Filozofski vestnik Letnik/Volume XXI • Številka/Number 1 • 2000 • 81-89

ANTE REM STRUKTURALIZEM

Majda Trobok

Uvod

Kot poudarja Benacerraf, se platonizem v filozofiji matematike sooča z dvema glavnima problemoma, epistemološkim in ontološkim. Glavni epistemološki problem lahko na kratko formuliramo na sledeči način: če vzročna teorija védenja drži in so matematični predmeti abstraktni ter zato vzročno brez učinka, potem ni možno nobeno matematično védenje; ker pa nekakšno matematično védenje imamo, je platonizem nevzdržen. Ontološki problem leži v očitni nedoločenosti: ker je katerokoli polje matematike možno zvesti na teorijo množic, lahko nanjo zvedemo tudi števila; vendar pa so možne različne redukcije aritmetike na teorijo množic, težava pa je v tem, kako določiti, katera je prava.

Ta članek se ukvarja s tem, ali je sodobna doktrina, znana kot »strukturalizem« – oziroma, bolj natančno, različica te doktrine, ki je poznana kot »*ante rem* strukturalizem« –, različica platonizma, ki razreši ta dva problema. Osredotočila se bom izključno na *ante rem* strukturalizem, ki ga je uvedel Shapiro. Z izrazom »*ante rem* strukturalizem« bom označevala prav to različico.

Strukturalizem

Temeljna teza strukturalizma je, da matematika govori o strukturah. Po mnenju strukturalistov velja:

> Matematična knjiga ne opisuje sistema množic ali platonističnih predmetov ali ljudi. Opisuje strukturo oziroma razred struktur. (Shapiro, 1997: 131-2)

Da bi lahko ocenili to tezo, moramo razumeti razlikovanje med strukturami in sistemi: sistem je zbirka predmetov z določenimi relacijami, medtem ko je struktura abstraktna forma sistema.

> ... struktura je vzorec, forma sistema. ... Potemtakem je struktura v takšnem odnosu do strukturiranega, v kakršnem je vzorec do vzorčenega, obče do posameznega, ki ga vsebuje, vrsta do primerka. (Shapiro, 1997: 84)

Ante rem *strukturalizem*

Za *ante rem* strukturalizem je značilna teza, da so strukture pristni predmeti in da obstajajo, čeprav ne bi obstajal noben sistem predmetov, ki bi jih uprimerjal. Vsaka struktura namreč uprimerja samo sebe, ker njena mesta, ki so *bona fide* predmeti, tvorijo neki sistem, ki uprimerja to strukturo. Matematika se ukvarja z abstraktnimi strukturami, kjer je struktura abstraktna forma sistema, v »kateri niso upoštevane vse tiste značilnosti [predmetov], ki ne vplivajo na to, kako so [predmeti] povezani z drugimi predmeti v sistemu«. Strukture niso nujno matematične: o strukturi naravnih števil lahko govorimo na isti način, kot govorimo o šahovski konfiguraciji.

Ontologija

Pojavita se dve vprašanji, ki zadevata ontologijo strukturalizma: eno vprašanje se tiče ontologije matematičnih predmetov, drugo pa ontologije struktur samih.

Ante rem strukturalizem je ontološki realizem o matematičnih predmetih:

> Za strukturaliste nealgebraično področje, kot je aritmetika, govori o predmetih – številih –, ki obstajajo neodvisno od matematikov, aritmetične izjave imajo za njih neprazne, bivalentne, objektivne resničnostne vrednosti glede na to domeno. (Shapiro, 1997: 72)

Ante rem strukturalizma pa vseeno ne moremo enačiti s tradicionalnim platonizmom. Po platonizmu lahko določimo bistvo vsakega števila brez nanašanja na ostala števila. Za platonista (nestrukturalista) je problem v dejstvu, da – čeprav matematična teorija govori o določenih bitnostih – ne moremo dokončno določiti, kakšne vrste predmeti so. Strukturalisti zato zavračajo platonistično stališče, ker:

> Bistvo naravnega števila so njegove *relacije* do drugih števil. ... Bistvo naravnega števila ne pripada več individualnim številom 'samim po sebi', ampak njihovim medsebojnim relacijam. (Shapiro, 1997: 72-3)

Kaj pa je z ontološkim statusom struktur? Ante rem *strukturalizem*

privzame realistični pristop, ki pravi, da strukture obstajajo same po sebi kot legitimni predmeti. Z ozirom na to stališče dana struktura obstaja neodvisno od kakršnegakoli sistema, ki jo uprimerja. (Shapiro, 1996: 149)

