Filozofski vestnik Letnik/Volume XXI • Številka/Number 1 • 2000 • 157-176

NARAVA ABSTRAKTNEGA MIŠLJENJA
Filozofski vidiki Descartesovega dela v algebri *

STEPHEN GAUKROGER

Nihče ni k zgodnjemu razvoju algebre prispeval toliko kot Descartes. Bil je sposoben v veliki meri povezati aritmetiko in geometrijo, s tem, da je pokazal na njune medsebojne povezave v izrazih algebraičnega zapisa. To je bil dosežek, ki je zasenčil njegovo drugo znanstveno delo in Descartes je bil prepričan, da bi lahko algebra služila kot model za njegova druga prizadevanja. Zvezo med algebro in drugim znanstvenim delom je Descartes raziskoval, ob upoštevanju vprašanja metode, v svojem prvem objavljenem delu *Razprava o metodi kako pravilno voditi razum ter v znanostih iskati resnico, skupaj z optiko, meteorologijo in geometrijo, ki so zgledi v tej metodi* (1637). Kar se nam tu otipljivo ponuja, je splošna razprava o metodi, kateri so pripeti trije zgledi metode. Gre za tri zelo uspešne zglede, kajti pri vsakem od njih nam je zagotovljen vsaj en temeljni rezultat: sinusni lomni zakon v *Optiki*, izračun in eksperimentalna potrditev kotov mavričnih lokov v *Meteorologiji* in rešitev Pappusovega problema lege za štiri ali več premic v *Geometriji*. Vendar pa bi naredili resno napako, če bi v *Geometriji* videli zgolj ponazoritev metode. Descartes uspešno obravnava algebraični pristop, ki ga je razvil v *Geometriji*, predvsem kot izhodišče pravilne metode in ne zgolj kot njeno ponazoritev. Poleg tega metodološki vidiki algebre na noben način ne izčrpajo zanimanja zanjo, in čeprav se jih bom dotaknil, bo žarišče te obravnave ležalo drugje.

Tri osnovne teme, s katerimi se nameravam ukvarjati, so: kaj Descartesovo delo v algebri dejansko pomeni, v čem je njegova izvirnost, in kako je mogoča aplikacija algebre na fizični svet. Toda v osnovi teh tem leži globlji prob-

---

* Prevedeno po: Stephen Gaukroger, »The nature of abstract reasoning: philosophical aspects of Descartes' work in algebra«, v: *The Cambridge Companion to Descartes*, ur. John Cottingham, Cambridge University Press, Cambridge 1992, str. 91-114. Avtor Citira Descartesa po izdaji, ki sta jo uredila Adam in Tannery (AT). Kjer za navedeno mesto obstaja slovenski prevod, smo na to opozorili v opombi; ostale citate iz omenjene izdaje je iz latinščine prevedel Matjaž Vesel, iz francoščine pa V. Likar.

lem, namreč vprašanje abstraktne narave algebre. Ena izmed tem, ki jih bom poskušal razjasniti, je vprašanje, v čem je za Descartesa bistvo te abstraktnosti.

I. Narava Descartesove algebre

Algebra, aritmetika in geometrija

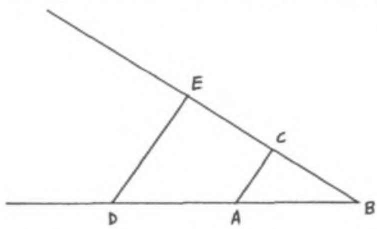
Grki so geometrijske probleme razvrstili na bodisi ravninske, na probleme prostorskih teles ali na linearne, glede na to, ali njihova rešitev zahteva premice in krožnice, stožernice oz. bolj kompleksne krivulje. Evklid se je omejil na dva postulata: da je mogoče povleči premico skozi poljubni točki, in da je mogoče načrtati krožnico, ki ima za središče poljubno točko ter gre skozi drugo poljubno dano točko. Vendar je obseg problemov, ki jih je mogoče rešiti zgolj na osnovi teh dveh postulatov zelo omejen in poznejši matematiki so dodali tretji postulat; namreč, da lahko dani stožec seka dana ravnina. Geometrija stožernic, ki je temu sledila, je bila v antiki pojmovana kot težko razumljiva veja matematike z malo praktičnega pomena. Aristotel je prepričljivo pokazal, da je naravno gibanje teles bodisi premočrtno (v primeru zemeljskih teles) bodisi krožno (v primeru nebesnih teles); tako je s fizikalnega stališča sledilo, da lahko shajamo brez kompleksnejših krivulj: te očitno nimajo temelja v naravi in so zanimive zgolj s stališča matematike. Vendar je do sedemnajstega stoletja potreba po obravnavi krivulj mimo premice in kroga postala neodložljiva. Parabolo, pot, ki ji sledi projektil, so preučevali v balistiki, astronomi pa so se zelo dobro zavedali dejstva, da planeti in kometi opisujejo eliptične, parabolične in hiperbolične poti. V optiki, ki je bila ena izmed najbolj intenzivno proučevanih področij v naravoslovju sedemnajstega stoletja, je bilo potrebno pri konstrukciji leč in ogledal vsaj poznavanje stožernic. Delo aleksandrijskih matematikov na stožernicah je bilo nezadovoljivo in mnogi njihovi rezultati so bili prej kot ne posledica iznajdljivosti – prej obrobne rešitve problemov kot posledica uporabe kakega splošnega postopka.

Natanko takšen splošen postopek je Descartes razvil in uporabil v *Geometriji*, razpravi, ki je imela revolucionarne posledice za razvoj matematike. *Geometrija* obsega tri knjige: prva obravnava »probleme, ki jih je mogoče konstruirati zgolj z uporabo krožnic in premic«, druga se ukvarja z »naravo krivulj« in tretja s konstrukcijo problemov prostorskih in hiperprostorskih [supersolid] teles. Kar zadeva temelje algebre je prva knjiga najpomembnejša, in posledično se bom osredotočil prav na njo.[1]

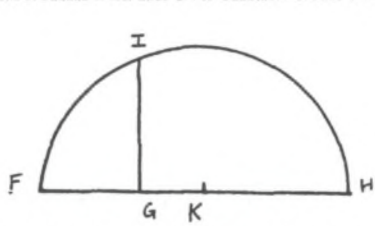
[1] Za popolni pregled *Geometrije* glej J. F. Scott, *The Scientific Work of René Descartes*, Taylor & Francis, London 1952, poglavja 6–9.

Ob naslovu, ki namiguje, da zadeva le tiste probleme, ki pri svoji konstrukciji uporabljajo premice in krivulje, bi bilo mogoče pričakovati, da bo prva knjiga vsebovala tradicionalno snov, medtem ko bosta drugi dve vsebovali novejšo. Navsezadnje je Evklid podal dokaj izčrpno obravnavo problemov, ki jih je mogoče konstruirati samo z uporabo premice in krožnice. Toda dejansko je namen prve knjige predvsem prikazati nova algebraična sredstva pri reševanju geometrijskih problemov z uporabo aritmetičnih postopkov, in obratno. Z drugimi besedami, cilj je pokazati, kako lahko, če o njih razmišljamo v algebraičnih izrazih, kombiniramo sredstva obeh področij.

