mathematical truth discovered separately in each of the three

151 Zachary Luke Frazer in the introduction to Badiou, *The Concept of Model*, re.press, Melbourne 2007, p. xvi.

152 This is captured by Naomi Klein in "*This Changes Everything: Capitalism vs. the Climate*" (Simon and Schuster, New York 2014) – again, an intriguing title.

doctrines are addressed and deployed, which suggests that in other domains perhaps those of a shared conviction, but opposing methods, might engage with each other's work.

The subject and reversal of exile

Before devising the mathematical ontology, Alain Badiou wrote a theory of the subject (1982).[153] While he subsequently revised his thinking,[154] some of those teachings have resonance here; in particular, his comparison of the *subjective figures* in Greek tragedy according to Sophocles (in Antigone), and to Aeschylus (in the Oresteia): [155]

> In *Antigone* the theme is 'reversal' by which the way of the new is barred; it is not governed by any new right. The crucial point is the *retrogression* towards the origin. This is *native reversal*, reversal from the formal (what is learned) to the originary native form. It leaves no way out for the subject (Antigone) – wandering below the unthinkable – other than death. This subjective figure must always prevail in times of decadence and disarray.

Such a subjective figure seems appropriate for our times; it captures the general disorientation which prevails under the triumphant reign of the a-symbolic, with no prospect for any new right (a symbolic in an age of multiplicity) but only the retrogression to finitude by which the way of the new – actual infinity – is barred. This leaves no way out for the subject other than nihilism.

> In the *Oresteia* the theme is the 'rupture' that allows for the advent of the new; it is a new coherence instituted by the interruption of the repetitive series that made up the whole previous social order. The key point is the *interruption* of the power of the origin. Orestes (the subject) demands a discussion based on facts; he stands firm and does not give in to the murderous seduction of the Erinyes. There is no return to order, and the subject is prepared to sustain exile, exile-without-return. *Reversal of exile* will not take place without the re-composition of a different

153 Badiou, *Théorie du Sujet*, Éditions du Seuil, Paris 1982.
154 Badiou, *Logics of Worlds*, especially the "Formal Theory of the Subject", pp. 43–89.
155 Badiou, *Theory of the Subject*, Bloomsbury Academic, London and New York 2013, pp. 161–168.

> order – which is not simple. Neither will it take place without the structural anchorage of the native – indeed it is from the materialistic impasse of the latter that the practical existence of the former proceeds.

Here the subjective figure seems to correspond to the universe orientation (or faithful subject) with respect to the situation of set theory; it captures the interruption (the Cohen event) of the repetitive series (V = L) that made up the previous natural order. There is no return to order, and the subject is prepared to sustain exile without return (set theory's indeterminacy).

After more than 50 years of roaming (sustained exile) – refusing the native reversal of the skeptic, and overcoming the exile-without-return of the generic (due to Cohen) – set theory now affords the possibility, not of a return to order, but the recomposition of a different order (V = ultimate-L). It is only the insistence of the interruption (forcing/generic) which, in the end, allows for the advent of a new right capable of completely recomposing the whole logic of the decision. Risking the hyperbole of understatement, this is *not* simple. Moreover, the reversal of exile will not take place without the structural anchorage of the native ("the anchoring of the ordinals in being"[156]); ultimate-L, as a new, consistent universe capable of accommodating all cardinals, is still structurally anchored in L which is the minimum possible universe of sets containing all ordinals, but with L re-shaped, re-composed. Indeed it is from the materialistic impasse of the latter (i.e. the constructible power-set is never the set of all subsets of the set), that the practical existence of the former proceeds (by generalizing the success in understanding the reals, i.e. $V_{\omega+1}$). Finally – faithful to the conviction that "even though we have to return, and it is this return that makes the subject [set theory] – there can arise an enlightened overcoming of what no longer entails any return."[157]

References

Acheronta, Movebo, "Towards a New Thinking of the Absolute", *Crisis and Critique* 1 (2/2014)

Badiou, Alain, *Being and Event*, trans. Oliver Feltham, Continuum, London and New York 2007

[156] Badiou, *Number and Numbers*, p. 83.

[157] Badiou, *Theory of the Subject*, p. 168.

— *L'Immanence des Vérités*, Fayard, Paris 2018
— *Logics of Worlds*, trans. Alberto Toscano, Continuum, London and New York 2009
— *Manifesto for Philosophy*, trans. Norman Madarasz, SUNY Press, Albany, New York 1996
— *Number and Numbers*, Polity Press, Cambridge UK and Malden USA 2008
— Presentation at the *Graduate Workshop on Being and Event*, October 24, Columbia University, New York 2017
— "Reflections on the Recent Election", *Verso blog*, November 15, 2016
— *Theoretical Writings*, trans. Ray Brassier and Alberto Toscano, Bloomsbury Academic, London and New York 2014
— *The Concept of Model*, trans. Zachary Luke Fraser and Tzuchien Tho, Re.press, Melbourne 2007
— *Théorie du Sujet*, Éditions du Seuil, Paris 1982
— *Theory of the Subject*, trans. Bruno Bosteels, Bloomsbury Academic, London and New York 2013
— "True and False Contradictions of the Crisis", *Verso blog*, May 29, 2015
Berankova, Jana Ndiaye, "The Immanence of Truths: the Absolute between the Singular and the Universal", Presentation at the Conference "*Thinking the Infinite*", April 11, Prague 2018
— "The Attributes of the Absolute and Alain Badiou's Response to Spinoza", in *Sometimes, We Are Eternal*, Suture Press, Lyon 2019
— *Presentation at the Graduate Workshop with Alain Badiou on The Immanence of Truths*, November 13, Columbia University, New York 2019
Blake, Terence, "Badiou's *The Immanence of Truths*: Introduction (sketch)", available at: https://terenceblake.wordpress.com/2017/01/19/badious-the-immanence-of-truths-introduction-sket
— "My Path Through Badiou's *The Immanence of Truths*", available at: https://terenceblake.wordpress.com/2018/10/06/my-path-through-badious-the-immanence-of-truths

Caicedo, Andrés Eduardo, "Review of Woodin's 'The Realm of the Infinite'", submitted to *Mathematical Reviews/MathSciNet*, MR 2767235, June 26, 2012
Cheng, Eugenia, *Beyond Infinity*, Profile Books, London 2018
Hallward, Peter, *Badiou: A Subject to Truth*, University of Minnesota Press, Minnesota 2003
Hampkins, Joel David, "The Set-Theoretic Multiverse: a Natural Context for Set Theory", (MR2857736 (2012h:03002))
Hao, Zhaokuan, "Gödel's Program and Ultimate L", *Presentation at the National University of Singapore*, September 2017
Kanamori, Akihiro, "The Higher Infinite", in *Perspectives in Mathematical Logic*, Springer-Verlag, Berlin 1994

Klein, Naomi, *This Changes Everything: Capitalism vs. the Climate*, Simon and Schuster, New York 2014

Kunen, Kenneth, "Elementary embeddings and infinite infinitary combinatorics", *Journal of Symbolic Logic* 36 (1971)

Rittberg, Colin J, "How Woodin Changed his Mind: New Thoughts on the Continuum Hypothesis", *Archive for History of Exact Sciences* 69 (2016)

Silver, Jack H, "Some Applications of Model Theory in Set Theory", *Annals of Pure and Applied Logic* 3 (1/1971)

Encyclopedia.com, *Symbolic, the (Lacan),* available at: https://www.encyclopedia.com>psychology>symbolic-lacan

Wolchover, Natalie, "To Settle Infinity Dispute, a New Law of Logic", *Quanta Magazine*, November 26, 2013 (reprinted on *ScientificAmerican.com*, December 3, 2013)

Woodin, W. Hugh, "Beyond the Age of Independence by Forcing", *Presentation at the Chinese Mathematical Logic Conference*, May 20, 2017

— "In Search of Ultimate-L, the 19th Midrasha Mathematicae Lectures", *The Bulletin of Symbolic Logic* 23 (1/2017) (DOI:10.1017/bsl.2016.34)

— "Strong Axioms of Infinity and the Search for V", in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Hyderabad, India 2010

— "The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal", in *De Gruyter Series in Logic and its Applications*, 2nd edition, De Gruyter, Berlin 1999

— "The Continuum Hypothesis", *Presentation at the University of Münster (WWU)*, June 20, Germany 2019

— "The Continuum Hypothesis Set Theory", *Presentation at the California Institute of Technology (Caltech)*, February 23, 2019

— "The Realm of the Infinite", in *Infinity. New Research Frontiers*, Cambridge University Press, Cambridge 2011

— "The Transfinite Universe", in *Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics. Horizons of Truth*, Cambridge University Press, Cambridge 2011

Filozofski vestnik | Volume XLI | Number 2 | 2020 | 397–409 | doi: 10.3986/fv.41.2.15

Fernando Zalamea*

An Elementary Peircean and Category-Theoretic Reading of *Being and Event*, *Logics of Worlds* and *The Immanence of Truths*

Badiou's *magnum opus*, i.e. his trilogy *Being and Event*[1], *Logics of Worlds*[2], and *The Immanence of Truths*[3], with all its dubious statements, deviations, and controversial formulas, but also with all its courage, finesse, and dedicated hard work, represents the *greatest effort by a philosopher in the last thirty years* to extensively confront the power of contemporary mathematical invention (e.g. forcing, toposes, and large cardinals). The enterprise has not passed unnoticed, but has mainly attracted the attention of some strong detractors, as well as a small community of worshippers. Both extremes are unjust as regards this amazing work that now spans three decades and which should be hailed as a unique contribution to knowledge, and we will try here to present a simple, hopefully balanced, view of the trilogy. In our reading, we will use the force of Peirce's logical architecture and of some high conceptual instances of Category Theory. In *Section 1*, we explore some basic methodological connections, from a very intuitive dialectical perspective between the three shutters of the trilogy. In *Section 2*, the dialectics are specified through Peirce's three phenomenological categories and some adjunctions in Category Theory. Finally, in *Section 3*, we present some open problems related to our simplified, elementary understanding of Badiou's work.

Some dialectical forces in the trilogy

The main polarities in the foundations of mathematics in the 20th century are Set Theory and Category Theory. On one hand, Set Theory proposes to understand a mathematical object (a "set") through its *analytical decomposition*: looking at the interior, the elements comprise a set. Some of the axioms of Set Theory are not simple, since they pretend to capture the structural evolution of

1 Alain Badiou, *L'Être et l'événement*, Seuil, Paris 1988, translated into English by Oliver Feltham: *Being and Event*, Continuum, London 2008.

2 Alain Badiou, *Logiques des mondes*, Seuil, Paris 2006, translated into English by Alberto Toscano: *Logics of Worlds*, Continuum, London 2009.