Po Shapirovem mnenju so strukture pristni predmeti. Vsaka struktura je univerzalija in vsak sistem, ki jo uprimerja, je primerek; lastnosti struktur so neodvisne od nas. »Matematične trditve beremo po nominalni vrednosti in števniki so singularni termini.« Vendar se ima Shapiro, kar se tiče struktur, za »*metodološkega* platonista«, ne za klasičnega. To pomeni, da kvantificira preko struktur, toda neformalno v istem smislu, kot so vsi klasični matematiki platonisti. Torej ne misli, da je ontološko zavezan strukturi v »strogem« platonističnem pomenu besede. V svojem spisu »Mathemathics and reality« pravi: »Nočem podati nobene drzne ontološke trditve, ki bi (tako in tako) zadevala strukture same.«

Zdi se, da obstajata dve težavi, ki sta povezani s tem stališčem:

1 Po Shapirovem mnenju so številke – tako kot kakršnikoli drugi predmeti – *bona fide* predmeti, »matematični predmeti – mesta v strukturah – so abstraktni in vzročno brez učinka«. Po drugi strani pa odobrava stališče, da se termin »predmet« nanaša na teorijo, za katero gre:

> Naš sklep je, da moramo, vsaj v matematiki, misliti o 'predmetu' kot eliptičnem 'predmetu teorije'... Idejo enega univerzuma, ki je *a priori* razdeljen na predmete, tukaj zavračamo. (Shapiro, 1997: 127)

Če so potemtakem števila *bona fide* predmeti, so vsekakor predmeti *a priori* in ne morejo biti vezani na teorijo.

2 Shapiro se ima za »metodološkega platonista«, ki nima glede struktur nobenih ontoloških obvez. Vseeno pa v svoji knjigi *Philosophy of Matematics – Structure and Ontology* govori o objektivni eksistenci strukture naravnih števil:

> Struktura naravnih števil ima objektivno eksistenco in dejstva o njej niso naš proizvod. (Shapiro, 1997: 137)

To pomeni, da struktura naravnih števil obstaja neodvisno od nas in zato tudi neodvisno od naših jezikovnih sredstev. Po drugi strani pa se zdi, da to stališče postavlja pod vprašanj idejo, da »jezik opredeljuje ali določa strukturo (ali razred struktur), če opredeljuje sploh kaj«.

Gre za to, da je način, kako ljudje dojemamo strukture, in način, kako

> matematični univerzum 'razdelimo' na strukture, sisteme in predmete, odvisen od naših jezikovnih sredstev. (Shapiro, 1997: 137)

To stališče predlaga, da je razlika med strukturami in sistemi odvisna od našega jezika in je zato težko videti, na kakšen način »ni naš proizvod«.

Ante rem *strukturalizem in problem nedoločenosti*

Kot je bilo rečeno v prejšnjem delu, so matematični predmeti samo mesta znotraj struktur; na primer, realna analiza govori o strukturi realnih števil in vse, kar lahko rečemo o realnih številih, sestoji v njihovih strukturalnih lastnostih. Ni mogoče, da bi postulirali samo eno realno število, saj bi to pomenilo, da postuliramo eno mesto znotraj strukture, kar pa ni mogoče brez nanašanja na strukturo kot celoto. Matematične bitnosti nimajo nobenih notranjih lastnosti in so samo položaji v strukturah. Iz tega sledi, da prav tako nimajo nobene identitete zunaj strukture. Shapiro se popolnoma strinja z Resnikom, ko ta pravi, da

> so različni rezultati matematike, za katere se zdi, da kažejo, da imajo matematični predmeti, kot so števila, notranje strukture, na primer njihova identifikacija z množicami, v bistvu znotrajstrukturalna razmerja. (Resnik. 1981: 530)

V skladu s Shapirom celo ontološkemu realistu ni treba odgovoriti na vprašanja, kot je problem Cezar, to je, ni odgovora na naslednje:

> ... nima smisla prizadevati si za identiteto med mestom v strukturi naravnih števil in kakšnim drugim predmetom ... Identiteta med naravnimi števili je določena; identiteta med števili in drugimi vrstami predmetov pa ni, in prav tako ni določena identiteta med števili in položaji drugih struktur. (Shapiro, 1997: 79)

Če hočemo dobiti dokončne odgovore, moramo postaviti vprašanja, ki so notranja strukturi naravnih števil, ker so matematični predmeti vezani na strukturo, katere mesta zasedajo. Torej, čeprav drugače kot Benacerraf, *ante rem* strukturalisti odobravajo stališče, po katerem števila *so* predmeti, namreč predmeti aritmetike. Zato lahko sprašujemo o številih, če so takšna vprašanja notranja strukturi naravnih števil, to je, če sprašujemo o relacijah, ki jih lahko definiramo v jeziku aritmetike.