Geometrija se prične z neposredno primerjavo med aritmetiko in geometrijo (AT VI 369). Tako kot so v aritmetiki operacije, ki jih uporabljamo, seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje in iskanje korenov, tako lahko tudi v geometriji vsak problem zvedemo na takega, ki ne zahteva nič drugega kot poznavanje dolžin daljic, ter ga v tej obliki lahko rešimo zgolj z uporabo petih aritmetičnih operacij. Descartes potemtakem uvaja aritmetične izraze neposredno v geometrijo. Moženje je npr. operacija, ki jo je mogoče izvesti zgolj z uporabo premic (se pravi zgolj z uporabo ravnila):

> Vzemimo na primer, da je AB enota, in da je treba pomnožiti BD z BC;
>
> 
>
>
> ni mi treba drugega, kakor da povežem točki A in C in nato povlečem vzporednico DE s CA in BE je produkt tega množenja. (AT VI 370)

Če po drugi strani želimo poiskati kvadratni koren, potrebujemo premice in krožnice (torej ravnilo in šestilo):

> Če pa je treba poiskati kvadratni koren od GH, mu dodam v premi črti FG, ki je enota in razdelim FH na dva enaka dela v točki K, iz središča K
>
> 
>
>
> povlečem krog FIH; potem iz točke G povlečem premo črto do I pravokotno na FH, in GI je iskani koren. (AT VI 370–1)

Vredno je omeniti, da se v primeru, ko je FG poljubno izbrana enota, dolžina GI prav lahko izkaže za iracionalno: to za geometrijsko konstrukcijo ni relevantno.

Descartes nadalje pokaže, da nam dejansko ni treba risati črt, temveč jih lahko označimo s črkami. Svetuje nam, naj na ta način označimo vse daljice, tako tiste, katerih dolžino želimo določiti, kakor tudi tiste, katerih dolžina je znana, in zatem nadalje, kot da smo problem že rešili, povezujemo daljice med seboj tako, da je mogoče vsako količino izraziti na dva načina. S tem je določena enačba in cilj je poiskati takšno enačbo za vsako neznano daljico. V primerih, ko to ni mogoče, poljubno izberemo daljice z znanimi dolžinami, za vsako neznano daljico, za katero nimamo enačbe, in:

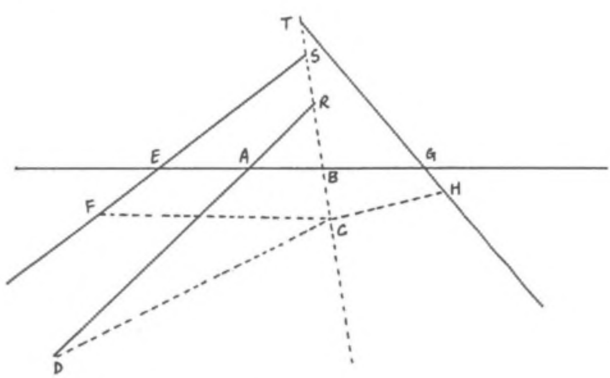
> če obstaja še vedno več enačb, jih je treba uporabiti vsako zapored, bodisi da jih vzamemo posamič ali da jih primerjamo z drugimi, da bi ugotovili vsako od neznanih daljic, in tako z razmotavanjem povzročili, da bi ostala le ena sama, enaka kakšni drugi znani daljici, katere kvadrat, ali kub, ali kavadrat kvadrata, ali peta ali šesta potenca itd. bi bili enaki seštevku ali razliki dveh ali ali več količin, od katerih bi bila ena znana, druge pa sestavljene iz sorazmerij med enoto in tem kvadratom, ali kubom, ali kvadratom kvadrata itd., pomnoženimi z drugimi znanini daljicami. To lahko zapišem na tak način:
>
> $$z = b$$
> ali $$z^2 = -az + b^2$$
> ali $$z^3 = az^2 + b^2z - c^3$$
> ali $$z^4 = az^3 - c^3z + d^4 \text{ itd.}$$
>
> Se pravi, da je z, ki ga jemljem za neznano količino, enak b; ali kvadrat od z je enak kvadratu od b minus a pomnoženo z z ... In tako je vedno mogoče zvesti vse neznane količine na eno samo, kadar se da problem konstruirati s krogi in premimi črtami, ali s koničnimi sekcijami, ali celo s kakšnimi drugimi črtami, ki so zgolj za stopnjo ali dve bolj sestavljeni. (AT VI 373–4)

To je neobičajen pristop k problemu. Algebraične enačbe z dvema neznankama $F(x,y) = 0$, so bile tradicionalno pojmovane kot nedoločene, ker iz takšne enačbe ni bilo mogoče določiti obeh neznank. Kar je bilo mogoče narediti, je bila zamenjava poljubno izbranih vrednosti za x in nato reševanje enačbe za y pri vsaki od teh vrednosti, kar pa na noben način ni moglo veljati za splošno rešitev enačbe. Toda Descartesov pristop omogoča preoblikovanje tega postopka v splošno rešitev. Kar mu uspe narediti, je to, da vzame x za absciso točke in ustrezen y za njeno ordinato ter omogoči spreminjanje neznanega x-a tako, da vsaki vrednosti x-a ustreza vrednost y-a, ki jo je mogoče izračunati iz enačbe. Na ta način končamo z množico točk, ki oblikujejo popolnoma določeno krivuljo, ki zadovoljuje enačbo.

Zgled: Descartesova obravnava Pappusovega problema lege[2]

Ta postopek ponazarja Descartesova rešitev enega izmed velikih nerešenih matematičnih problemov, ki jih je zapustila antika, Pappusovega problema lege za štiri ali več daljic. Za kaj pri tem pravzaprav gre. V primeru problema za tri daljice, so podane tri daljice in njihove lege, naloga pa je poiskati lego točk, iz katerih je mogoče načrtati tri nove daljice k prej podanim daljicam tako, da vsaka nova daljica z dano daljico tvori dani kot, pri čemer je produkt dolžin dveh daljic konstantno sorazmeren s kvadratom tretje. Pri Pappusovem problemu za štiri daljice so podane štiri daljice in njihove lege, poiskati pa moramo lego točk, iz katerih lahko k danim daljicam načrtamo štiri nove daljice tako, da je produkt dolžin dveh načrtanih daljic v konstantnem sorazmerju s produktom preostalih dveh.

V antiki je bilo znano, da je lega v vsakem primeru stožernica, ki gre skozi presečišča daljic, vendar ni bil razvit noben splošen postopek za rešitev danega problema. Descartesova obravnava naloge je algebraična in popolnoma splošna, omogoča nam, da izrazimo odnose med daljicami z uporabo zgolj dveh spremenljivk. Njegov pristop je v tem, da pokaže, kako je mogoče problem, eksplicitno rešen za primer štirih daljic, vendar na način, ki ga je teoretično mogoče posplošiti na *n* daljic, zvesti na problem, pri katerem je vse, kar moramo vedeti, le dolžine določenih daljic. Te daljice so koodinatne osi, dolžine pa nam podajajo abscise in ordinate točk. Problem štirih daljic je prikazan na naslednji način (AT VI 382–7):



[2] Bralci, katerim se zdi matematika v nadaljevanju pretežka, lahko to poglavje izpustijo.

Na sliki so polno prikazane tiste daljice, ki so podane in črtkano tiste, ki jih iščemo. Descartes vzame AB in BC za osnovni daljici ter nadaljuje tako, da vse ostale z njima postavi v odnos. Njuni dolžini sta x ter y in AB v resnici predstavlja x-os, BC pa y-os; moment, ki je v Descartesovem diagramu zastrt ob dejstvu, da AB in BC nista prikazani pravokotno druga na drugo (ker bi to zakrilo razmerja). Zdaj so koti trikotnika ABR dani, tako da je razmerje AB:BR znano. Če to razmerje pišemo kot $\frac{z}{b}$, potem velja BR = $\frac{bx}{z}$ in CR = $y + \frac{bx}{z}$ (kjer točka B leži med C in R). Koti trikotnika DRC so prav tako znani, in če razmerje CR:CD označimo z $\frac{z}{c}$, velja CR = $y + \frac{bx}{z}$ in CD = $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{z^2}$. Nadalje, ker so lege AB, AD in EF določene, je k, kot dolžina AE, s tem podana; torej EB = $k + x$ (kjer A leži med E in B). Koti trikotnika ESB so prav tako dani, s tem pa je dano tudi razmerje BE:BS. Če zaznamujemo to razmerje z $\frac{z}{d}$, dobimo BS = $\frac{dk+dx}{z}$ in CS = $\frac{zy+dk+dx}{z}$ (B leži med S in C). Koti trikotnika FSC so dani, zato poznamo razmerje CS:CF. Če ga zapišemo kot $\frac{z}{e}$, dobimo CF = $\frac{ezy+dek+dex}{z^2}$. Če l označuje dano dolžino AB, velja BG = $l - x$; če znano vrednost razmerja BG:BT v trikotniku BGT označimo z $\frac{z}{f}$, potem BT = $\frac{fl-fx}{z}$ in CT = $\frac{zy+fl-x}{z}$, in če razmerje CT:CH v trikotniku TCH pišemo kot $\frac{z}{g}$, velja CH = $\frac{gzy+fgl-fgx}{z^2}$.