3 Alain Badiou, *L'Immanence des vérités*, Fayard, Paris 2018.

* Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia

infinities (e.g. the Replacement Axiom, the Foundation Axiom). The size of the continuum (represented in Set Theory as the set of real numbers) even goes beyond the usual axioms, as Cohen showed in 1963 with the invention of forcing. *Being and Event* explores the uses of Set Theory and forcing to propose a *static* ontology of mathematics, to be extended to general thought. On the other hand, Category Theory proposes to understand a mathematical object (e.g. "identity", "representable functor") through its *synthetic composition*: looking at the exterior, the ambient relations ("aura") comprise an identity. The axioms of Category Theory are trivial, but extremely powerful: from practically nothing, the theory captures the mathematical behaviour of apparently distant regions (logic, topology, algebra, arithmetic, differential geometry, etc.). Going further, Grothendieck's Topos Theory (1962) axiomatises many features of set universes inter-spread with geometrical objects. *Logics of Worlds* explores the applications of Category Theory and toposes to offer a *dynamic* ontology of mathematics, to be extended to general thought.

The *singular* of the first monograph contrasts with the *plural* of the second one: the Absolute searched for in *Being and Event* is contrasted with the Relative sought in *Logics of Worlds*. Going beyond the Relative, *The Immanence of Truths* comes back to the One, and deciphers some approximations of an Absolute Universal, through the many layers of large cardinals. Badiou's commitment is again unique: going painstakingly through the very technical contributions of Cantor, Cohen, Gödel, Jech, Jensen, Kanamori, Kunen, Mostowski, Ramsey, Scott, and Woodin, the many contrasting features of large cardinals are explained to the layman, often with a penetrating poetic language, and are related to politics, culture, and essentially to humanity at large. To be complete (but we will not, of course, require such a commitment from Badiou, who has already done more than enough for generations to come!), a fourth shutter (some sort of "*Universels relatifs*") of the *tetralogy* should study the universals inscribed in Topos Theory, i.e. classifier toposes and geometric logics.[4] In this way, two singulars (*L'Être, L'Immanence*) and two plurals (*Logiques*, *Universels*) would produce a beautiful counterpoint weaving of the contemporary mathematical foundations. This "fourth shutter" could also be extended to the promising new perspectives offered by Homotopy

4 See, for example, Olivia Caramello, *Theories, Sites, Toposes*, Oxford University Press, Oxford 2018.

Type Theory[5], where some strong connections between geometry and computation reveal a structural universality of which Badiou may be very fond.

Three fundamental ideas provide the backbone of *Cohen*'s forcing: (1C) at the *base*, the use of a *countable standard model* of the Zermelo-Fraenkel axioms for Set Theory; (2C) at the *approximation* level, the use of an *order* on which forcing conditions are inscribed; (3C) at the *ideal* level (or point at infinity), the construction of a *generic filter* that offers some completeness conditions to provide independence proofs. Many passages of *Being and Event* are related to situations (1C)-(3C)[6]:

> (1C)
> "[...] the demonstration that every truth is necessarily **infinite**" (p. 328).
> "*A* truth (if it exists) must be an **infinite** part of the situation, because for every finite part one can always say that it has *already* been discerned and classified by knowledge" (p. 333).
> "we shall install ourselves in a multiple which is fixed once and for all, a multiple which is very rich in properties (it 'reflects' a significant part of general ontology) yet very poor in quantity (it is **denumerable**)" (p. 356).
> "This multiple will be both the basic material for the construction of the indiscernible (whose elements will be extracted from it), and the place of its *intelligibility*" (p. 357).
>
> (2C)
> "the study of local or finite forms of a procedure of fidelity" (p. 327).
> "the *minimal* gesture of fidelity: the observation of a **connection** (or non-connection)" (p. 329).
> "A faithful procedure has as its infinite horizon being-in-truth" (p. 339).
> "Using a transparent algebra, we will note $x(+)$ the fact that the multiple x is recognized as being **connected** to the name of the event, and $x(-)$ that it is recognized as non-connected. [...] We will term *enquiry* any finite set of such minimal reports. [...] It is the enquiry which lies behind the *resemblance* of the procedure of fidelity *to a knowledge*" (pp. 330–331).

5 *Homotopy Type Theory*, Univalent Foundations Project, Princeton 2018.
6 The citation numbers refer to pages in the English translation: Alain Badiou, *Being and Event*. Emphases in bold in the quotes are mine.

"The concept of ***order*** is central here, because it permits us to distinguish multiples which are 'richer' in sense than others; even if, in terms of belonging, they are all elements of the supposed indiscernible" (p. 362).
"a condition is useless [...] if it does not tolerate any **aleatory** progress in the conditioning" (p. 364).
"**Order**, compatibility and choice must, in all cases, structure every set of conditions" (p. 364).

(3C)
"We find ourselves here at the threshold of a decisive advance, in which the concept of the **'generic'** [...] will be defined and articulated in such a manner that it will found the very being of any truth." (p. 327)
"We shall therefore say: *a truth is the infinite positive total — the gathering together of x(+)'s — of a procedure of fidelity which, for each and every determinant of the encyclopaedia, contains at least one enquiry which avoids it*.
Such a procedure will be said to be ***generic***" (p. 338).
"The **generic** is the being-multiple of a truth" (p. 338).
"Thus, any veracity in the extension will allow itself to be *conditioned* in the situation. [...] an inhabitant is in the position of a subject of truth: she **forces** veracity at the point of the indiscernible" (p. 411).

The *use of genericity for philosophy and culture, outside its original technical environment, is one of the greatest contributions of Badiou's trilogy*. In fact, generic processes (love, art, science, politics), offer a complete passage of the categories of Being (multiple, void, nature, infinity) and Event (ultra-one, intervention, fidelity).

On the other hand, one can also find three fundamental concepts in Grothendieck's toposes: (1G) at the *base*, the *Grothendieck topology J* in an adequate category *C* and its associated *site (C,J)*; (2G) at the *approximation* level, a collection of *sheaves* with its gluing properties; (3G) at the *ideal* level (or point at infinity), the emerging *complete structure of the topos* with its limits, exponentials, and classifier object. Many passages of *Logics of Worlds* are related to situations (1G)-(3G)[7]:

7 The citation numbers refer to pages in the English translation: Alain Badiou, *Logics of Worlds*.

(1G)
"What we are attempting here is a *calculated phenomenology*. [...] Hence a style of formalization that is both more geometrical and more calculating, at the boundary between a **topology** of localizations and an algebra of forms of order" (pp. 38–39).
"The axiomatic deployment of what a place (or a power of localization) is consists in finding the
principles of interiority" (p. 411).
"a **site** is a multiple which happens to behave in the world in the same way with regard to itself as it does with regard to its elements, so that it is the ontological support of its own appearance" (p. 363).
"Logic of the site" and the four forms of change (pp. 369–380).

(2G)
"it is possible to take even further the thinking of the logico-ontological, of the chiasmus between the mathematics of being and the logic of appearing. But one then needs to equip oneself with a more topological intuition and to treat the degrees of the transcendental as operators of the localization of multiple-beings. [...] To use the technical language of contemporary mathematics, this correlation is a ***sheaf***" (p. 197).
"the logical identity of appearing is elucidated particularly well by the theory of complete Heyting algebras" (p. 389).
"The subjectivation of the new body will acquire the creative form of a constant broadening of structural correlations, of the 'visibility' of one structure in another. In particular, 'reading' algebraic structures in topological structures will become the key to contemporary mathematics. With the concept of **sheaf**, which synthesizes this type of correlation and serves as its general organ, there undoubtedly begins the history of a new body, for which Grothendieck arguably played around 1950 the same role that Galois played around 1830" (p. 475).
"(...) let's hold on to the notion, which we have seen at work in both mathematics and poetry, that the sequence world—points—site—body—efficacious part–organ is indeed the generic form of what makes it possible for there to be such things as truths. This authorizes the materialist dialectic to contend that beyond bodies and languages, there is the real life of some subjects" (p. 475).

(3G)
"the idea which has received the name of '**Grothendieck topos**' and the related idea of a sheaf shine in the sky of pure thought" (p. 540).

> "The mathematics of appearing consists in detecting, beneath the qualitative disorder of worlds, the logic that holds together the differences of existence and intensity" (p. 39).
> "The infinite of worlds is what saves us from every finite disgrace. [...] We overcome all this when we seize hold of the discontinuous variety of worlds and the interlacing of objects under the constantly variable regimes of their appearances" (p. 514).

Here, the *use of a materialist dialectics* provides a crossing of the diverse logics of the world, where a "universality of truths" emerges beyond individuals and communities (pp. 5–6).

Finally, three other main ideas govern the behaviour of *large cardinals*: (1L) the back-and-forth between *absoluteness* and *localisations*; (2L) the back-and-forth between *genericity* (ultrapower) and *existence* (power); (3L) the back-and-forth between "*A-subjectivity*" (the index of absoluteness) and *subjectivity* (art, science, love, politics: "works of Truth"). Many passages of *The Immanence of Truths* are now related to situations (1L)-(3L)[8]:

> (1L)
> "**Absolute** place V" (p. 61).
> negative access to the **inaccessible** (p. 303).
> going beyond the generic (p. 275).
> elementary embedding (p. 296).
> "point at infinity" (p. 109).
>
> (2L)
> **genericity** = ultrapower (p. 423).
> "transgressions" (p. 307).
> "maximalizations" (p. 339).
> "partitions" (p. 318).
> filtering (p. 335).

[8] The citation numbers (for both quotes and glosses) refer to pages in Alain Badiou, *L'Immanence des vérités*.

(3L)
A-subjective = index of absoluteness (p. 514).
art: power of form (p. 544).
"science: the power of the letter" (p. 579).
"love: the stage of the Two" (p. 611).
politics: the stage of the Others (p. 639).

Here, by the multiplication and ultralimitation procedures of large cardinals, we can see how the *singular*, set-theoretic, category of Truth present in *Being and Event*, is extended to the *plural*, but again set-theoretic, categories of Truth present in *The Immanence of Truths*. The capital, singular, letter in the term "Immanence", pointing to the Absolute (the global contradiction 0=1), enters in counterpoint with the lower case, plural, letter in "*vérités*" (the local realisations at each large cardinal layer). The dialectics of the One and the Many, the contradiction and the models, the forms of incompleteness and completeness, are very nicely explored by Badiou, in order to *glue* the complexity of mathematics with the complexity of Life and the World. In fact, one can sense that, beyond the *set-theoretic* intrinsic and natural flavour of large cardinals, a *sheaf-theoretic* reading is also implicit, first, along *cuts and gluings*, following increasingly high consistency results (from inaccessibles to superhuges, through Jónsson, Rowbottom, Ramsey, Woodin, Vopenka, "from the top to the bottom (...) something descriptive and baroque" (p. 281), and second, along the *fibres of a universal sheaf*, where each large cardinal may be seen as a *localisation* of the Absolute, and each family of large cardinals can be understood through an *ultrapower* of the Absolute.