Tukaj se Shapiro še enkrat strinja z Resnikom, da sprejemanje strukturalizma, to je

> presojanje matematičnih predmetov kot položajev v vzorcih, vodi do

> prevrednotenja matematičnih predmetov, ki se upira ugovoru platonizmu, ki temelji na naši nezmožnosti, da bi popolnoma utrdili njihovo identiteto. (Resnik, 1981: 530)

Zdi se, da sta v Shapirovi teoriji dve težavi:

1 Po *ante rem* strukturalizmu so lahko mesta v strukturi naravnih števil zasedena z mesti v drugih strukturah. Argumentu na ljubo predpostavimo, da predmeti b1, b2, ..., bn – mesta v strukturi S1 (teh predmetov je lahko neskončno mnogo) – bodisi uprimerjajo strukturo S2 bodisi zasedajo mesta v takšni strukturi. Tako imajo elementi b1, ..., bn bodisi določene lastnosti p1, ...pk, zaradi katerih uprimerjajo strukturo S2, ali pa imajo lastnosti, ki so notranje strukturi S2 in se ne skladajo z lastnostmi q1, q2, ..., ql, ki so notranje glede na strukturo S1. V tem primeru so lastnosti p1, ..., pk zunanje – to je nestrukturalne – glede na strukturo S1, lastnosti q1, ..., ql pa zunanje glede na strukturo S2. Potemtakem ni jasno, na kakšen način predmeti b1, b2, ..., bn nimajo nestrukturalnih lastnosti v zvezi z obema strukturama S1 in S2.

2 Prav tako je težko reči, na kakšen način lahko strukturalno obravnavamo nekatere lastnosti realnih števil, kot recimo to, da so transcendentalna; ta lastnost se nanaša na pojem polinominalnega, za katerega se zdi, da je strukturi zunanji.

Za Shapirovo teorijo pa se konec koncev tudi dozdeva, da navsezadnje dopušča vprašanja, kot je problem Cezar, ker so mesta v strukturi naravnih števil tudi *bona fide* predmeti sistema. Če vprašamo »Ali je Cezar = 2?«, identificiramo Cezarja z naravnim številom 2 – ki je predmet sistema naravnih števil –, tako da bi to vprašanje navsezadnje moralo imeti dokončen odgovor. Razen tega pa, če ta dva predmeta ne pripadata isti strukturi, potem vsekakor mora obstajati odgovor na problem Cezar. Shapiro misli, da zato, ker Cezar in število 2 ne pripadata isti strukturi, problema Cezar ne moremo rešiti; toda ali ni spraševanje »Ali Cezar in število 2 pripadata isti strukturi?« samo izogibanje vprašanju?

Ante rem *strukturalizem in epistemološki problem*

Strukturalizem baje rešuje tudi epistemološki problem platonizma. Shapiro s svojo idejo sledi Resniku, da v bistvu velja naslednje:

> Če si – kakor si, recimo, predstavljamo stole ali avtomobile – števila, recimo, predstavimo kot predmete, med katerimi nam je vsak od njih dan izoliran od ostalih, potem se je težko izogniti temu, da bi si predsta-

vili védenje o številu kot nekaj, kar je odvisno od neke vrste interakcije med nami in tem številom.

Če pa po drugi strani motrimo matematiko kot znanost o strukturah, rešimo s tem tudi platonistove epistemološke probleme.

O čem govori strukturalistova epistemologija? Po Shapiru obstajajo trije možni načini dojemanja struktur: abstrakcija ali vzorčno prepoznanje, jezikovna abstrakcija in implicitna definicija.