Ne glede na to, koliko daljic z dano lego imamo, je mogoče dolžino daljice, ki poteka skozi točko C in oklepa s temi daljicami dane kote, vedno izraziti s tremi izrazi oblike $ax + by + c$. Za tri izmed štirih podanih daljic je dobljena enačba kvadratna enačba, kar pomeni, da lahko za vsako znano vrednost y-a, vrednosti x-a določimo zgolj z uporabo ravnila ter šestila; dovolj veliko število vrednosti nam omogoča slediti krivulji, na kateri mora ležati točka C. Za problem s petimi ali šestimi daljicami je enačba kubična, pri sedmih ali osmih daljicah je enačba četrtega reda, z devetimi ali desetimi petega in tako naprej; red enačbe se poveča za ena z vsakima dvema novima daljicama.

Descartesov napredek onstran meja stare matematike

Z rešitvijo Pappusovega problema je Descartes rešil enega izmed najtežjih problemov, ki jih je zapustila stara matematika, in rešil ga je na preprost, eleganten način, z možnosjo posplošitve. S tem je razvil tehniko, ki precej presega tiste, ki so se uporabljale v antiki.

V drugi knjigi *Geometrije* Descartes nadaljuje obravnavo Pappusovega problema lege za tri ali štiri daljice s tem, da razločuje krivulje, ki ustrezajo enačbam drugega reda, namreč elipso, hiperbolo in parabolo. Ta obravnava je precej izčrpna, vendar Descartes upošteva le zelo malo primerov, ki ustrezajo kubičnim enačbam, zatrjujoč (nekoliko optimistično, kot se je pokazalo)[3] da njegova metoda kaže, kako naj bi le-te obravnavali. Njegova splošna razvrstitev krivulj in zlasti opustitev transcendentnih krivulj je izzvala veliko razprav,[4] vendar nas tu ne bo zanimala. Kljub temu je nemara vredno omeniti, da je Descartesova metoda načrtovanja tangente na krivuljo dobila nov pomen z razvojem [diferencialnega] računa (h kateremu sam ni neposredno prispeval), saj predstavlja ekvivalent k iskanju nagiba krivulje v vsaki točki, kar je oblika odvajanja. Končno Descartes v tretji knjigi obravnava probleme prostorskih in hiperprostorskih teles. To predstavlja pomemben napredek v primerjavi z aleksandrijskimi matematiki, ki so le z odporom priznavali uporabo krivulj, ki niso bile premice ali krožnice, kategorije problemov prostorskih teles pa niso nikoli sistematično premislili. Tukaj Descartes razširja svojo algebraično analizo daleč prek interesov antičnih matematikov. Najbolj osupljiva značilnost njegovega pristopa je v tem, da je za ohranitev splošnosti svoje strukturalne analize enačbe pripravljen dopustiti ne le negativne korene, temveč tudi imaginarne korene, kljub sicer intuiciji popolnoma nasprotujoči naravi le-teh. Da bi lahko zapopadli, kako radikalno je to, kar počne, moramo najprej povedati nekaj več o naravi algebre in Descartesovem mestu v njenem razvoju.

II. Izvirnost Descartesovega pristopa

Geometrijska algebra

Značilna poteza algebre je njena abstraktnost. Obsega matematične strukture, definirane v popolnoma operativnih in relacijskih izrazih, brez vsake omejitve glede na lastnosti *operandov.* Natančno rečeno, nima nikakršne lastne vsebine, temveč pridobi vsebino le skozi interpretacijo. Tako razmišljamo o algebri danes, vendar ni bila vedno pojmovana na tako abstrakten način; razlikujemo lahko dve ključni stopnji v njenem razvoju: osvobajanje števila od prostorske intuicije ter osvoboditev same algebre od izključno numerične interpretacije. K razvoju prve je v veliki meri prispeval Descartes. Vendar pa izvirnost Descartesovega algebraičnega pristopa ni vedno cenjena. Še skoraj do nedavnega je veljalo, da so Grki obvladali »geometrijsko algebro«, to je postopek ukvarjanja s pristno algebraičnimi problemi, ki je zaradi krize, nastale s pitagorejskim odkritjem linearne inkomenzurabilnosti, rezultirala v geometrijski formulaciji in razrešitvi teh problemov. Dokazovalo se je, da je bila ta geometrijska algebra pozneje ponovno odkrita, v delih Descartesa in

[3] Glej Grosholz, »Descartes' Unification of Algebra and Geometry«, v: S. Gaukroger (ur.), *Descartes, Philosophy, Mathematics, and Physics,* Harvester, Sussex 1980, str. 156–168.

[4] Glej predvsem J. Vuillemin, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes,* PUF, Pariz 1960, [2]1987.

drugih je izgubila svoj geometrijski jezik in tako postala bolj splošna. Sporno je, ali lahko geometrijske formulacije in rešitve določenih vrst matematičnih problemov pri Grkih tolmačimo kot algebro v geometrijski preobleki. Ni mogoče zanikati, da je npr. pri Evklidu mnogo matematičnih izjav, za katere zlahka najdemo ekvivalentne algebraične rezultate. Še več, mnogim izjavam iz druge knjige Evklidovih *Elementov* je mogoče poiskati zelo neposredno algebraično interpretacijo, medtem ko so bile vedno opazne težave z njihovo čisto geometrijsko interpretacijo. Videti je navsezadnje, kakor da je bila geometrijska algebra natanko tisto, kar je predstavljalo odgovor na krizo v matematiki, sproženo z odkritjem linearne inkomenzurabilnosti, z odkritjem, ki mu razpoložljivi aritmetični postopki niso bili kos.

Dvomi v takšno vrsto interpretacij so dejansko obstajali vse od tridesetih let dvajsetega stoletja, toda šele pred nedavnim se je začelo v splošnem priznavati, da je nekaj narobe s pogledom geometrijske algebre. Jacob Klein je npr. v svojem pionirskem delu o zgodnjem razvoju algebre pokazal, da so bile potrebne zelo radikalne spremembe v konceptu števila, predno je algebra postala možna, ter da te niso bile realizirane vse do Vietajevega dela ob koncu šestnajstega stoletja.[5] Drugič je zdaj očitno, da je bila pitagorejska geometrija ploskev, ki je bila sicer daleč od tega, da bi bila geometrijska algebra, posvečena reševanju problema inkomenzurabilnosti, v resnici namenjena ukinitvi tega, kar je veljalo za nerešljiv problem.[6] Tretjič imajo vse izjave iz Evklidovih *Elementov* v resnici geometrijske interpretacije[7] in v številnih primerih jih njihova algebraična predstavitev preprosto trivializira.[8] Verjamem, da je sklep, ki ga moramo iz tega izpeljati, da preprosto ni nobenih dokazov, ki bi podpirali tradicionalno trditev, da so grški matematiki operirali s kakršno koli pristno algebraično idejo, zavestno ali kako drugače.