An elementary Peircean and category-theoretic reading of the trilogy

When faced with contemporary thought, we cannot escape a certain *transitory ontology*[9] that at first, terminologically speaking, seems self-contradictory. Nevertheless, although the Greek *ontotetês* sends us, through Latin translations, to a supposedly atemporal "entity" or to an "essence" that ontology would study, there is no reason, besides tradition, to believe that those entities or essences should be absolute (in a set-theoretic sense, as in *Being and Event*) and

9 Alain Badiou, *Briefings on Existence. A Short Treatise on Transitory Ontology*, trans. Norman Madarasz, SUNY, Albany 2006.

not *asymptotic, governed by partial gluings in a correlative evolution* between the World and knowledge (in a category-theoretic sense, as in *Logiques des mondes*). Going beyond the dichotomy, *bimodality*, in the sense of Jean Petitot[10], that is, a dynamic (topological) movement in both physical and morphological-structural space, is related to such a state of things, where "things" have to be replaced in fact by "processes". Both prefixes (TRANS-, BI-) offer a suitable ground to understand the wanderings of contemporary thought.

Peirce had already imagined (or discovered, according to our variable ontological commitment) a wonderful phenomenological tool (Peirce 1886) that helps to unravel the *multilayered geometry* of the (TRANS-, BI-) situation[11]. Phaneroscopy, or the study of the *phaneron*, i.e. the complete collective spectrum present to the mind, includes the doctrine of Peirce's cenopythagorean categories (with "ceno-" coming from the Greek *kaíno*, "fresh"), which observe the universal modes (or "tints") occurring in phenomena. Peirce's three categories are vague, general, and indeterminate, and can be found *simultaneously* in every phenomenon. They are interlaced in several levels, but can be *prescised* (distinguished, separated, detached) following recursive layers of interpretations, in progressively increasingly determined contexts. A dialectics between the One and the Many, the universal and the particular, the continuous and the discrete, the general and the concrete, is *multilayered* along a dense variety of theoretical and experimental fibres.[12]

Peirce's *Firstness* detects the immediate, the spontaneous, whatever is independent of any conception or reference to something else. *Secondness* is the category of facts, mutual opposition, existence, actuality, material fight, action and reaction in a given world. *Thirdness* proposes a mediation beyond clashes, a third place where the "one" and the "other" enter into a dialogue, the category of sense, representation, synthesis. As Peirce reckons:

> By the Third, I understand the medium which has its being or peculiarity in connecting the more absolute first and second. The end is second, the means third.

10 Jean Petitot, *Per un nuovo illuminismo*, Bompiani, Milano 2009.

11 Charles Sanders Peirce, "One, Two, Three: An Evolutionist Speculation", in *Writings*, Indiana University Press, Vol. 5, pp. 300–301.

12 For a mathematical introduction to Peirce's architecture, see Fernando Zalamea, *Peirce's Logic of Continuity*, Docent Press, Boston 2012.

> A fork in the road is third, it supposes three ways. (...) The first and second are hard, absolute, and discrete, like yes and no; the perfect third is plastic, relative, and continuous. Every process, and whatever is continuous, involves thirdness. (...) Action is second, but conduct third. Law as an active force is second, but order and legislation third. Sympathy, flesh and blood, that by which I feel my neighbor's feelings, contains thirdness. Every kind of sign, representative, or deputy, everything which for any purpose stands instead of something else, whatever is helpful, or mediates between a man and his wish, is a Third.[13]

Peirce's vague categories can be "tinctured" with key-words: (1) *Firstness*: immediacy, first impression, freshness, sensation, unary predicate, monad, chance, possibility; (2) *Secondness*: action-reaction, effect, resistance, binary relation, dyad, fact, actuality; (3) *Thirdness*: mediation, order, law, continuity, knowledge, ternary relation, triad, generality, necessity. The three Peircean categories interweave recursively and produce a *nested hierarchy* of interpretative modulations. Dynamic cognition yields progressive *precision* through progressive *prescision*. Both surgery and gluing form part of a *ubiquitous topology* of comprehension. Intelligence grows with the definition of ever more contexts of interpretation, and the association of finer and finer cenopythagorean tinctures inside each context.

On the other hand, Category Theory offers a multitude of tools to understand the (TRANS-, BI-) imperative. The mathematical theory of categories axiomatises *areas* of mathematical practice, in accordance with the *structural* similarities of the objects in question and with the modes of *transmission* of information between these objects (here, categories are close to methodological and philosophical approximations, sensitive to problems of *transference*, as in the case of Peircean pragmaticism). As opposed to set theory, where objects are analysed internally as aggregates of elements, the mathematical theory of categories studies objects by way of their *external synthetic* behaviour, due to the *relations* of the object with its environment. The objects are like *black boxes*, which cannot be analysed and broken into smaller interior sub-boxes, and which can be understood only by way of their *actions and reactions* with the surrounding medium. The modes of knowledge are then essentially relational: the ways in

13 Peirce, "One, Two, Three: An Evolutionist Speculation", p. 300.

which the information transmitters behave in the environment constitute the mathematical weaving in which thought grows.
A morphism is *universal* with respect to a given property if its behaviour with respect to similar morphisms in the category possesses certain uniquely identifying characteristics which distinguish it within the categorical framework. The basic notions of Category Theory related to universality – those of *free object* and *adjointness* – respond to deep problems related to the search for relative archetypes and relative dialectics. In fact, after Gödel, the turn in mathematics toward problems of *relative consistency* (thus, overcoming chimerical longings for absolute foundations) resulted in an explosion of diversity and differentiation in axiomatic mathematical theories, beyond a certain threshold of complexity. Within the resulting multiplicity, in the broad, variable spectrum of the areas of mathematics, Category Theory managed to find some *patterns of universality* which facilitated processes of local unfolding and also the transcendence of concrete particulars. For instance, in a category, a free object is able to *project* itself into any object *whatsoever* taken from a sufficiently wide subclass of the category: it is thus a sort of primordial sign, embodied in all related contexts of interpretation. Hence, *relative universals* arise beyond relative localisations; these have given a new technical impetus to the classical notions of universality. Although it is no longer possible to presume that we are in a supposed absolute, nor to believe in uniform, stable concepts regarding space and time, Category Theory has reshaped the notion of universality, making it suitable for a series of relative transferences of the universal/free/generic, in which *transition* is allowed, and in which at the same time it is possible to find remarkable *invariants* beyond it.[14]

Thus, Category Theory explores the structure of certain *generals* in a way similar to that of Peirce's late scholastic realism. Indeed, categorical thinking contemplates a dialectics between universal definitions in abstract categories (generic morphisms) and realisations of those universal definitions in concrete categories (structured set classes); moreover, within abstract categories, there may perfectly well be morphisms that are *real universals*, while at the same

14 For elaborations of these remarks, see Fernando Zalamea, "A Category-Theoretic Reading of Peirce's System: Pragmaticism, Continuity, and the Existential Graphs", in *New Essays on Peirce's Mathematical Philosophy*, ed. Matthew Moore, Open Court, Chicago 2010, pp. 203–233.

time, not being existent (that is to say, they are not embodied in concrete categories: think, for example, about an initial object, readily definable in abstract categories, but which is not realised in the category of infinite sets, in which initial objects do not exist). In the range of pure possibilities, the pragmatistic maxim has to deal with the idea of universal concepts, logically correct, but which could possibly not turn out to be embodied in bounded contexts of existence (such as, in the case of the three Peircean categories: real universals that may not always adequately be realised in concrete existents within the bounded contexts). The mathematical theory of categories illuminates this kind of situation with a high degree of precision. Category Theory has actually managed to effect the technical construction of a variety of entities, seemingly as elusive as those real universals with no existence, thanks to a very interesting dialectical process between the domains of actual mathematical practice (computational, algebraic, or differential structures, for example) and the possibility of abstract, universal definitions, still not realised in that practice. For instance, following current tendencies in universal algebra and Abstract Model theory [Category Theory has been able to define truly general notions of logic and of *relative truth universals*, as suitable invariants of given classes of logics.

Using Peirce's Triadicity and Category Theory, Badiou's trilogy *Being and Event* (BB), *Logics of Worlds* (LW), and *The Immanence of Truths* (IT), acquire a simple geometrical structure (see *Figure 1*):

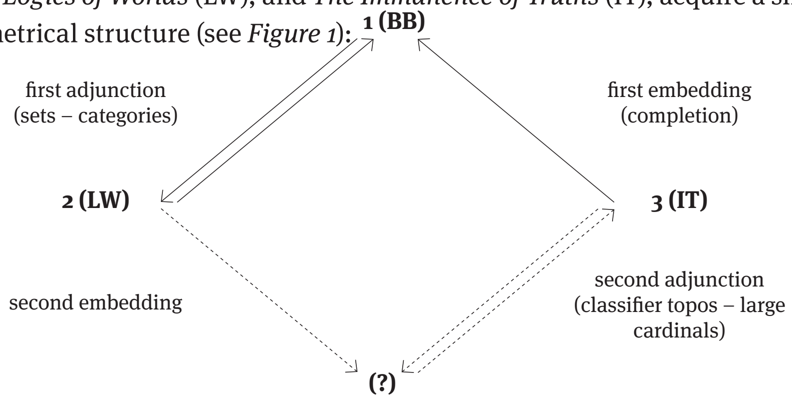


Figure 1: A triadic, category-theoretic reading of Badiou's trilogy

As a (Peircean) *First*, (BB) proposes a monadic, fresh, intuitive entrance to infinity and the Absolute. As a *Second*, (LW) acts and reacts against the first naive approximation, and multiplies the range of the World. As a *Third*, (IT) mediates between the Absolute (inconsistency 0=1) and the Relative (large cardinals consistency layers). Beyond that, since (IT) can be seen as a completion of (BB), one would expect that a fourth shutter of an extended tetralogy would act as a completion for (LW). The dialectical forces at stake now become pretty clear: on one hand, *both sets and categories* become fundamental for a thorough understanding of the polarities One-Many, Absolute-Relative, and *both of their projections* on culture ("works of Truth") enrich the transits of reason and heart; on the other hand, the search for a *multilayered geometry* of knowledge is embodied in triadic ramifications, iterations, embeddings, projections, and adjunctions.

Some open problems

Badiou's work is full of questions and suggestions; perhaps what one may appreciate the most in a philosophical reflection. The *density* of the concepts studied, and the corresponding *richness* of the perspectives, allow many wanderings. Below we summarise five of those queries:

> *(i)* The study of the *pendulum sets – categories*, along many of the perspectives presented in the Prague Conference (2018): philosophical openness (Alunni), dualities and dialectics (Guitart), universe *L* (Berankova), inconsistent multiplicities (Tho), multiverses (Hussey), bordering metaontology (Baki), historical relativity (Barbin), locality and genericity (Cartier), combinatorial time flow (Sumic), Riemann multiplicities (Rabouin), subtraction gestures (Hauser), the logic of True Life (Nesbitt), textual mathematical operations (Bolz), *via negativa* (Feltham), configuration excesses (Madarasz), etc.
>
> *(ii)* The construction of a general mediation between Set Theory (analytics) and Category Theory (synthetics), along a third foundational perspective ("horotics"), with *axioms for a theory of frontiers and limits*, capturing what is common to neighbourhood coverings (analytics) and Grothendieck topologies (synthetics).
>
> *(iii)* The category-theoretic completion of *Logics of Worlds*, in correlation with the set-theoretic completion of *Being and Event* provided by *The Immanence of Truths*, and the study of the many geometrical features of the situation (*Figure 1* above).