En način dojemanja strukture je možen z abstrakcijo (ali vzorčno prepoznavo). Strukturo abstrahiramo iz enega ali več sistemov, ki imajo isto strukturo in tako dojamemo skupne relacije med predmeti. Ta način je analogen temu, kako dojamemo vrsto črke z opazovanjem različnih primerkov črk in zanemarimo to, kar je specifično za posamezen primerek, kot so njegova barva, višina in podobno. Z abstrakcijo dojamemo *majhne* kardinalne strukture (prvih nekaj končnih kardinalnih ali ordinalnih struktur), to pa deluje na podoben način kot pri znakih in nizih. Otrok se nauči prepoznati vzorec 4 tako, da mu pokažemo različne skupine, ki imajo 4 predmete. Naslednji problem je, kako dojeti velike kardinalne strukture (in nato še neskončne sisteme in strukture). Velikih kardinalnih struktur ne moremo pojmiti s preprosto abstrakcijo. Toda otroci se z jezikovnim razvojem učijo razčleniti primerke nizov, ki jih niso nikoli videli, pa tudi nize, ki morda sploh nimajo primerkov:

> Na določeni točki – še vedno zgodaj v procesu njegove vzgoje – otrok razvije neko zmožnost razumevanja kardinalnih in ordinalnih struktur, čeprav ne more prepoznati vseh naenkrat *via* vzorčna prepoznava in čeprav dejansko ne šteje ali celo ne bi mogel šteti. (Shapiro, 1997: 117)

Zato da bi dojeli strukturo naravnih števil, si moramo to zamisliti zaporedje črtic, ki postaja vse daljše in daljše in tvori pojem neskončnega (v eno smer) zaporedja črtic:

> To je neki neskončen niz in zato zanj v tej knjigi ne morem podati primerka. Običajno je tako, da napišemo nekaj namesto nečesa takšnega: –... Gre za to, da študentje navsezadnje razumejo, kaj menimo s to elipso. (Shapiro, 1997:119)

Da bi dosegli strukturo, ki je večja od števne, moramo motriti množice racionalnih števil (kot pri Dedekindovem rezu), na ta način pa motrimo strukturo realnih števil; v tem primeru govorimo o *jezikovni abstrakciji.* Na tretji način dojamemo strukturo z nekim neposrednim opisom, to je z njeno implicitno definicijo; tako lahko, na primer, strukturo naravnih števil dojamemo z razumevanjem Peanovih aksiomov, ki so njihova implicitna definicija. Shapiro definira implicitno definicijo na sledeči način:

V pričujočem kontekstu je implicitna definicija *hkratna* opredelitev številnih predmetov v terminih njihovih *medsebojnih* relacij. V sodobni filozofiji takšne definicije včasih imenujemo 'funkcionalne definicije'. (Shapiro, 1997: 130)

Tako implicitna definicija kot dedukcija podpirata stališče, da je matematično védenje *a priori*:

Potemtakem velja: Če senzorno izkustvo ni vključeno v to, da smo zmožni razumeti implicitne definicije, niti v upravičenje tega, da je implicitna definicija uspešna, niti v naše dojemanje logične posledice, potem je védenje o definirani(h) strukturi(ah), ki ga dosežemo z dedukcijo iz implicitne definicije, védenje *a priori*. (Shapiro, 1997:132)

Kateri so glavni problemi strukturalistove epistemologije?

1) Kako lahko dojamemo strukturo?

Ker so po Shapiru strukture abstraktne, nimamo z njimi nikakršnega vzročnega stika. Majhne končne strukture dojamemo z abstrakcijo *via* vzorčno prepoznanje.

Subjekt vidi ali sliši enega ali več strukturiranih sistemov in dojame strukturo teh sistemov ... Ideja je, da nekatere strukture – prav tako kot vrste znakov preko njihovih primerkov – dojamemo preko njihovih sistemov.« (Shapiro,1997:11)

S tem je tako kot z otrokovim dojemanjem različnih vrst, na primer črk: z opazovanjem različnih primerkov črk, ki mu jih pokažejo starši, otrok reprezentira isto vrsto. Toda ali niso vrste pred primerki? Mar nimamo – prej kot nasprotno – primerkov za to, da bi reprezentirali vrste? Otroci se o vrstah lahko učijo preko primerkov, ker so bili primerki vrstam že 'pripisani'; način učenja in način dojemanja nista nujno enaka.

2) Kaj pa neskončne strukture?