Vendar reči, da Grki niso operirali z geometrijsko algebro, ne pomeni, da geometrija ni igrala pomembne vloge v grški aritmetiki. Dejansko je igrala zelo pomembno vlogo, toda vlogo prav nasprotno tradicionalni interpretaciji, ker je prej zmanjšala kot pa povečala abstraktnost aritmetike. Razumevanje te vloge je pomembno, če naj popolnoma ovrednotimo izvirnost Descartesove algebre; njegov pristop je smiselno primerjati z zelo vplivno obravnavo števila, ki jo je ponudil Aristotel v svoji *Metafiziki*.[9]

---

[5] J. Klein, *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, MIT Press, Cambridge, Mass. 1968.

[6] A. Szabó, *The Beginnings of Greek Mathematics*, Reidel, Dordrecht 1978, predvsem dodatek.

[7] Glej predvsem razpravo o petem izreku iz druge knjige *Elementov*, *ibid.*, str. 332-353.

[8] S. Unguru, »On the need to rewrite the history of Greek mathematics«, v: *Archive for History of Exact Scirences* XV (1975–6), str. 67–114.

[9] Kar sledi, je izpeljano iz S. Gaukroger, »Aristotle on intelligible matter«, v: *Phronesis* XXV (1980), str. 187–97, kjer je mogoče najti veliko popolnejšo obravnavo.

Aristotelovo pojmovanje: število, materija in prostor

Za Aristotela so matematični predmeti materialni, in to njihovo materijo imenuje »noetična materija«. Matematika je za Aristotela odlikovana z dejstvom, da se njeni predmeti ne spreminjajo in nimajo neodvisne eksistence. Ti predmeti so noetični, v nasprotju s čutnimi, do njih pa pridemo skozi abstrahiranje od »čutnih« števil in oblik, se pravi števil in oblik čutnih predmetov. Čutne predmete tvori čutna materija, Aristotel pa meni, da morajo biti matematični predmeti narejeni iz noetične materije. Ta nauk privzema, ker verjame, da so števila ter oblike lastnosti, in da morajo biti lastnosti vedno nečemu vpisane. Čutna števila in oblike so uprimerjene v čutni materiji, toda noetična števila in oblike to ne morejo biti, ker so zgolj predmeti mišljenja; kljub temu, ker so lastnosti, morajo biti v nečem uprimerjene in tako Aristotel odkrije novo obliko čisto abstraktne materije, v kateri so uprimerjena števila in oblike.

Aristotel v primeru geometrije uporablja dve različni vrsti abstrakcije. Prva vključuje neupoštevanje materije čutnih predmetov, tako da nam ostanejo le lastnosti kot »biti trikoten« in »biti okrogel«. Geometrija raziskuje »biti okrogel« v zelo splošnih izrazih kot obliko česarkoli, kar je, najbolj splošno rečeno, okroglo. In karkoli je, najbolj splošno rečeno, okroglo, je nekaj, do česar pridemo s komplementarnim načinom abstrakcije, pri kateri prezremo lastnosti čutnih objektov, tako da postane predmet raziskave tisto, kar ima te lastnosti. Tako nam preostane podlaga nedoločene razsežnosti [idetermina-te extension], določen zgolj v izrazih prostorskih dimenzij: dolžine, širine in globine. To abstrakcijo je mogoče peljati naprej, s čimer dobimo ravnine ter nazadnje premice in točke, pri čemer ima vsaka od teh podlag različno dimenzijo. Te podlage ne morejo niti biti čutne, ker so bile oropane lastnosti, ki bi jih prikazale kot čutne, niti ne morejo imeti neodvisne eksistence, saj so samo abstrakcije in so to, kar Aristotel imenuje noetična materija..

Aristotel pravzaprav isto trdi o številih, kar pa je bolj problematično. Geometrijsko noetično materijo si lahko predstavljamo kot prostore z eno, dvema ali tremi dimenzijami, toda kako naj si predstavljamo noetično materijo števila? Odgovor je: na približno enak način – pod pogojem da upoštevamo, da v grški matematiki, za razliko od geometrije, ki operira s premicami, aritmetika operira z njihovimi *dolžinami** (ali površinami oz. prostorninami). Razlika je izjemnega pomena, česar se je Aristotel dobro zavedal. Dolžino daljice, dokler je le-ta določene dolžine, je mogoče razumeti kot potencialno deljivo v diskontinuirane dele, se pravi, v določeno mnoštvo enotskih dolžin. Šele z

* Izraz za *premico* z določeno dolžino (na obeh straneh omejeno premico) je v slovenskem jeziku *daljica*, medtem ko se v angleščini za oboje uporablja *line* oz. *straight line*. (Op. prev.)

obravnavanjem npr. dolžine stopala kot nedeljive dolžine, lahko to dolžino obravnavamo kot enotsko, kot mero drugih dolžin (primerjaj prvo knjigo Aristotelove *Metafizike*). In v tem primeru dolžina daljice postane dejansko isto kot število, ki ga Aristotel definira kot mnoštvo merjeno z enoto oz. »enim«. Osrednja razlika med aritmetiko in geometrijo leži v dejstvu, da se prva ukvarja z diskontinuiranimi, druga pa z kontinuiranimi velikostmi. Premica razumljena preprosto kot premica vstopi v sfero geometrije zato, ker je neskončno deljiva in ima potemtakem kontinuirano velikost, toda razumljena kot enotska dolžina ali vsota enotskih dolžin vstopa na področje aritmetike.

V izrazih te razlike lahko jasno vidimo kaj pomeni aritmetika v Aristotelovem pojmovanju: je metrična geometrija. Čeprav nikoli eksplicitno ne omenja metrične geometrije, njegova aritmetična terminologija – *linearna, ploskovna* in *prostorska* števila, *merjena* števila, faktorji, ki *merijo* produkte pri množenju – konsistentno nakazuje, da gre za pojmovanje aritmetike, ki mu je bilo samoumevno. Metrična geometrija je v resnici bistveno aritmetična disciplina, skupna vsem starim matematikom od starobabilonskega obdobja do aleksandrijcev.[10] V pričujočem kontekstu njen pomen leži v dejstvu, da se kljub ukvarjanju s premicami, ravninami itn., ukvarja z njimi ne *qua* premicami in ravninami, temveč *qua* enotskimi dolžinami in enotskimi površinami oz. vsotami ali produkti takšnih enotskih dolžin in površin. Aristotel v svojih delih vseskozi govori o številih v eni dimenziji, ravninskih številih in prostorskih številih ter nikoli ne vpelje ideje geometrične *predstave* števil. Dejansko tudi noben grški ali aleksandrijski avtor ne govori o številih, predstavljenih geometrijsko. Poučno na tem mestu je, da so aritmetične izjave v Evklidovih *Elementih*, ki sestavljajo knjige od VII do IX, eksplicitno izražene v terminih dolžin daljic, kot da bi števila bila dolžine daljic. In natančno to tudi so.