(iv) A comparison of Badiou's *Absolute* in *The Immanence of Truths*, with Florensky's *Antinomy* as the true foundation of mathematics[15]: the *back-and-forth between contradiction and consistency* provides a complex and dense multilayered understanding of mathematics, and its projections onto the World.

(v) A comparison of Badiou's poetical understanding of the infinite with Borges's many renderings in *El Aleph* (1949): transcendence, resistance to any division, the power of internal determinations, the intimate relation to the Absolute.[16]

The development of some of these threads would enhance our understanding of mathematics, the philosophy of mathematics, general philosophy, and cultural studies at large. Our community should be sincerely grateful to Alain Badiou for opening up such possibilities.

References

Badiou, Alain, *L'Être et l'événement*, Seuil, Paris 1988
— *Court traité d'ontologie transitoire*, Seuil, Paris 1998
— *Logiques de mondes*, Seuil, Paris 2006
— *L'Immanence des vérités*, Seuil, Paris 2018
Caramello, Olivia, *Theories, Sites, Toposes*, Oxford University Press, Oxford 2018
Florensky, Pavel, *The Pillard and Ground of the Truth*, Princeton University Press, Princeton 2004
HoTT, Various Authors, *Homotopy Type Theory*, Univalent Foundations Project, Princeton 2018
Peirce, Charles Sanders, "One, Two, Three: an evolutionist speculation [1886]", in *Writings: A Chronological Edition, vol.* 5., 300–301, Indiana University Press, Bloomington 1993
Petitot, Jean, *Per un nuovo illuminismo*, Bompiani, Milano 2009
Zalamea, Fernando, "A Category-Theoretic Reading of Peirce's System: Pragmaticism, Continuity, and the Existential Graphs", in *New Essays on Peirce's Mathematical Philosophy*, ed. Matthew Moore, 203–233, Open Court, Chicago 2010
— *Peirce's Logic of Continuity*, Docent Press, Boston 2012

[15] Pavel Florensky, *The Pillard and Ground of the Truth*, Princeton University Press, Princeton 2004.

[16] Badiou, *L'Immanence des vérités*, pp. 282–284.

Notes on Contributors

Alunni, Charles founded and directed (for twenty-five years) the research centre "*Laboratoire disciplinaire – Pensée des sciences*" at the *École Normale Supérieure* in Paris. For more than forty years he taught at the *Scuola normale superiori di Pisa*. He was a visiting professor (*Gastdozent*) at the Ruhr University in Bochum. He studied with Jacques Derrida and Eugenio Garin in Paris and Pisa, respectively. He has translated many Italian philosophers and legal theorists into French. Recently, he founded the book series "*Pensée des sciences*", published by the Hermann publishing house, of which he currently serves as the director. His recent publications include *Spectres de Bachelard. Gaston Bachelard et l'école surrationaliste* (Paris, Hermann, 2018).

Badiou, Alain is a French philosopher and playwright. He is a professor emeritus and former chair of the Department of Philosophy of the *École Normale Supérieure* in Paris and one of the founding members of the Faculty of Philosophy of the *Université Paris VIII*. His major works include the three volumes *Being and Event*, *Logics of Worlds*, and the recently published *The Immanence of Truths*. His philosophical oeuvre connects continental and analytical philosophical traditions along with his reflections on set theory and contemporary mathematics.

Berankova Ndiaye, Jana is a PhD candidate at Columbia University's Graduate School of Architecture, Planning and Preservation (GSAPP) and a former student of École Normale Supérieure in Paris and École des Hautes Études en Sciences Sociales. Her research interests include the links between continental philosophy and architecture theory, social movements of 1968, and Central European architecture. She is the co-editor of *Alain Badiou: Sometimes, We Are Eternal* (2019) and *Revolutions for the Future: May '68 and the Prague Spring*. She is the founder of the publishing house Suture Press (www.suture-press.com) and member of the Prague Axiomatic Circle.

Bolz, Roland is a PhD candidate at Humboldt University of Berlin. He is currently preparing his thesis on the role of analogy-making and metaphor in philosophical theories of concepts. Some of his other research interests include political philosophy, aesthetics, philosophy of language, and humour theory.

Feltham, Oliver teaches philosophy at the American University of Paris. He works in the area of modern political philosophy, critical theory and psychoanalysis. He translated Alain Badiou's *Being and Event* for Continuum Books in 2005, wrote a monograph on Badiou, and more recently *Anatomy of Failure: Philosophy and Political Action* with

Bloomsbury in 2013 and *Destroy and Liberate: Political Action on the basis of David Hume* with Rowman and Littlefield International in 2019. He has recently completed a full-length play Twig.

Guitart, René born in 1947 in Paris, taught mathematics at the Université de Picardie, from 1968 to 1970, then at the University Paris 7 Denis Diderot from 1970 to 2012. He also worked at Essilor Company between 1985 and 1992, manufacturing progressive lenses with spline functions. He was programme director at Ciph (Collège International de Philosophie) from 1990 to 1996, leading a seminar on category theory, psychoanalysis and philosophy. His research in mathematics has mainly focused on category and structure theory, theory of theories, logic, and homological algebra, fields in which he proposed, in particular, algebraic universes, the locally free diagram theorem, Borromean logic, and exact squares. His other contributions are in the history of science of the 19th century, especially regarding physics and geometry (with Monge, Lamé, Poincaré), in epistemology and questions of teaching, in philosophy on Nietzsche, and Bachelard, and in psychoanalysis concerning Lacan's work. His articles (about 130) are available on his personal website. Amongst "the latest, the following should be mentioned: "Bachelard et la pulsation mathématique", *Revue de synthèse*, t.136, 6th series, Nos 1-2, 2015, "Note sur deux problèmes", *Revue de synth.se*, t.136, 6th series, no. 1-2, 2015, "Nietzsche face à l'expérience mathématique", in E. Barbin and J.P. Cléro (eds.), *Les mathématiques et l'expérience : ce qu'en ont dit les philosophes et les mathématiciens*, Hermann, Paris, 2015. He has also published two books: *La pulsation mathématique (rigueur et ambiguïté, la nature de l'activité mathématique, ce qu'il faut enseigner)*, L'Harmattan, Paris, 1999, and *Evidence et étrangeté (Mathématiques, psychanalyse, Descartes et Freud)*, PUF, Paris, 2000.

Hauser, Michael is a researcher at the Philosophical Institute of the Czech Academy of Sciences and professor at the Faculty of Pedagogy of Charles University. He is the founder of the civic association *Socialist Circle* (SOK), which develops socially critical thinking. He is the author of *Cesty z Postmodernismu* (2012), *Prolegomena k filosofii současnosti* (2008), and *Adorno: modernita a negativita* (2005). He has also published a book of interviews with Slavoj Žižek, *Humanismus nestačí* (2008).

Hussey, M. Norma, PhD. I have published a number of scientific papers (in optical fiber device research), and worked in the telecommunications industry and in telecommunications regulation. Giving myself the term 'lay-person' here – since I'm neither a philosopher nor a mathematician and (currently) not affiliated with a university/institution – I've been inspired by the philosophy of Alain Badiou since my first encounter (2000) with his works; *Being and Event* in particular, and the Infinity Lectures which he delivered at the European Graduate School in 2011. I have since attended graduate workshops with Badiou, given a short presentation at the conference *Thinking the Infinite*, and co-edited *Sometimes, We Are Eternal* with Jana Ndiaye Berankova.

Madarasz, Norman is the author of four books, among which, *O Realismo Estruturalista: sobre o intrínseco, o imanente e o inato* (Editora Fi, 2016). He is also co-editor of six collected volumes as well as translator/editor of three books by Alain Badiou. As Research Professor in the Graduate Programs of Philosophy and of Literature and Linguistics at the Pontifical Catholic University of Rio Grande do Sul State (PUC-RS) in Porto Alegre, Brazil, he lectures on and conducts research in the area of contemporary French philosophy (ontology, structuralism, biolinguistics and political philosophy), contemporary French and North American literature and Gender Studies. He is also contributing editor of the periodical, *Veritas*, having edited five supplements on ontology and continental philosophy of science.

Nesbitt, Nick is a Professor at Princeton University. He is the author most recently of *Caribbean Critique: Caribbean Critical Theory from Toussaint* (Liverpool, 2013) and editor of *The Concept in Crisis: Reading Capital Today* (Duke, 2017). His next book project is entitled *Slavery, Capitalism, and Social Form: From Marx to Caribbean Critique*, forthcoming fall 2021 (U Virginia Press).

Rabouin, David is a Senior Research Fellow (Directeur de Recherche) at the French National Centre for Scientific Research (CNRS), in the research group SPHERE (UMR 7219, CNRS – Université de Paris). His main interest is in the history of philosophy and mathematics in early Modern Times, with special focus on Descartes and Leibniz. He is the author of *Mathesis universalis. L'idée de « mathématique universelle » d'Aristote à Descartes*, Paris, P.U.F., coll. « Épiméthée », 2009 and, in collaboration with the 'Mathesis' Group, of *Leibniz. Ecrits sur la mathématique universelle*, Paris, Vrin, 2018. With K. Chemla and R. Chorlay, he co-edited the *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences* (Oxford University Press, 2017). He also has a strong interest in Contemporary French Philosophy and has edited (with Oliver Feltham and Lissa Lincoln) : *Autour de « Logiques des Mondes »*, Editions des Archives contemporaines, Paris 2011. His latest publication, co-edited with Emmylou Haffner, is : *L'épistémologie du dedans. Mélanges en l'honneur d'Hourya Benis-Sinaceur*, Garnier, Paris 2021.

Ruda, Frank is Senior Lecturer in Philosophy at the University of Dundee. His book publications include *For Badiou: Idealism without Idealism*. Northwestern University Press, Evanston 2015; *Abolishing Freedom: A Plea For a Contemporary Use of Fatalism*. University of Nebraska Press, Lincoln 2016 and *The Dash – The Other Side of Absolute Knowing* (with Rebecca Comay). MIT Press, Cambridge 2018.

Šumič Riha, Jelica is Professor of Philosophy at the Postgraduate School of Research Centre of the Slovenian Academy of Sciences and Arts and Senior Research Fellow at the Institute of Philosophy, Research Centre of the Slovenian Academy of Sciences and Arts. She was visiting professor at the University of Essex, University Paris 8, Universidad de Buenos Aires and University of São Paulo. In 2000-2002 she conducted a seminar "Le pour tous face au réel" at the Collège international de philosophie in Paris (together with Rado Riha). She has published a number of philosophical works, including *Politik der Wahrheit* (with Alain Badiou, Jacques Rancière and Rado Riha), Turia+Kant, Vienna 1997, *Universel, Singulier, Sujet* (with Alain Badiou et al), Kimé, Paris 2000; *Mutations of Ethics* (Založba ZRC, 2002); *Večnost in spreminjanje. Filozofija v brezsvetnem času* (Eternity and Change. Philosophy in the Worldless Time, Založba ZRC, Ljubljana 2012; *A polítíca e a psicanálise: do nao-todo ao para todos*, Lume editor, São Paulo 2019. Currently she is working on a forthcoming volume entitled *Volonté et Désir* (Harmattan).