Strukturo naravnih števil dojamemo z implicitno definicijo, to je z nekim neposrednim opisom. To pomeni, da domnevno lahko dojamemo strukturo naravnih števil *via* razumevanje Peanovih aksiomov, pa čeprav Shapiro ne pove, kaj pomeni razumeti Peanove aksiome. Ponovno se to zdi bolj način učenja strukture naravnih števil kot pa način, kako to strukturo dojamemo. Ali niso Peanovi aksiomi opis strukture naravnih števil, ki smo jo nekako že dojeli in ki bi jo radi opisali? Če so Peanovi aksiomi opis strukture naravnih števil, kako lahko opišemo sliko, preden jo dojamemo? Ali se tako ne izognemo vprašanju? Shapiro opisuje implicitno definicijo kot »občo in močno metodo sodobne matematike«:

Praviloma teoretik poda zbirko aksiomov in navede, da teorija obravnava vsak sistem predmetov, ki ustreza aksiomom. Kot bi se izrazil sam: aksiomi, če sploh kaj opredeljujejo, opredeljujejo strukturo ali razred struktur. (Shapiro, 1997: 12-3)

Na tem mestu spet ni jasno, kako teoretiki pridejo do (Peanovih) aksiomov? So ti aksiomi rezultat teoretikove domišljije ali jih teoretik na neki način dojame? Če so rezultat njegove domišljije, potem ni jasno, kako lahko vemo, da se neka struktura ujema z njimi; če jih je dojel, potem je vprašanje »Kako?«. Ni jih mogel dojeti z dojemanjem te strukture, saj so strukture abstraktne in vzročno brez učinka (strukturalizem naj bi razrešil problematično platonistično epistemologijo). Lahko bi jih dojel z dojemanjem nekega sistema, ki uprimerja strukturo naravnih števil: en možen odgovor je, da z dojemanjem števnikov, kar pa Shapiro zanika; drugi možni odgovor je, da z dojemanjem prostorskočasovnega sistema, ki uprimerja strukturo naravnih števil. Kaj pa struktura realnih števil ali katera druga neskončna struktura? Shapiro ni naklonjen obstoju dovolj velikega števila fizičnih predmetov v vesolju. Ko kritizira eliminativni strukturalizem, zaključi:

> Ker najbrž ni dovolj *fizičnih* predmetov, kar bi obranilo nekatere teorije pred nepopolnostjo, mora eliminativni strukturalizem predpostaviti, da obstaja neko ogromno področje abstraktnih predmetov. Tako je eliminativni strukturalizem zelo podoben tradicionalnemu platonizmu. (Shapiro, 1997: 11)

Po Shapiru je eden od razlogov za to, da je *ante rem* strukturalizem najbolj sprejemljiva različica strukturalizma, ta, da za to, da bi zapolnil mesta različnih struktur, ne potrebuje močnega ontološkega ozadja. Toda zdi se, da bi lahko bil Shapiro – prav tako kot eliminativna različica – konec koncev zavezan eksistenci »velikega področja abstraktnih predmetov«.

3) Nobeden od načinov, ki jih za dojemanje strukture predlaga Shapiro, ne razloži, kako je možno, če sploh je, dojeti neko strukturo, ki ne uprimerja nobenega sistema razen strukture same. Zdi se, da bi bilo dojemanje takšne strukture prav tako problematično kot je za platonizem – katerega epistemološke probleme baje razrešuje strukturalizem – dojemanje matematičnih struktur, ker so strukture abstraktne in vzročno brez učinka.

Prevedla Tomaž Jereb in Sergej Pečovnik

Majda Trobok
Filozofska fakulteta, Univerza v Reki

Reference

Benacerraf P. & Putnam H. (1964), *Philosophy of Mathematics – Selected Readings* (Cambridge University Press, Cambridge).

Carnap R. (1974), *Meaning and Necessity* (The University of Chicago Press, Chicago).

Mac Lane S. (1996), »Structure in mathematics«, *Philosophia Matematica,* (3) Vol. 4, str. 174–183.

Parsons C. (1990), »The structuralist view of mathematical objects«, *Synthese,* Vol. 84, str. 303–364.

Resnik, M. D. (1981), »Mathematics as a science of patterns: ontology and reference«, *Nous,* 15, str. 529–550.

Resnik, M. D. (1981), »Mathematics as a science of patterns: epistemology«, *Nous,* 16, str. 95–105.

Shapiro S. (1983), »Mathematics and Reality«, *Philosophy of Science,* 50, str. 523–548.

Shapiro S. (1996), »Space, number and structure: a tale of two debates«, *Philosophia Mathematica,* (3) Vol. 4, str. 148–173.

Shapiro S. (1997), *Philosophy of Mathematics – Structure andOntology* (Oxford University Press, New York).