Aristotel ni bil v matematiki nikoli inovator. Ni nameraval razviti nove oblike matematike, temveč zagotoviti pravo filozofsko osnovo za matematiko njegovega časa. To, čemur zagotavlja osnovo v primeru aritmetike, ni oblika aritmetike, ki je zaradi svoje utemeljenosti v geometrijski algebri posebej abstraktna in splošna, temveč predvsem oblika aritmetike, ki je zaradi utemeljenosti na izrazih metrične geometrije, odvisna od prostorskih predstav, in je posledično resno omejena. Vzemimo npr. aritmetično operacijo množenja in posebej spremembo dimenzije, ki jo vključuje ta operacija, ter se pojavlja v produktu, ki ima vedno višjo dimenzijo. To ni omejenost zapisa; notranje je povezana z idejo, da so števila za grške matematike vedno števila *nečesa*. Posledica tega je, da moramo, ko množimo, množiti števila nečesa: ne moremo

---

[10] O zgodnjem razvoju metrične geometrije glej W. R. Knorr, *The Evolution of the Euclidean Elements*, Reidel, Dordrecht 1975, str. 170. sl.

npr. množiti dva krat tri, vedno moramo množiti dva nečesa krat tri nečesa. V tem smislu je Klein pri Grkih števila imenoval »determinirana«. Ne simbolizirajo splošnih velikosti, temveč vedno določajo mnoštvo predmetov.[11] Poleg tega v aritmetičnih operacijah niso ohranjeni samo dimenzijski vidiki, temveč tudi fizična in intuitivna narava teh dimenzij, tako da npr. ni mogoče zmnožiti med seboj več kot treh dolžin, ker je nastali produkt prostorsko telo, ki izčrpa število razpoložljivih dimenzij.[12]

Kartezijanska algebra in abstrakcija

Descartes eksplicitno nasprotuje temu prostorskemu pojmovanju. Na začetku *Geometrije*, potem ko nam je pokazal geometrijske postopke za množenje in iskanje kvadratnih korenov, vpelje posamezne črke, da bi označil dolžine daljic. Toda njegova interpretacija teh črk je pomenljivo drugačna od tradicionalne interpretacije. Če je po tradicionalni interpretaciji a dolžina daljice, je a^2 kvadrat s stranicami dolžine a, ab je pravokotnik, ki ima stranice dolžine a in b, a^3 pa je kocka z dolžinami stranic a. Vendar pa so po Descartesovi interpretaciji vse te količine dimenzijsko homogene:

> Opozoriti je tudi treba, da se morajo vsi deli ene in iste črte praviloma izraziti z enako razsežnostmi tako eni kot drugi, medtem ko enota v problemu sploh ni določena: tako a^3 vsebuje toliko razsežnosti kot ab^2 ali b^3, ki so sestavni deli črte, ki sem jo imenoval $\sqrt[3]{va^3 - b^3 + ab^2}$ (AT VI 371)

Tu je premestitev med aritmetiko in geometrijo nekaj, kar podpira abstrahiranje operacij, ne nekaj, kar njihovo abstrakcijo omejuje, kot pri starih pojmovanjih. Odločilno je vprašanje ravni abstrakcije. Pri antičnih matematikih je nekdo lahko trdil, da je rešil matematični problem le, če je bil sposoben konstruirati ali izračunati določen lik ali število. Še več, edina števila, ki so bila dopustna kot rešitve, so bila naravna števila: negativna števila so bila še posebej »nemogoča« števila. Res je, da se proti koncu aleksandrijskega obdobja, najbolj opazno v Diofantovi *Aritmetiki*, pojavljajo iskanja problemov in rešitev, povezanih s splošnimi velikostmi, vendar iz teh postopkov nikoli ni nastalo nič drugega razen pomožnih tehnik v stanju pred končno stopnjo, ko se določeno število izračuna. Descartes temu pogledu eksplicitno nasprotuje in v pra-

---

[11] J. Klein, *op. cit.*, str. 133 sl.

[12] Edina izjema k tej omejitvi pri množenju se pojavlja v relativno poznem aleksandrijskem delu, Heronovi *Metrica* I 8, kjer sta dva kvadrata, se pravi, površini zmnoženi med seboj.

vilu XVI, med *Pravili kako naravnavati umske zmožnosti*, z zelo jasnimi izrazi pojasnjuje nasprotje med njegovim in tradicionalnim pristopom:

> Da bi vse to jasneje razumeli, je treba biti najprej pozoren na to, da so aritmetiki označili posamične velikosti z več enotami oziroma z nekim številom, mi pa, nasprotno, tu nič manj ne abstrahiramo od samih števil, kot <smo> malo prej <abstrahirali> od geometrijskih likov, ali česarkoli drugega. To delamo zato, da bi se izognili razvlečenosti dolgega in nepotrebnega računanja, predvsem pa, da bi deli v obravnavi, ki sodijo k naravi problema, ostali vedno razločeni in ne bi bili zakriti z nekoristnimi števili. Če npr. iščemo hipotenuzo pravokotnega trikotnika, katerega dani stranici sta 9 in 12, bo aritmetik rekel, da je ta v $\sqrt{225}$ oziroma 15, mi pa bomo namesto 9 in 12 napisali *a* in *b* in odkrili, da je hipotenuza v $\sqrt{a^2 + b^2}$. Tako bosta tista dva dela, a^2 in b^2, ki sta bila spojena v številu, ostala razločena. ... Mi, ki iščemo jasno in razločno spoznanje stvari, vse te stvari razločujemo, <tega> pa ne <delajo> aritmetiki, ki so zadovoljni, če pridejo do iskanega rezultata, četudi ne opazijo, kako je ta odvisen od tistega, kar je dano; to pa je pravzaprav prava znanost. (AT X 455-6, 458)

Za Descartesa je ukvarjanje s splošnimi velikostmi konstitutivno za matematično obravnavo. Nobenih števil ali likov ne ocenjuje za »nemogoče« na intuitivni osnovi. Dejanskoi rade volje sprejme čisto algebraične omejitve, ki zahtevajo takšno razširitev »števila«, da ne bi vsebovalo zgolj celih števil, pač pa tudi ulomke in iracionalna števila. Strukturalna analiza enačbe ga je pripeljala do tega, da je sprejel negativne in imaginarne korene. Tu je naša intuicija glede tega, kaj so števila, žrtvovana strukturalni definiciji števila, ki jo predpisuje algebra.

V tem pogledu Descartes odpira razvoj, v katerem se zbirka predmetov, ki sodijo v kategorijo »števila«, razširja in utrjuje, medtem ko se povečuje splošnost algebre in njena pravila operacij definirajo kot števila nove vrste bitnosti. Kot je pokazal Kneale,[13] je bil odnos matematikov do razširjanja ideje števila, vse do vpeljave kompleksnih števil in vključno z njo, nereflektiran. Ohranitev splošnih pravil algebre je od njih zahtevala vpeljavo novih oblik bitnosti, katere so bili prisiljeni sprejeti, da bi rešili probleme, zastavljene na zgodnejši stopnji, vendar si niso zastavljali nikakršnih splošnih vprašanj glede tega postopka. Položaj se je spremenil v poznih tridesetih in zgodnjih štiridesetih letih devetnajstega stoletja. Najprej so Peacocke, Gregory in de Morgan pričeli dojemati algebro v tako abstraktnih matematičnih izrazih, da kot *operandi* v

[13] W. Kneale in M. Kneale, *The Development of Logic*, Oxford University Press, Oxford 1962, str. 390 sl.

njenih operacijah sploh niso več nujno nastopala števila. Zatem se je Hamilton začel ukvarjati z algebro hiperkompleksnih števil, katera, ker so definirana z algebraičnimi operacijami, ne zadovoljujejo vseh pravil, ki veljajo za kompleksna števila. Ti dve obliki razvoja sta nakazovali, da je algebra lahko splošnejša, kot se je mislilo. V tem kontekstu si je bil George Boole, v očeh mnogih utemeljitelj sodobne formalne logike, sposoben zamisliti abstraktni račun za logiko. Ko je pokazal, kako je mogoče zakone algebre formalno izraziti brez interpretacije in kako zakoni, ki veljajo za števila do kompleksnih števil, ne veljajo nujno vsi skupaj v vsakem algebraičnem sistemu, je lahko nadaljeval z razvojem omejene algebre, ki je predstavljala operacije tradicionalne silogistike.