Tho, Tzuchien is a philosopher and historian of science. He is currently lecturer at the University of Bristol. Previously, he has been affiliated with the Jan van Eyck Academie in Maastricht (NL), the École Normale Supérieure in Paris (Rue D'Ulm), the Max Planck Institute for the History of Science (Berlin), Berlin-Brandenburg Academy of Sciences, the Institute for Research in the Humanities (University of Bucharest) and the University of Milan. He is currently working on a research project on causality in 18th century physics, focusing on the development of analytical mechanics. He is also currently working on issues related to Badiou's mathematical ontology, the philosophy of algebra, Leibniz reception in the 20th century, and the critique of contextualism as historical methodology.

Zalamea, Fernando (Bogotá, 1959) is Professor of Mathematics at Universidad Nacional de Colombia. After his Ph.D. in category theory and recursion theory (University of Massachusetts, 1990, under Ernest Manes), Zalamea has been working in alternative logics, Peirce and Lautman studies, and the philosophy of modern (1830-1950) and contemporary mathematics (1950-today). His recent *Grothendieck. Una guía a la obra matemática y filosófica* (2019) is the first complete guide to Grothendieck's work. A prolific essayist, he is the author of twenty books around cultural studies, philosophy, and mathematics. His book *Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics* (Bogotá 2008, translated into English 2012 and French 2018) seems to have had some impact. Zalamea has obtained some of the most prestigious essay awards in the Hispanic world: Siglo XXI (Mexico 2012), Jovellanos (Spain 2004), Gil-Albert (Spain 2004), Kostakowsky (Mexico 2001), Andrés Bello (Colombia 2000). He has been included as one of *100 Global Minds. The Most Daring Cross-Disciplinary Thinkers in the World* (Roads 2015). Web: https://unal.academia.edu/FernandoZalamea. Mail: fernandozalamea@gmail.com

Povzetki | Abstracts

Alain Badiou

Ontology and Mathematics: Set Theory, Category Theory, and the Theory of Infinites in *Being and Event*, *Logics of Worlds* and *The Immanence of Truths*

Key words: mathematics and philosophy, ontology, set theory, category theory, large cardinals, the absolute, Badiou

This paper examines the relationship between philosophy and its conditions. The affirmation "mathematics is ontology", which I posited thirty years ago, has certain inconveniences. In this article, I present six varying possibilities for ontology. My own philosophical decision was to proclaim that being is a pure multiplicity, without the One and without any specific attribute such as "matter" or "spirit". This movement of thought brought me to study the mathematical condition of philosophy and to search for a rigorous structuration of my speculative decision within the field of mathematics. However, my initial postulate that "Being is the multiplicity without the One" is not a mathematical but a philosophical statement. This paper concludes with a presentation of the relationship between mathematics and philosophy in *Being and Event*, *Logics of Worlds*, and *The Immanence of Truths*.

Alain Badiou

Ontologija in matematika: teorija množic, teorija kategorij in teorija neskončnosti v *Biti in dogodku*, *Logikah svetov* in *Imanenci resnic*

Ključne besede: matematika in filozofija, ontologija, teorija množic, teorija kategorij, veliki kardinali, absolut, Badiou

Pričujoči prispevek preiskuje razmerje med filozofijo in njenimi pogoji. Trditev: »Matematika je ontologija,« ki sem jo postavil pred tridesetimi leti, je trčila na nekaj težav. V prispevku predstavim šest možnosti za ontologijo. Moja lastna filozofska odločitev je bila razglasiti bit kot čisto mnoštvenost brez Enega in brez posebnega atributa, kakršna sta »materija« ali »duh«. Ta miselna pot me je napeljala na preučevanje matematičnega pogoja filozofije in raziskovanje strukturacij za mojo spekulativno odločitev znotraj polja matematike. Vendar pa moj začetni postulat: »Bit je mnoštvo brez Enega«, ni matematična trdetev, temveč filozofska. Pričujoči članek sklenem s predstavivijo razmerja med matematiko in filozofijo v *Biti in dogodku, Logikah svetov* in *Imanenci resnic*.

Oliver Feltham
“One or Many Ontologies? Badiou’s Arguments for His Theisis ‘Mathematics is Ontology’.”

Key words: ontology, meta-ontology, argument from the conditions, argument from philosophy, modelling, schematism

This article explores rival interpretations of Badiou’s strategy behind the claim ‘mathematics is ontology’, from his construction of an alternative history of being to that of Heidegger to his exposure of the radical contingency of the ‘decisions on being’ carried out by transformative practices in the four conditions of philosophy: art, politics, love and science. The goal of this exploration is to open up the possibility of another strategy that responds to Badiou’s initial intuition – that being is multiple – by embracing the writing of multiple ontologies in the sphere of action.

Oliver Feltham
»Ena ali mnoge ontolgije? Badioujevi argumenti za njegovo tezo ‘Matematika je ontolgija’.«

Ključne besede: ontologija, meta-ontologija, argument, izpeljan iz pogojev, argument, izpeljan iz filozofije, modeliranje, shematizem

Pričujoči članek raziskuje med sabo tekmujoče interpretacije Badioujeve strategije, kot jo lahko razberemo iz trditve, »matematika je ontologija«, pri čemer se opira na njegovo konstrukcijo alternative Heideggerjevi zgodovini biti kot tudi na razkritje radikalne kontingentnosti »odločitev glede biti«, kot jih je mogoče zaznati v transformacijskih praksah v štirih pogojih filozofije: umetnosti, politiki, ljubezni in znanosti. Namen te preiskave je odpreti možnosti za drugačno strategijo, ki ustreza Badioujevi izvorni intuiciji, da je namreč bit mnoštvo, in sicer tako, da prenesemo pisanje mnoštva ontologij na področje delovanja.

Nick Nesbitt
Bolzano’s Badiou

Key words: Bolzano, Badiou, theory of science, demonstration, *Being and Event*

This article raises a series of points of confluence between Badiou’s philosophy and that of Bernard Bolzano, whom Badiou has identified as a historical predecessor but never directly engaged. These points include their respective critiques of Kant and Hegel, as well as their various concepts of sets, platonist realism, axiomatisation, the infinite, adequate demonstration, structure, and mathematics as the adequate language of being.

Nick Nesbitt
Bolzanov Badiou
Ključne besede: Bolzano, Badiou, teorija znanosti, dokaz, *Bit in dogodek*

Pričujoči članek zariše vrsto stičnih točk med Badioujevo filozofijo in filozofijo Bernarda Bolzana, ki ga je Badiou prepoznal kot zgodovinskega predhodnika, vendar se z njim nikoli ni neposredno ukvarjal. Te stične točke vključujejo njuni kritiki Kanta in Hegla kot tudi njuni razlčini pojmovanji množice, platnoističnega realizma, aksiomatizacije, neskončnega, adekvatnega dokaza, strukture in matematike kot ustreznega jezika biti.

Jelica Šumič Riha
The Place of Mathematics: Badiou with Lacan
Key words: mathematics, philosophy, psychoanalysis, the real, formalisation, Cantor, Lacan, Badiou

The paper attempts to give an account of two different ways of relating to mathematics: Lacan's and Badiou's. Its starting point is Badiou's and Lacan's interpretations of Russell's infamous definition of mathematics, according to which mathematics is a discourse in which no one knows what one is talking about, nor whether what one is saying is true. While for Badiou, the ignorance that is supposed to characterise mathematics according to Russell only concerns the role philosophy assigns to it, namely, it being identified with the science of being qua being, for Lacan the ignorance constitutive of mathematics should rather be seen as a symptom resulting from the reduction of truth to a mere truth value. In discussing the detected divergences in these two readings, the paper shows how the access to psychoanalysis as well as the access to philosophy coincides with a certain access to mathematics, although we are not dealing with the same type of access.

Jelica Šumič Riha
Mesto matematike: Badiou z Lacanom
Ključne besede: matematika, filozofija, psihoanaliza, realno, formalizacija, Badiou, Cantor, Lacan

Namen pričujočega prispevka je pojasniti dva načina navezovanja na matematiko: Lacanov in Badioujev. Avtorica prispevka pri tem izhaja iz Badioujeve in Lacanove interpretacije slovite Russellove definicije matematike, po kateri naj bi bila matematika diskurz, pri katerem nihče ne ve, o čem govori, niti ali je to, kar govori, resnično. Medtem ko za Badiouja ta nevednost, ki naj bi bila značilna za matematiko, kot jo razume Russell, zadeva zgolj vlogo, ki jo filozofija pripisuje matematiki, da je namreč znanost o biti kot biti, pa Lacan nevednost, ki naj bi bila konstitutivna a matematiko, pojasnjuje kot simptom,

ki izvira iz statusa resnice v matematiki, tj. njene redukcije na resničnostno vrednost. Pri pojasnjevanju ugotovljenih divergenc med Badioujevim in Lacanovim razumevanjem matematike članek izhaja iz teze, da vstop v psihoanalizo tako kot tudi vstop v filozofijo sovpada z vstopom v matematiko, a hkrati vztraja, da ne gre za isto modaliteto vstopa v matematiko.

Michael Hauser

Badiou and the Ontological Limits of Mathematics

Key words: metaontology, the real, ontology, Badiou, Easton's theorem

I propose to depict the relationship between Badiou's philosophy and mathematics as a three-layered model. Philosophy as metaontology creates a metastructure, mathematics as ontology in the form of a condition of philosophy constitutes its situation, and mathematics as a multiple universe of all given axioms, theorems, techniques, interpretations, and systems (set theory, category theory, etc.) is an inconsistent multiplicity. So, we can interpret the relationship between philosophy and mathematics as the one between a metastructure and a situation. By using Easton's theorem, we come to realise that philosophical concepts in the metastructure "quantitatively" exceed the elements that belong to mathematics as ontology. Therefore, philosophy as metaontology shows the limits of mathematics as ontology.

Michael Hauser

Badiou in ontološke meje matematike

Ključne besede: metaontologija, realno, ontologija, Badiou, Eastonov teorem

Avtor obravnava razmerje med Badioujevo filozofijo in matematiko kot trostopenjski model. Filozofija kot metaontologija ustvari metastrukturo, matematika kot ontologija v vlogi pogoja filozofije pa ustvari njeno situacijo, matematika kot mnoštveni univerzum vseh danih aksiomov, teoremov, tehnik, interpretacij in sistemov (teorija množic, teorija kategorij itn.) pa tvori nekonsistentno mnoštvo. Na tej podlagi je mogoče razmerje med filozofijo in matematiko interpretirati kot razmerje med metastrukturo in situacijo. S pomočjo Eastonovega teorema pridemo do sklepa, da filozofski koncepti na ravni metastrukture »kvantitativno« presegajo elemente, ki pripadajo matematiki kot ontologiji. Filozofija kot metaontologija zato lahko pokaže meje matematike kot ontologije.