Osvobojena svoje izključno numerične interpretacije je algebra postane veliko močnejša priprava, njena aplikacija v logiki pa jo je neposredno peljala k najbolj temeljnim vprašanjem. Takšen razvoj predstavlja nadaljevanje Descartesovega dela v algebri, vendar je to nadaljevanje tuje Descartesovemu pristopu. Da bi razumeli, zakaj je tako, moramo pogledati, kaj Descartes šteje za metodološko posebnost algebre.

Algebra, dedukcija in kartezijanska »analiza«[14]

Descartes kot smo videli trdi, da medtem, ko so se zgodnji matematiki ukvarjali izključno z izračunavanjem določenih numeričnih rešitev enačb, on sam abstrahira iz števil, ker ga zanimajo strukturne značilnosti samih enačb. Na tem mestu je zdaj mogoče povleči neposredno analogijo z logiko. Če naj o logiki razmišljamo v algebraičnih izrazih, tako kot Descartes razmišlja algebraično o aritmetiki, moramo abstrahirati iz delnih *resnic* (tako kot Descartes abstrahira iz posameznih *števil*) in raziskati odnos med resnicami neodvisno od njihove vsebine, v abstraktnih strukturalnih izrazih. Toda ta premik k višjemu nivoju abstrakcije, ki se ga bežno dotakne Leibniz, in ki je konstitutiven za moderno logiko in filozofijo matematike, je bil Descartesu popolnoma tuj. Descartes ni videl možnosti razlage logike kot podaljška njegovih algebraičnih tehnik, ker je dojemal logiko (ki je bila zanj aristotelovska silogistika) kot odvečno metodo predstavitve že doseženih rezultatov, medtem ko je za algebro menil, da je nekaj popolnoma drugega, namreč metoda odkrivanja novih rezultatov. Vprašanje metode je bilo obravnavano drugje v tem besedilu, kljub temu nekaj besed o specifični povezavi z algebro na tem mestu ne bi bilo odveč.

---

[14] Za podrobno razpravo o temah, izpostavljenih v tem poglavju, glej S. Gaukroger, *Cartesian Logic*, Oxford University Press, Oxford 1989.

Ko Descartes v pravilu IV iz *Pravil, kako naravnavati umske zmožnosti,* razpravlja o potrebi po 'metodi odkrivanja resnice', usmerja svojo pozornost k matematiki. Pove nam, da mu je bila matematika, ko jo je prvič študiral, nezadovoljiva. Čeprav so rezultati, ki so jih dobili matematiki resnični, niso pojasnili, kako so prišli do rezultatov in v veliko primerih kaže, kakor da gre bolj za srečo kot za veščino. Dokaj razumljivo so mnogi zaradi tega matematiko zavrnili kot prazno in otročjo. Vendar pa so začetniki filozofije v antiki postavili matematiko za prvi pogoj proučevanja modrosti. To je navedlo Descartesa na misel, da so morali imeti »matematiko, kaj različno od tiste, ki jo uče za naših dni« (AT X 376; slov. prev.* str. 120) in skušal je najti sledi te »resnične matematike« v pisanju Pappusa in Diofanta. Toda omenjena avtorja sta se bala, »»da bi njuna matematika izgubila kaj ugleda, ko bi se zaradi lahkote in enostavnosti razširila med vse ljudi, in sta se zato odločila, da nam namesto nje prikažeta kot sadove svoje umetnosti nekaj sterilnih resnic, strogo deduciranih že iz zaključkov <njune prave metode>.« (AT X 376-7; slov. prev., str. 121–122).

Umetnost raziskovanja, za katero je Descartes verjel, da jo je ponovno odkril, je to kar imenuje »analiza«. V antiki sta bili analiza in sinteza komlementarna postopka in Pappus je razlikoval dve vrsti analize: »teoretično analizo«, pri kateri poskušamo dokazati resnico teorema in »problematično analizo«, pri kateri poskušamo odkriti nekaj neznanega. Če so ti postopki uspešno dokončani, moramo naše rezultate nato potrditi s sredstvi sinteze, pri čemer začnemo iz definicij, aksiomov in pravil ter naše rezultate deduciramo izključno iz njih. Antični matematični teksti, ki so se ukvarjali s strogim dokazovanjem, so predstavili zgolj sintetične dokaze. Descartes naredi dvoje: učinkovito omeji »analizo« na problemsko analizo in popolnoma zavrne potrebo po sintezi. Slednje postane očitno takoj, ko si bežno pogledamo *Geometrijo.* Tradicionalni seznami definicij, postulatov itn. so popolnoma odsotni in takoj smo soočeni s tehnikami reševanja problemov. Za Descartesa je cilj te vaje, cilj, ki ga, kot verjame, lahko omogoči na sistematičen način le algebra, reševanje problemov. Ko je enkrat problem rešen, je za Descartesa predstavitev rezultatov v sintetičnih izrazih popolnoma odveč. Splošneje rečeno, to pomeni zavračanje vrednosti deduktivnega sklepanja v matematiki.

To je eden izmed najbolj problematičnih delov Descartesovega pojmovanja algebre in v tej zadevi se razhaja ne le z modernimi matematiki, temveč tudi s svojimi sodobniki. Vir problema se po njegovem mnenju nahaja v tem,

---

* René Descartes, *Razprava o metodi kako pravilno voditi razum ter v znanostih iskati resnico; Pravila kako naravnavati umske zmožnosti,* prevedel Boris Furlan, Slovenska matica, Ljubljana 1957. (Op. prev.)

da deduktivni sklep ne more imeti nikakršne spoznavne vrednosti in ne more igrati nobene vloge v razvoju vednosti. Leibniz je bil prvi filozof, ki se je v celoti odzval na ta pogled; pokazal je, da v tem, ko so lahko analize koristne kot način reševanja posameznih problemov, pa v sintetični oz. deduktivni predstavitvi rezultatov v matematiki sprožimo sistematično strukturiranje in širitev vednosti, ki omogoča prepoznavanje, natančno identifikacijo in razrešitev zagat, težav, pomanjkljivosti itn.

Kakorkoli, problem je globok in mnogo filozofov je postavilo pod vprašaj položaj dedukcije. Sekst Empirik, eden najpomembnejših antičnih skeptikov, je nasproti deduktivnemu sklepu ponudil naslednji bistroumen argument.[15] Primerjajmo naslednja sklepa:

	A	*B*
(1)	Če je dan, je svetlo.	Dan je.
(2)	Dan je.	Svetlo je.
(3)	Svetlo je.	

A predstavlja deduktivni dokaz, *B* nededuktivnega. Sekstov dokaz je v tem, da so deduktivna sklepanja vedno po lastnih kriterijih pomanjkljiva. V prikazanem primeru npr. ali (3) sledi iz (2) ali pa ne. Če sledi, potem je *B* popolnoma sprejemljiv sklep, kajti v *B* preprosto sklepamo na (3) iz (2). Vendar, če to drži, je izjava (1) očitno odvečna. Po drugi strani, če (3) ne sledi iz (2), potem je (1) neresnična izjava, kajti (1) jasno trdi, da [(3) sledi iz (2)]. Tako deduktivni sklep ni možen: kar nam *A* pove več od *B*, je ali odvečno ali neresnično. Ni bilo veliko filozofov, ki bi bili pripravljeni iti tako daleč kot Sekst, vendar jih je mnogo izražalo splošno zaskrbljenost glede smisla dedukcije. Nekateri, kot J. S. Mill, so bili mnenja, da premise v deduktivnih sklepanjih vsebujejo iste trditve kot sklep, ter da so sklepanja dejansko zaradi tega veljavna.[16] Na tem mestu je treba zastaviti vprašanje glede smisla deduktivnih sklepanj. Drugi, kot npr. logični pozitivisti, so trdili, da so logične resnice analitično resnične in zato se iz njih nikoli ne moremo naučiti ničesar novega.