Roland Bolz

Mathematics is Ontology? A Critique of Badiou's Ontological Framing of Set Theory

Key words: Badiou, set theory, ontology, mereology, multiple, Lucretius, Plato

This article develops a criticism of Alain Badiou's assertion that "mathematics is ontology." I argue that despite appearances to the contrary, Badiou's case for bringing set theory and ontology together is problematic. To arrive at this judgment, I explore how a case for the identification of mathematics and ontology could work. In short, ontology would have to be characterised to make it evident that set theory can contribute to it fundamentally. This is indeed how Badiou proceeds in Being and Event. I review his descriptions of the ontological problematic at some length here, only to argue that set theory is a poor fit. Although philosophers working on questions of being were certainly occupied with matters of oneness and the part-whole relationship, I argue that Badiou's discussion of philosophical sources points towards a mereological treatment, not a set-theoretic one. Finally, I suggest that Badiou's philosophical interpretations of key set-theoretic results are better understood as some sort of analogising between mathematics, ontology, and philosophical anthropology.

Roland Bolz

Je matematika ontologija? Kritika Badioujeve ontološke razlage teorije množic

Ključne besede: Badiou, teorija množic, ontologija, mereologija, mnoštvo, Lukrecij, Platon

Avtor članka kritizira trditev Alaina Badiouja, da je "matematika ontologija", pri čemer pokaže, da je kljub videzu o nasprotnem Badioujevo prizadevanje povezati teorijo množic in ontologijo problematično. Zato da bi utemeljil to sodbo, avtor raziskuje, kako bi lahko delovala identifikacija matematike z ontologijo. Za to bi bilo treba ontologijo opredeliti na način, da bi bilo nedvomno, kako je lahko teorija množic temeljni prispevek k ontologiji. To je dejansko način, kako ravna Badiou v *Biti in dogodku*. Avtor pričujočega besedila podrobno analizira Badioujeve opise ontološke problematike in na njeni podlagi pokaže, da teorija množic ni skladna z vlogo, ki ji jo je Badiou namenil. Čeprav so se filozofi, ki so se ukvarjali z vprašanjem biti, nedvomno ukvarjali tudi z vprašanjem enosti in razmerja del-celota, avtor prispevka zatrjuje, da vodi Badioujeva razprava o filozofskih virih prej k mereološkemu pristopu kot k pristopu teorije množic. V sklepu zato avtor zatrdi, da je treba Badioujeve interpretacije nekaterih ključnih rezultatov teorije množic razumeti kot nekakšno analogijo med matematiko, ontologijo in filozofsko antropologijo.

Tzuchien Tho

Sets, Set Sizes, and Infinity in Badiou's *Being and Event*

Key words: mathematical ontology, ordinality, cardinality, transfinite sum, limit ordinal, subtractive ontology, numerosity

This paper argues that Cantorian transfinite cardinality is not a necessary assumption for the ontological claims in Badiou's *L'Être et l'Événement* (Vol. 1). The necessary structure for Badiou's mathematical ontology in this work was only the ordinality of sets. The method for reckoning the sizes of sets was only *assumed* to follow the standard Cantorian measure. In the face of different and compelling forms of measuring non-finite sets (following Benci and Di Nasso, and Mancosu), it is argued that Badiou's project can indeed accommodate this pluralism of measurement. In turn, this plurality of measurement implies that Badiou's insistence on the "subtraction of the one", the move to affirm the unconditioned being of the "inconsistent multiple", results in the virtuality of the one, a pluralism of counting that further complicates the relationship between the one and the multiple in the post-Cantorian era.

Tzuchien Tho

Množice, velikosti množic in neskončnost v Badioujevi *Biti in dogodku*

Ključne besede: matematična ontologija, ordinalnost, kardinalnost, transfinitna vsota, mejni ordinal, subtraktivna ontologija, numeroznost

Avtor prispevka zagovarja tezo, da Cantorjeva transfinitna kardinalnost ni nujna predpostavka za ontološke trditve iz Badioujeve *L'Être et l'Événement* (zv. 1). Nujna podlaga za Badioujevo matematično ontologijo v tem delu je bila zgolj ordinalnost množic. Glede metode za ugotavljanje velikosti množic pa je bila zgolj domneva, da sledijo standardni Cantorjevi meri. Upoštevajoč različne prepričljive oblike merjenja nefinitnih množic (kot so jih razvili Benci in Di Nasso ter Mancosu), zagovarjamo stališče, da Badioujev projekt ni neskladen s tem pluralizmom merjenja. Ravno nasprotno, trdimo, da ta pluralizem merjenja implicira, da Badioujevo vztrajanje na »odtegnitvi enega«, nujno za zatrditev brezpogojne biti »nekonsistentnega mnoštva«, vodi v virtualnost enega, pluralizem štetja, s čimer se še bolj zaplete razmerje med enim in mnoštvom v pocantorjevski dobi.

Charles Alunni

Relation-Object and Onto-logy, Sets, or Categories. Identity, Object, Relation

Key words: set theory, category theory, ontology, diagram, duality, Plato, Aristotle

This article puts into perspective Badiou's differing approach to set theory and the theory of categories and shows how the distinctions and protocols specific to these fields affect his philosophical thought. It also questions the evolution of Badiou's approach to these two mathematical theories. The article concludes with questions and examinations related to some of the key points of Badiou's philosophical orientation that he has not yet addressed.

Charles Alunni

Razmerje-objekt in onto-logija, množice ali kategorije. Identiteta, objekt, razmerje

Ključne besede: teorija množic, teorija kategorij, ontologija, diagram, dvojnost, Platon, Aristotel

Pričujoči prispevek postavi v določeno perspektivo Badioujev selektivni pristop k teoriji množic in teoriji kategorij in pokaže, kako razločevanja in protokoli, ki so značilni za ti polji, zadevajo njegovo filozofsko misel. Tu gre tudi za vprašanje evolucije Badioujevega pristopa k tema dvema matematičnima teorijama. Članek sklene z vprašanji in raziskavami, ki so povezane z nekaterimi ključnimi točkami Badioujeve filozofske usmeritve, s katerimi se doslej ni ukvarjal.

René Guitart

Infinity between Two Ends. Dualities, Algebraic Universes, Sketches, Diagrams

Key words: algebraic universe, being, Cantor, category, diagram, duality, form, ontology, phenomenology, power set, limit, shape, sketch, structuralism, Zeno.

The article affixes a resolutely structuralist view to Alain Badiou's proposals on the infinite, around the theory of sets. Structuralism is not what is often criticized, to administer mathematical theories, imitating rather more or less philosophical problems. It is rather an attitude in mathematical thinking proper, consisting in solving mathematical problems by structuring data, despite the questions as to foundation. It is the mathematical theory of categories that supports this attitude, thus focusing on the functioning of mathematical work. From this perspective, the thought of infinity will be grasped as that of mathematical work itself, which consists in the deployment of dualities, where it begins

the question of the discrete and the continuous, Zeno's paradoxes. It is, in our opinion, in the interval of each duality — "between two ends", as our title states — that infinity is at work. This is confronted with the idea that mathematics produces theories of infinity, infinitesimal calculus or set theory, which is also true. But these theories only give us a grasp of the question of infinity if we put ourselves into them, if we practice them; then it is indeed mathematical activity itself that represents infinity, which presents it to thought. We show that tools such as algebraic universes, sketches, and diagrams, allow, on the one hand, to dispense with the "calculations" together with cardinals and ordinals, and on the other hand, to describe at leisure the structures and their manipulations thereof, the indefinite work of pasting or glueing data, work that constitutes an object the actual infinity of which the theory of structures is a calculation. Through these technical details it is therefore proposed that Badiou envisages ontology by returning to the phenomenology of his "logic of worlds", by shifting the question of Being towards the worlds where truths are produced, and hence where the subsequent question of infinity arises.

René Guitart

Neskočnost med dvema koncema. Dvojnosti, algebrski univerzumi, skice, diagrami

Ključne besede: algebrski univerzum, bit, Cantor, kategorija, diagram, dvojnost, forma, ontologija, fenomenologija, kardinalnost, meja, oblika, skica, strukturalizem, Zenon

Avtor tega prispevka prepozna v Badioujevi obravnavi neskončnega na podlagi teorije množic odločno strukturalističen pristop. Strukturalizem ni tisto, kar pogosto kritizirajo, se pravi, način, kako uporabiti matematične teorije na bolj ali manj filozofske probl-me. Prej gre za stališče v samem matematičnem mišljenju, kar je razvidno iz reševanja matematičnih problemov s strukturiranimi podatki, in to ne oziraje se na vprašanja utemeljitve. Tako stališče podpira matematična teorija kategorij, kar omogoča osredinjenje na funkcioniranje matematičnega dela. Na podlagi take perspektive je mogoče mišljenje neskončnosti dojeti kot mišljenje samega matematičnega dela, ki sestoji iz razgrinjanja dvojnosti, začenši z vprašanjem razločenega in kontinuiranega ter Zenonovimi paradoksi. Avtor pri tem zagovarja stališče, da je v intervalu vsake dvojnosti – »med dvema koncema«, kot je zapisano v našem naslovu – mogoče videti neskončnost na delu. Temu stališču je mogoče nasproti postaviti predstavo, da matematika proizvaja teorije neskončnosti, naj gre za infinitezimalni račun ali teorijo množic, kar je seveda res. Toda te teorije nam zgolj omogočajo razumeti vprašanje neskončnosti, če se vanje umestimo, če jih prakticiramo. Edino v tem primeru je dejansko matematična dejavnost tista, ki reprezentira neskončnost, kot jo nato prezentira mišljenju. V tem prispevku bi radi pokazali, da orodja, kot so algebrski univerzumi, skice, diagrami omogočajo, da se ognemo »računanju«, ki je vedno povezano s kardinali in ordinali, oziroma da opišemo strukture in rokovanje z njimi, neskončno in nedoločno delo lepljenja podatkov, delo,

ki na ravni objektov konstituirajo aktualno neskončnost, pri čemer je teorija struktur kalkulacija te neskončnosit. Na podlagi teh tehničnih podrobnost avtor na koncu predlaga Badiouju, da ontologijo obravnava tako, da se vrne k fenomenologiji njegovih »logik svetov«, s čimer bi se vprašanje biti premestilo na področje svetov, kjer so resnice proizvedene, se pravi tam, kjer se postavlja vprašanje neskončnosti.

David Rabouin

Space and Number: Two Ways in Ontology?