To zagotovo ne more biti res, kajti včasih se naučimo česa novega tudi iz deduktivnih dokazov. Poglejmo si npr. prvo Hobbesovo srečanje z Evklidovimi *Elementi*, kot ga opisuje Aubrey v svojih *Brief Lives*:

> Ko je bil v knjižnici za gospode, so Evklidovi *Elementi* ležali odprti na 47 El. libri I. Prebral je izrek. Za B –, je dejal (tu in tam je s poudarkom izustil zanosno kletev), to je nemogoče! Tako je prebral njegov dokaz,

---

[15] Seextus Empiricus, *Outlines of Pyrrhonism*, II, 159 (V izdaji Loeb: zv. I, str. 253-255).
[16] Glej drugo Millovo knjigo, *A System of Logic* [1843], Longmans, London 1976.

> ki ga je napotil na naslednjega, ki ga je prav tako prebral. [In tako naprej] da je bil naposled nazorno prepričan v njegov resničnost. Tako se je zaljubil v geometrijo.[17]

Hobbes ne začne zgolj s tem, da v nekaj ne verjame, temveč celo s tem, da ne verjame, da je kaj takega sploh mogoče; veriga deduktivnega sklepanja pa ga prepriča v nasprotno. Gre za očiten primer spoznavnega napredovanja, se pravi, Hobbes konča s prepričanjem, ki ga sicer ne bi bil dosegel in za to novo prepričanje je odgovorno čisto deduktivno sklepanje. Res je, da vsa deduktivna sklepanja s seboj ne prinašajo spoznavnega napredka: sklepanje »če *p*, potem *p*« očitno ne vsebuje spoznavnega napredovanja, čeprav gre za formalno veljaven deduktivni sklep. Descartes zgreši pravo pot s tem, ko zanika, da *katerikoli* deduktivni sklep vsebuje spoznavno napredovanje. Kakor kaže Hobbesov primer, to ni preprosto razvidno.

Nadalje, tudi če deduktivni sklep ne *bi mogel* nikoli povzročiti spoznavnega napredovanja, bi vseeno imeli dober razlog za ukvarjanje s sistematičnimi odnosi med resnicami, npr. med geometrijskimi resnicami in aritmetičnimi resnicami, kajti dokaj pomembno je, da vemo, na kakšen način nekatere izhajajo iz drugih in natančno v čem je bistvo tega »slediti iz«. Toda Descartes predpostavlja, da je spoznavno napredovanje edini kriterij, ki ima vrednost, to pa ga vodi v opustitev vsega, za kar meni, da ni metoda raziskovanja. Algebro razume kot metodo raziskovanja *par excellence*, in natanko zato, ker jo dojema na tak način, mu je zaprta možnost razmišljanja o dedukciji v algebraičnih izrazih.

III. Aplikacija matematike na realnost

Abstraktna narava algebre, kot se je zavedal Descartes, je vir njene moči. Vendar je tudi potencialni vir težav, kajti če je matematika tako abstraktna kot zatrjuje Descartes, lahko njen odnos do materialnega sveta postane problematičen. To je za Descartesa posebej pomembno vprašanje, ker želi razviti matematično fiziko, popolnoma matematično razlago materialnega sveta. Descartes obravnava vprašanje matematične fizike v *Pravilih kako naravnavati umske zmožnosti* na način, ki med seboj povezuje matematiko, epistemologijo in naravoslovje, njegov prispevek pa ni uporaben zgolj kot pomoč pri razumevanju načina, kako razmišlja o tem, da bi lahko nekaj tako abstraktnega kot algebra povezal z naravnim svetom, temveč tudi kot osvetlitev njegovega razmišljanja glede vprašanja, v čem ta abstraktnost obstaja.

---

[17] *Aubrey's Brief Lives*, ur. Oliver Lawson Dick, Secker in Warburg, London 1960, str. 150.

Enostavne narave

V *Pravilih* Descartes ves čas vztraja, da mora spoznavanje začeti s tem, kar imenuje »enostavne narave«; to so tiste stvari, ki jih ni mogoče dalje analizirati in katere lahko zapopademo na neposreden in intuitiven način. Takšne enostavne narave je mogoče zapopasti le z razumom, čeprav »moremo sicer ugotoviti, da je samo intelekt zmožen znanstvenega spoznanja, da pa mu morejo biti pri tem v pomoč ali v oviro tri druge sposobnosti, namreč imaginacija, čuti in spomin.« (AT X 398; slov. prev. str. 143) V pravilu XIV je povezava med razumom in imaginacijo izpeljana na dokaj zanimiv način:

> Z 'razsežnostjo' razumemo vse tisto, kar ima dolžino, širino in globino, ne da bi se spraševali, ali je to resnično telo ali zgolj prostor. Zdi se, da to ne potrebuje nadaljnjega pojasnjevanja, kajti naša imaginacija nič ne zaznava lažje kot to ... Kajti četudi bi kdo, ob predpostavki, da je vse razsežno izničeno, lahko prepričal samega sebe, da to ne bi preprečilo obstoja razsežnosti same na sebi, za ta koncept ne bi uporabil telesne ideje, temveč samo slabo presojajoč razum. To bo tudi sam priznal, če bo pozorno razmislil o podobi te razsežnosti, ki jo bo tedaj skušal upodobiti v svoji fantaziji. Opazil bo namreč, da je ne zaznava brez vsakega subjekta, temveč da si jo popolnoma drugače predstavlja, kot jo presoja; in dodajam (ne glede na to, kaj naš razum) verjame glede resnice stvari <v obravnavi>), *da tiste abstraktne entitete v fantaziji niso nikoli tvorjene ločeno od subjektov.* (AT X 442–3)

Descartes nadaljuje s trditvijo, da medtem, ko sta »razsežnost« in »telo« zastopana v imaginaciji z eno in isto idejo, to za razum ne velja. Ko rečemo, da »število ni števna stvar« ali da »razsežnost ali oblika ni telo«, sta pomena »števila« in »razsežnosti« tukaj takšna, da jima v imaginaciji ne ustrezajo nobene posebne ideje. Ta dva stavka sta »delo čistega razuma, ki ima sam sposobnost ločevanja abstraktnih bitnosti te vrste« (AT X 444). Descartes vztraja, da moramo ločiti tiste vrste stavke, v katerih so pomeni izrazov ločeni od vsebine idej v imaginaciji, od stavkov v katerih izrazi, čeprav »se izrekajo na isti način v abstrakciji od njihovih subjektov, kljub temu ne izključujejo ali zanikajo ničesar, od česar se realno ne razlikujejo« (AT X 445).

Razum in imaginacija

Razlika med dvema vrstama izjav je nemara najbolj jasno izražena v razliki med njunimi lastnimi predmeti, to je med predmeti razuma in predmeti imaginacije. Lastni predmeti razuma so popolnoma abstraktne bitnosti in osvobojeni podob ali »telesnih predstav«. Ko se ukvarja s svojimi lastnimi dejavnostmi, se razum zares »sam obrne proti sebi« (AT VII 73) in zre tiste stvari, ki so čisto razumske, kot misel in dvom, kot tudi tiste »enostavne narave«, ki so skupne tako duhu kot telesu, kot so eksistenca, enotnost in trajanje. Vendar se razum lahko usmeri tudi k »idejam« v imaginaciji. Na ta način izvršuje tudi operacijo, ki ji je lastna, vendar pa je imaginacija ni sposobna izpeljati, namreč, izločanja komponent teh idej z abstrahiranjem.

Na tem mestu se pojavi potreba po imaginaciji, kajti razum sam nima sploh nikakršne povezave s svetom. Bitnosti, ki jih dojame razum, so nedoločene. Imaginacija je potrebna, da bi postale določene. Ko npr. govorimo o številih, moramo uporabiti imaginacijo, da bi nam prikazala nekaj, kar je mogoče izmeriti z mnoštvom predmetov. Razum dojema »pet-nost« [fiveness] kot nekaj ločenega od petih predmetov (ali odsekov premice, ali točk, ali česarkoli) in tako je potrebna imaginacija, če naj ta »pet-nost« ustreza nečemu v svetu. To, s čimer imamo tu dejansko opraviti, je, vsaj kar zadeva razum, algebra. To drži vse dotlej, dokler je predmete algebre, katerih nedoločeno vsebino je izločil razum, mogoče prikazati in dojemati simbolno, kot premice in ravnine, ki jih je mogoče identificirati z dejanskim svetom. Algebra se ukvarja s popolnoma abstraktnimi bitnostmi, dojetimi v razumu, toda te abstraktne bitnosti morajo biti predočene simbolno in s tem prikazane kot določene, kar zahteva pomoč imaginacije. Imaginacija na ta način predočuje *splošne* velikosti (abstraktne bitnosti) kot *določene* velikosti (ki se ne razlikujejo od tega, česar velikosti so).

Vseeno vsaka vrsta določene velikosti tu ne bo primerna. Privilegirana določena velikost, ki jo želi Descartes izbrati, je prostorska razsežnost. Za to obstajata dva razloga. Prvič, algebraične bitnosti je mogoče prikazati geometrijsko, se pravi v izrazih čiste prostorske razsežnosti. Drugič, Descartes trdi (npr. v pravilu XII) da tedaj, ko se ukvarjamo s fiziološkimi, fizikalnimi in optičnimi vidiki zaznave, postane jasno, da to kar vidimo na noben način ni podobno telesom v svetu. Sam svet ne vsebuje barv, vonjev itn. (nobenih sekundarnih kvalitet) temveč zgolj prostorsko razsežno telo. Sekundarne kvalitete, ki jih zaznavamo, so preprosto značilnosti interakcije naših čutnih organov, spoznavnega aparata itn., z zunanjim svetom. So psihični dodatki zaznavajočega duha. Tako je svet samo enostavno prostorsko razsežno telo in kar se zabeleži v imaginaciji niso nič drugega kot preprosto prostorsko razsežne velikosti.

Skratka, fizični svet in abstraktne bitnosti algebre so potemtakem v imaginaciji predočene kot razsežne velikosti oz. kot merila razsežnih velikosti, pri čemer se prve preslikajo v slednje:

razum	abstraktne bitnosti (algebra)
	↓
imaginacija	premice, dolžine daljic, itn. (geometrija in aritmetika) razsežne velikosti
	↑
fizični svet	materialni predmeti (materialna razsežnost)

V tej shemi se čisto mišljenje, značilno za algebro, s katero se ukvarja razum, neposredno ne preslika v fizični svet. Prej gre za to, da se njegov prikaz v obliki aritmetike in geometrije preslika v prikaz fizičnega sveta, v prikaz, ki se sestoji iz izključno dvodimenzionalnih oblik. To pojmovanje je podvrženo mnogim težavam, kar je mogoče pričakovati iz obravnave, ki zadeva tako temeljna vprašanja, vendar pa nam zagotavlja prvi eksplicitni epistemološki in metafizični temelj za matematično fiziko v zgodovini filozofije, in v marsikaterem pogledu je njegova vloga v Descartesovi misli celo bolj središčna kot pri »cogitu«.

Sklep

Kar je pri Descartesovem delu v algebri izjemno, je nivo njene abstraktnosti. Ta dosežek je bil vedno postavljen v senco, bodisi z Descartesovo lastno trditvijo, da je bilo vse, kar je počel, samo ponovno odkrivanje skrite metode raziskovanja, znane že antičnim matematikom, bodisi s širše sprejetim modernim pogledom, da so ti matematiki poznali 'geometrijsko algebro', to je, algebraično interpretacijo aritmetike, ki je vsebovala geometrijski zapis. Podal sem nekaj razlogov, zaradi katerih sem prepričan, da takšna razlaga in predvsem slednje ne drži. To, kar so poznali antični matematiki, dejansko ni bila posebna abstraktna algebraična interpretacija aritmetike, temveč predvsem njena posebno konkretna geometrijska interpretacija. Do abstraktne interpretacije pride le s kombinacijo sredstev aritmetike in geometrije, ki proizvede nekaj, kar je veliko močnejše in abstraktnejše, kot vsaka izmed obeh; in to je Descartesov dosežek. Descartes (z Vietajem in drugimi) utemelji to, kar sem prepoznal kot prvo stopnjo v razvoju algebre, namreč osvobajanje števila od prostorske intuicije. To je odprlo pot drugi stopnji, osvobajanju same algebre od izključno numerične interpretacije. Vendar pa je premik k tej drugi stopnji v popolnem nasprotju s celotno vodilno mislijo Descartesovega pristopa. Do tega ni prišlo toliko zaradi tega, ker nas vodi do ravni abstrakcije, ki ji niti sam ni bil naklonjen, kajti njegova zgodnja ideja »univerzalne matematike« je vključevala ekstremno abstraktno (vendar neizvedljivo) pojmovanje matematike, ki presega katerokoli specifično vsebino, ukvarjajoč se zgolj s tem, kar ima red in velikost (AT X 378). Temveč predvsem zaradi njegove zahteve, da naj bo to metoda raziskovanja, kar nadalje pomeni, da mora biti spoznavno informativna. Deduktivni sklep, kot (napačno) misli, ne more biti nikoli spoznavno informativen, zato zavrača vsako povezavo med algebro in logiko. Vendarle se druga stopnja v razvoju algebre zgodi v veliki meri kot rezultat njene uporabe v sistemih deduktivnega sklepanja.

Descartesa potemtakem sploh ni vznemirjala abstraktna narava njegove algebre v matematičnem kontekstu. V več pogledih je še bolj izjemno, da ga ni vznemirjala niti v fizikalnem kontekstu. Njegov poglavitni namen je bil razviti matematično fiziko, matematika pa je za Descartesa konec koncev algebra. Dobro zavedajoč se, vsaj po njegovi zgodnji fazi »univerzalne matematike«, da [matematična fizika] ne more biti zgolj stvar uporabe sistema, tako abstraktnega kot je algebra, na nečem tako konkretnem in specifičnem kot je realni svet, je poskušal dokazati, da imata nekaj bistveno skupnega: geometrijo. Edine dejanske lastnosti snovi so tiste, ki jih je mogoče v celoti razumeti v geometrijskih izrazih, algebra pa je v imaginaciji prikazana v čisto geometrijskih izrazih. Potemtakem je geometrija tista, ki obe med seboj povezuje. To nemara ni najbolj ploden način uvajanja temelja za matematično fiziko,[18] toda sama smelost in bistroumnost zamisli je presenetljiva, in zares je to prvi eksplicite filozofski poskus razčiščevanja do zadnje podrobnosti tega, kako bi lahko bila možna matematična fizika.

Skratka, Descartesovo delo v algebri je nekaj, kar se širi daleč preko same matematike. Zaradi tega dela velja Descartes za enega največjih matematikov sedemnajstega stoletja. Če torej sledimo posledicam, ki jih je imelo njegovo delo v razvoju kvantitativnega mehanskega razumevanja fizičnega sveta, je bil eden izmed največjih naravoslovcev sedemnajstega stoletja; če pa sledimo posledicam, ki jih je imelo za vprašanje metode, je postal njegov največji filozof.

Prevedel Ernest Ženko

[18] Glej Gaukroger, »Descartes' project for a mathematical physics«, v: S. Gaukroger (ur.), *Descartes, Philosophy, Mathematics, and Physics*, str. 97-140.