Key words: Badiou ontology, Set theory, Category theory, homotopy theory, number, space, history of mathematics

In this paper, I pursue a dialogue initiated with the publication of *Logiques des mondes* on the basis of three main lines of questioning: 1. The first, most immediate one, is the meaning that should be given to the famous motto "mathematics = ontology". Indeed, it is a different statement to claim that "mathematics is ontology", as was promoted explicitely by *Being and the event*, and to say that set theory alone is ontology (as advanced by *Logiques des mondes*, as well as other contemporary texts). It seems that there is at this point an important inflection of the system, not thematized as such; is set theory a way of *expressing* ontology, i.e. mathematics, or is it ontology itself? 2. This leads to a broader questioning of the relationship, in mathematics, between expression and ontology, or "language" and "being". Here I would like to point out that, contrary to what one might think, there is often an ambiguity between these two aspects not only in Badiou, but more generally in discussions of the philosophy of mathematics. If this distinction is relevant - and I will try to show why it should be - then one cannot conclude too quickly from the fact that mathematics has adopted a unified expression thanks to the *language* of set theory to the fact that the form of being it expresses *is* set-theoretic (or "pure multiple" in Badiou's terminology); 3. Finally, I would like to delve into the fact that the set-theoretic language has precisely given rise to the thematization of two orientations which could be just as well coined "ontological" (but in a different sense, therefore, from that given to it by Badiou); the first is anchored in the concept of number, while the other is anchored in the concept space (later called "topological"). The fact that we have a language capable of describing them in a homogeneous fashion does not entail that we are dealing with a single domain of objects. I would like to show that this tension runs through contemporary mathematics, and consequently through Alain Badiou's thinking more than he wants to admit. In fact, it is at the basis of various attempts proposed in mathematics to arrive at more satisfactory forms of unification than that provided by "sets" alone.

David Rabouin

Prostor in število: dve poti v ontologiji?

Ključne besede: Badiou, ontologija, teorija množic, teorija kategorij, teorija homotopij, število, prostor, zgodovina matematike

V pričujočem prispevku avtor nadaljuje dialog, ki se je začel z objavo *Logik svetov*, izhajajoč iz treh glavnih linij spraševanja: 1. Prva in najbolj neposredna zadeva pomen, ki ga je treba dati slovitemu geslu »matematika=ontologija«. In res, nekaj drugega je trditi, da je »matematika ontologija«, kot je bilo izrecno razglašeno v *Biti in dogodku,* in na tej podlagi zatrditi, da je edino teorija množic ontologija (kot je zatrjeno v *Logikah svetov* in drugih sočasnih tekstih). Zdi se, da gre na tej točki za pomemben premik v sistemu, ki pa kot tak ni tematiziran; ali je teorija množic način *izražanja* ontologije, tj. matematike, ali pa je teorija množic že kar sama ontologija? 2. To vodi k širšemu preiskovanju razmerja znotraj matematike med izražanjem in ontologijo, oziroma med »jezikom« in »bitjo«. V nasprotju s tem, kar bi lahko mislili, avtor opozarja, da imamo tu pogosto opravka z ambigviteto teh dveh vidikov, in to ne zgolj pri Badiouju, temveč, splošneje, v diskusijah, ki potekajo znotraj filozofije matematike. Če je to razlikovanje pomembno, in avtorjev namen je pokazati, zakaj bi moralo biti, potem bi lahko – na podlagi dejstva, da je matematika privzela enoten izraz, zahvaljujoč *jeziku* teorije množc, prehitro sklepali, da forma biti, ki jo izraža, dejansko *je* forma teorije množic (oziroma »čisto mnoštvo«, če uporabimo Badioujevo terminologijo). 3. V sklepnem delu se avtor loti vprašanja jezika teorije množic, kar je omogočilo tematizacijo dveh usmeritev, ki bi ju ravno tako lahko poimenovali »ontološka« (vendar v drugem pomenu, kot je temu izrazu dal Badiou); prva se opira na pojem števila, druga pa na pojem prostora (slednjega so pozneje preimenovali v »topološki«). Dejstvo, da imamo na voljo jezik, ki ju je zmožen opisati na homogen način, še ne pomeni, da imamo opraviti z enim samim področjem objektov. Avtorjev namen je pokazati, da je ta napetost navzoča v sodobni matematiki in zato tudi v Badioujevem mišljenju, in to veliko bolj, kot je sam pripravljen prizanati. Avtor zagovarja stališče, da je na podlagi različnih prizadevanj v matematiki dejansko mogoče priti do bolj zadovoljivih oblik poenotenja, kot je tisto, ki so ga ponudile zgolj »množice«.

Norman Madarasz

Beyond Recognition: Badiou's Mathematics of Bodily Incorporation

Key words: ontology, objective phenomenology, body of truth, category theory, topos theory

In *Being and Event,* Alain Badiou disconnects the infinite from the One and the Absolute, thus recasting the basis from which to craft a new theory of generic subject, the existence of which is demonstrated through set theory. In *Logics of Worlds,* Badiou turns his attention to the modes by which this subject appears in a world. It does so by being

incorporated as a subjectivizable body, a body of truth. As opposed to *Being and Event*, the demonstration of this argument takes shape according to two distinct levels, that of a "calculated phenomenology" and that of a formalism in which category theory provides a general logic, the combination of which delineates an "onto-logic". In this essay, we trace Badiou's derivation of the notion of body of truth and evaluate the innovative phenomenological methodology applied to explain its association with a world.

Norman Madarasz

Onstran pripoznanja: Badioujeva matematika telesne inkorporacije

Ključne besede: ontologija, objektivna fenomenologija, telo resnice, teorija kategorij, teorija toposov

V *Biti in dogodku* Badiou razveže neskončno, Eno ter absolut, s čimer ustvari podlago za razdelavo nove teorije generičnega subjekta, čigar eksistenco je mogoče dokazati s pomočjo teorije množic. V *Logikah svetov* pa se Badiou ukvarja z načini, kako se ta subjekt pojavlja v svetu, in sicer prek inkorporacije v subjektivizabilno telo, telo resnice. V nasprotju z *Bitjo in dogodkom* dokazovanje tega argumenta poteka na dveh ločenih ravneh, na ravni »kalkulirane fenomenologije« in na ravni formalizma, za katerega teorija kategorij ponuja splošno logiko, povezava obeh ravni pa omogoči zaris »onto-logike«. V pričujočem besedilu sledimo Badioujevi izpeljavi pojma telesa resnice in osvetlimo uporabljeno inovativno fenomenološko metodologijo, s pomočjo katere je pojasnjena vez med telesom resnice in svetom.

Frank Ruda

To the End: Exposing the Absolute

Key words: absolute, appearance, Badiou, Being, forcing, freedom, truth(s)

This article reconstructs Badiou's oeuvre from the vantage point of the last volume of his *Being and Event* trilogy. It determines the perspective and task of *The Immanence of Truths* and demonstrates in what way an "absolute ontology" is the result of an act of forcing that serves as the measure for a truth's truthness. This allows to argue that Badiou's is and always was a philosophy of freedom.

Frank Ruda

Do konca: razkrivanje absoluta

Ključne besede: absolut, videz, Badiou, bit, izsiljenje, svoboda, resnic(e)

Pričujoči prispevek rekonstruira celotno Badioujevo delo, izhajajoč iz zadnjega dela trilogije *Biti in dogodka*. Opredeli perspektivo in nalogo *Imanence resnic* in pokaže, kako je

lahko »absolutna ontologija« rezultat dejanja izsiljenja, ki je hkrati mera za resničnost resnice. Na tej podlagi lahko nato zatrdimo, da je Badioujeva filozofija, kar je vedno tudi bila, filozofija svobode.

Jana Ndiaye Berankova

The Immanence of Truths and the Absolutely Infinite in Spinoza, Cantor, and Badiou

Key words: Badiou, Cantor, the absolute, *The Immanence of Truths*, large cardinals, Spinoza, *Being and Event*, philosophy and mathematics

The following article compares the notion of the absolute in the work of Georg Cantor and in Alain Badiou's third volume of *Being and Event: The Immanence of Truths* and proposes an interpretation of mathematical concepts used in the book. By describing the absolute as a universe or a place in line with the mathematical theory of large cardinals, Badiou avoided some of the paradoxes related to Cantor's notion of the "absolutely infinite" or the set of all that is thinkable in mathematics Ω: namely the idea that Ω would be a potential infinity. The article provides an elucidation of the putative criticism of the statement "mathematics is ontology" which Badiou presented at the conference *Thinking the Infinite* in Prague. It emphasizes the role that philosophical decision plays in the construction of Badiou's system of mathematical ontology and portrays the relationship between philosophy and mathematics on the basis of an inductive not deductive reasoning.

Jana Ndiaye Berankova

Imanenca resnic in absolutno neskončno pri Spinozi, Cantorju in Badiouju

Ključne besede: Badiou, Cantor, absolut, *Imanenca resnic*, veliki kardinali, Spinoza, *Bit in dogodek*, filozofija in matematika

Pričujoči članek primerja pojem absoluta v delu Georga Cantorja in v tretjem zvezku *Biti in dogodka*: *Imanenci resnic* Alaina Badiouja in ponudi interpretacijo matematičnih konceptov, ki so uporabljeni v tem delu. S tem ko Badiou opiše absolut kot univerzum ali mesto, v skladu z matematično teorijo velikih kardinalov, se izogne nekaterim paradoksom, ki so bili povezani s Cantorjevim pojmom »absolutnega neskončnega« oziroma mnoštva vsega, kar je mislivo v matematiki, Ω: predstavo, da je lahko Ω potencialna neskončnost. Članek pojasni Badioujevo domnevno samokritiko trditve »matematika je ontologija«, kot jo je Badiou predstavil na konferenci *Thinking the Infinite* v Pragi. Članek poudari vlogo, ki jo ima filozofska odločitev pri konstruiranju Badioujevega sistema matematične ontologije in predstavi razmerje med filozofijo in matematiko na podlagi induktivnega in ne deduktivnega sklepanja.

Norma M. Hussey
A New Hope for the Symbolic, for the Subject

Key words: ontology, metaontology, symbolization, subjectivity, disorientation, mathematical infinity, set theory, Platonism, pluralism, large cardinal theory, inner model, ultimate-L, universality theorem, supercompact cardinal

This paper is perhaps an impressionistic response to accounts of the extraordinary set-theoretical activity being undertaken by W. Hugh Woodin (mathematician) and colleagues in the present moment, in the context of the mathematical ontology proposed and elaborated by Alain Badiou (philosopher). The argument presented is that the prevailing and sustained incoherence of the mathematical ontology (i.e. set theory) underscores a contemporary deficit of humanity's symbolic organization which, in turn, yields confusion and conflict in terms of subjective orientation. But a new axiom (conjectured as yet) promises to realize a coherent set theory, i.e. stable, consistent and complete. This remarkable (and completely unexpected) development offers hope for the pursuit of a modern (i.e. non-hierarchical) symbolic, and a consequent resolution of the general subjective disorientation.

Norma M. Hussey
Novo upanje za simbolno, za subjekta

Ključne besede: ontologija, metaontologija, simbolizacija, subjektivnost, dezorientacija, matematično neskončno, teorija množic, platonizem, pluralizem, teorija velikih kardinalov, notranji model, poslednji-L, teorem univerzalnost, superkompakten kardinal

Pričujoči prispevek je morda impresionistični odziv na izjemno dejavnost, ki smo ji priča na področju teorije množic, zahvaljujoč predvsem delu (matematika) W. Hugha Woodina in sodelavcev v navezavi na problem matematične ontologije, kot jo je ponudil in razdelal (filozof) Alain Badiou. Argument, ki ga želimo predstaviti je, da prevladujoča in vztrajna nekoherentnost matematične ontologije (tj. teorije množic) izpostavi in pojasni današnji manko na področju simbolne organizacije človeštva, ki vodi v zmedo in konflikt med subjektivnimi orientacijami. Vendar pa novi aksiom (ki je ta hip na ravni hipoteze oziroma predpostavke) obljublja izdelavo koherentne teorije množic, ki bo stabilna, konsistentna in popolna. Ta izjemni in popolnoma nepričakovani razvoj je podlaga za upanje za oblikovanje sodobnega (tj. nehierarhičnega) simbolnega in posledično za razrešitev prevladujoče subjektivne dezorientacije.

Fernando Zalamea
An Elementary Peircean and Category-Theoretic Reading of *Being and Event*, *Logics of Worlds*, and *The Immanence of Truths*

Key words: mathematics, philosophy, set theory, category theory, large cardinals, Peirce

The article presents a reading of Badiou's trilogy, *L'Être et l'événement* (1988), *Logiques des mondes* (2006), and *L'Immanence des vérités* (2018), and points out the mathematical connections with the works of Cohen, Grothendieck, and large cardinal specialists. A synthetic rendering of these connections is first offered, following precise passages in Badiou's work, then a category-theoretic and Peircean perspective is explored in order to specify the many dialectics in the trilogy, and, finally, some open problems are proposed.

Fernando Zalamea
Elementarno peircejevsko in kategorijsko teoretsko branje *Biti in dogodka, Logik svetov in Imanence resnic*

Ključne besede: matematika, filozofija, teorija množic, teorija kartegorij, veliki kardinali, Peirce

V pričujočem članku predstavimo braje Badioujeve trilogije *L'Être et l'événement* (1988), *Logiques des mondes* (2006), in *L'Immanence des vérités* (2018), pri čemer izpostavimo matematične povezave z deli Cohena, Grothendiecka in specialistov za velike kardinale. Ponudimo sintetični pogled na te povezave, pri čemer sledimo natančnim prehodom v Bdioujevem delu, zato da bi se potem obrnili h kategorijsko teoretski in peircejevski perspektivi, ki jo obravnavamo, zato da bi natančneje opredelili več dialektik, ki so dejavne v trilogiji, na koncu pa opozorimo na nekaj odprtih problemov.

Obvestilo avtorjem

Prispevki so lahko v slovenskem, angleškem, francoskem ali nemškem jeziku.
Uredništvo ne sprejema prispevkov, ki so bili že objavljeni ali istočasno poslani v objavo drugam.

Prispevki naj bodo pisani na IBM kompatibilnem računalniku (v programu Microsoft Word). Priložen naj bo izvleček (v slovenščini in angleščini), ki povzema glavne poudarke v dolžini do 150 besed in do 5 ključnih besed (v slovenščini in angleščini).
Za oddajo prispevkov prosimo sledite navodilom: http://ojs.zrc-sazu.si/filozofski-vestnik/information/authors.

Prispevki naj ne presegajo obsega ene in pol avtorske pole (tj. 45.000 znakov s presledki) vključno z vsemi opombami. Zaželeno je, da so prispevki razdeljeni na razdelke in opremljeni z mednaslovi. V besedilu dosledno uporabljajte dvojne narekovaje (npr. pri navajanju naslovov člankov, citiranih besedah ali stavkih, tehničnih in posebnih izrazih), razen pri citatih znotraj citatov. Naslove knjig, periodike in tuje besede (npr. *a priori*, *epoché*, *élan vital*, *Umwelt*, itn.) je treba pisati *ležeče*.

Opombe in reference se tiskajo kot opombe pod črto. V besedilu naj bodo opombe označene z dvignjenimi indeksi. Citiranje naj sledi spodnjemu zgledu:

1. Gilles-Gaston Granger, *Pour la connaissance philosophique*, Odile Jacob, Pariz 1988, str. 57.
2. Cf. Charles Taylor, "Rationality", v: M. Hollis, S. Lukes (ur.), *Rationality and Relativism*, Basil Blackwell, Oxford 1983, str. 87–105.
3. Granger, str. 31.
4. *Ibid*., str. 49.
5. Friedrich Rapp, "Observational Data and Scientific Progress", *Studies in History and Philosophy of Science*, Oxford, 11 (2/1980), str. 153.

Sprejemljiv je tudi t. i. sistem »avtor-letnica« z referencami v besedilu. Reference morajo biti v tem primeru oblikovane takole: (avtorjev priimek, letnica: str. ali pogl.). Popoln, po abecednem redu urejen bibliografski opis citiranih virov mora biti priložen na koncu poslanega prispevka.

Prispevki bodo poslani v recenzijo. Avtorjem bomo poslali korekture, če bo za to dovolj časa. Pregledane korekture je treba vrniti v uredništvo čim prej je mogoče. Upoštevani bodo samo popravki tipografskih napak.

Information for Contributors

Manuscripts in Slovenian, English, French and German are accepted.
Manuscripts sent for consideration must not have been previously published or be simultaneously considered for publication elsewhere.

Authors are required to provide the text written on a compatible PC (in a version of Microsoft Word), accompanied by an abstract (in the language of the original and in English) summarizing the main points in no more than 150 words and up to 5 keywords.
To submitt manuscript please follow instructions: http://ojs.zrc-sazu.si/filozofski-vestnik/information/authors.

A brief biographical note indicating the author's institutional affiliation(s), works published and central subject of professional interest should also be enclosed.

Manuscripts should not exceed 8,000 words (45,000 characters with spaces) including notes. Papers should be sectioned with clearly marked subheadings. Use double quotation marks throughout the text (e.g. for titles of articles, quoted words or phrases, technical terms), except for quotes within quotes. Titles of books and periodicals, and foreign words (e.g. *a priori, epoché, élan vital, Umwelt*, etc.) should be in *italics*. Note numbers should be referred to in the text by means of superscripts.

Citations should be presented as follows:

1. Gilles-Gaston Granger, *Pour la connaissance philosophique*, Odile Jacob, Paris 1988, p. 123.
2. Cf. Charles Taylor, "Rationality", in: M. Hollis, S. Lukes (Eds.), *Rationality and Relativism*, Basil Blackwell, Oxford 1983, pp. 87–105.
3. Granger, p. 31.
4. *Ibid*., p. 49.
5. Friedrich Rapp, "Observational Data and Scientific Progress", *Studies in History and Philosophy of Science*, Oxford, 11 (2/1980), p. 153.

The author-date system is also acceptable with a text reference reading. References in the text are then made as follows: (author's last name, date: page(s) or section). Detailed bibliographical information should be given in a separate alphabetical list at the end of the manuscript.

Articles will be externaly peer-reviewed.
Proofs will be sent to authors. They should be corrected and returned to the Editor as soon as possible. Alterations other than corrections of typographical errors will not be accepted.

Filozofski vestnik

ISSN 0353-4510

Programska zasnova

Filozofski vestnik (ISSN 0353-4510) je glasilo Filozofskega inštituta Znanstvenoraziskovalnega centra Slovenske akademije znanosti in umetnosti. Filozofski vestnik je znanstveni časopis za filozofijo z interdisciplinarno in mednarodno usmeritvijo in je forum za diskusijo o širokem spektru vprašanj s področja sodobne filozofije, etike, estetike, poli tične, pravne filozofije, filozofije jezika, filozofije zgodovine in zgodovine politične misli, epistemologije in filozofije znanosti, zgodovine filozofije in teoretske psihoanalize. Odprt je za različne filozofske usmeritve, stile in šole ter spodbuja teoretski dialog med njimi.

Letno izidejo tri številke. Druga številka je posvečena temi, ki jo določi uredniški odbor. Prispevki so objavljeni v angleškem, francoskem in nemškem jeziku s povzetki v angleškem in slovenskem jeziku.

Filozofski vestnik je vključen v: Arts & Humanities Citation Index, Current Contents / Arts & Humanities, EBSCO, DOAJ, IBZ (Internationale Bibliographie der Zeitschriften), The Philosopher's Index, Répertoire bibliographique de philosophie, Scopus in Sociological Abstracts.

Izid revije je finančno podprla Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije. Filozofski vestnik je ustanovila Slovenska akademija znanosti in umetnosti.

Aims and Scope

Filozofski vestnik (ISSN 0353-4510) is edited and published by the Institute of Philosophy of the Scientific Research Centre of the Slovenian Academy of Sciences and Arts. Filozofski vestnik is a philosophy journal with an interdisciplinary character. It provides a forum for discussion on a wide range of issues in contemporary political philosophy, history of philosophy, history of political thought, philosophy of law, social philosophy, epistemology, philosophy of science, cultural critique, ethics, and aesthetics. The journal is open to different philosophical orientations, styles and schools, and welcomes theoretical dialogue among them.

Three issues of the journal are published annually. The second issue is a special issue that brings together articles by experts on a topic chosen by the Editorial Board. Articles are published in English, French, or German, with abstracts in Slovenian and English.

Filozofski vestnik is indexed/abstracted in the Arts & Humanities Citation Index; Current Contents / Arts & Humanities; DOAJ; EBSCO; IBZ (Internationale Bibliographie der Zeitschriften); The Philosopher's Index; Répertoire bibliographique de philosophie; Scopus; and Sociological Abstracts.

Filozofski vestnik is published with the support of the Slovenian Research Agency. Filozofski vestnik was founded by the Slovenian Academy of Sciences and Arts.

Alain Badiou, Ontologie et mathématiques : Théorie des Ensembles, théorie des Catégories, et théorie des Infinis, dans *L'Être et l'événement, Logiques des mondes* et *L'Immanence des vérités*

Le Triangle philosophie – mathématiques – psychanalyse
The Triangle of Philosophy – Mathematics – Psychoanalysis

Oliver Feltham, "One or Many Ontologies? Badiou's Arguments for His Thesis 'Mathematics is Ontology'"
Nick Nesbitt, Bolzano's Badiou
Jelica Šumič Riha, La place de la mathématique : Badiou avec Lacan

Le Modèle ensembliste en discussion
The Set-theoretical Model under Discussion

Michael Hauser, Badiou and the Ontological Limits of Mathematics
Ronald Bolz, Mathematics is Ontology? A Critique of Badiou's Ontological Framing of Set Theory
Tzuchien Tho, Sets, Set Sizes, and Infinity in Badiou's *Being and Event*

Le « Voir » et le « dire »: théorie des ensembles / théorie des categories
"Seeing" and "Saying": Set Theory / Category Theory

Charles Alunni, Relation-objet et onto-logie, ensembles ou categories. Identité, objet, relation
René Guitart, L'infini entre deux bouts. Dualités, univers algébriques, esquisses, diagrammes
David Rabouin, Espace et nombre : deux voies dans l'ontologie ?
Norman Madarasz, Beyond Recognition: Badiou's Mathematics of Bodily Incorporation

Grands Cardinaux et attributs de l'absolu
Large Cardinals and the Attributes of the Absolute

Frank Ruda, To the End: Exposing the Absolute
Jana Ndiaye Berankova, *The Immanence of Truths* and the Absolutely Infinite in Spinoza, Cantor, and Badiou
Norma Hussey, A New Hope for the Symbolic, for the Subject
Fernando Zalamea, An Elementary Peircean and Category-Theoretic Reading of *Being and Event, Logics of Worlds*, and *The Immanence of Truths*

9 770353 451019