

MODULARNA KOMPOZICIJA RIMSKIH VODNIH KOLES

TINE KURENT

Univerza, Ljubljana

Kolo je narejeno okrog osi tako veliko, da seže do potrebne višine. Okrog oboda se pritrdijo kvadrasti zabojčki, zatesnjeni z voskom in smolo. Ko obračalci s prestopanjem vrtijo kolo, se zabojčki polnijo in dvigajo, na poti navzdol pa se praznijo v rezervoar.

(Vitruvii De Architectura Liber Decimus, IV, 3; Granger, Loeb Classical Library, London, MCMLXII)

Vitruvijevu poročilo o vodnih kolesih se omejuje na kratek opis konstrukcije in delovanja. Opušča pa številke o velikosti in zmogljivosti stroja, čeprav so po navadi Vitruvijevi opisi drugih strojev in zgradb dopolnjeni s števili.

Zato je vodno kolo, razstavljeno v rimski dvorani Britanskega muzeja, kamor je prišlo iz rimskega rudnika v Rio Tinto, še posebej pritegnilo mojo pozornost. Poleg ohranjenega kolesa so na razpolago še opisi in risbe vodnih koles, ki so obstajala še v začetku tega stoletja, pa so zaradi nevednosti in nepozornosti bila uničena. V *Metallurgia*, vol. XXXV, No. 207, p. 160, je poleg opisa tudi risba podobnega kolesa iz San Dominga v merilu. Kratek opis je tudi v knjigi Charlesa Singerja *A History of Technology*, vol. II (Oxford 1956). — Vse to mi je dalo dovolj podatkov za mersko analizo kompozicije rimskih vodnih koles. Ta pa je nato odkrila princip rimskega aproksimiranja iracionalnih količin v krožnih kompozicijah.

Pri obeh kolesih njun premer dá za obod, ko ga pomnožimo s sicer iracionalnim številom π , enostaven in celi mnogokratnik ene od rimskih človeških mer, ki je lepo deljiv s številom prečk (»špic«) kolesa.

Mere kolesa, izražene z evropskimi metriskimi ali pa angleškimi čevljskimi merami, nič ne povedo o kompoziciji koles. Toda iste mere, prevedene v rimske antropometrične enote, razkrivajo genialni princip racionalizacije iracionalnih krožnih kompozicij. Razmerje premer : obod je zelo blizu razmerju 7 : 22. Z drugimi besedami — pri premeru sedmih modulov meri obod dvaindvajset modulov. Mere obeh vodnih koles dokazujejo, da je to bilo Rimljanom znano.

Premer med nasprotnimi konci prečk pri kolesu iz Rio Tinta meri $4,78 \text{ m} \pm 5 \text{ cm}$. Če upoštevamo, da se kolarjeve tolerance v zadnjih dva tisoč letih najbrž niso povečale, da so konci prečk starega kolesa očitno obrabljeni, in pa to, da dolžina lesa ni konstanta, ampak spremenljivka,

odvisna od stopnje vlažnosti, lahko prevedemo mero $4,78 \text{ m} \pm 5 \text{ cm}$ v mero $16 \frac{1}{3}$ rimskega čevlja, kar je enako 49 trientov. Z drugimi besedami 7 modulov po 7 trientov. (Rimski čevljar, pes, ima 3 triente in meri 29,57 cm.)

Ce je risba vodnega kolesa iz rudnika v San Domingu po Crossu Browne v merilu, meri zunanji premer pri vodnih zaboječkih 16 angleških čevljev, kar znese $16 \frac{1}{3}$ pedes ali M_7 trientov. (Razmerje foot : pes = 30,48 : 29,57.)

Premeru, velikemu 7 modulov po 7 trientov, ustreza obod, ki meri 22 modulov po 7 trientov. V resnici ima vodno kolo iz San Dominga 22 prečk in med njimi 22 intervalov. Vsak osni interval pa meri 7 trientov. Toda v Britanskem muzeju razstavljena četrtna vodnega kolesa iz Rio Tinta ima sedem intervalov; na celem obodu bi torej bilo $4 \times 7 = 28$ intervalov in prav toliko prečk. Če vemo, da meri 1 triens 4 uncije, lahko karakteristični obod kolesa $22 M_7$ trientov predstavimo tudi kot $22 M_{28}$ uncij. To pa je enako $28 M_{22}$ uncij. V resnici je osni razstoj med dvema od osemindvajsetih prečk ali obodni modul vodnega kolesa iz Rio Tinta velik 22 palcev. Pri tem kolesu je obodni modul manjši kot pri kolesu iz San Dominga, kjer meri 7 trientov (= 28 uncij), toda še vedno je izrazljiv s celim številom.

Sl. 1. Grafična in aritmetična predstava modularne kompozicije rimskih vodnih koles iz rudnikov v Rio Tinto in San Domingo ter kompozicije kupole Pantheonona. Premer koles je 49 trientes oziroma 7 modulov po 7 trientes.

Obod koles je 154 trientov oziroma 22 modulov po 7 trientov (San Domingo) oziroma 28 modulov po 22 palcev (Rio Tinto).

Premer središčne lesene plošče pri kolesih je 7 modulov po 7 digitov, kar je nekaj več kot petina premera kolesa. Pripadajoči obod znaša 154 digitov. Ritem med prečkami na tem obodu je torej 7 digitov (v San Domingu) oziroma $5 \frac{1}{2}$ digita (v Rio Tintu).

Premer Pantheonove kupole je 98 kubitov oziroma 7 modulov po 14 kubitov.

Obod Pantheonove kupole je 308 kubitov oziroma 28 modulov po 11 kubitov. Premer odprtine na vrhu kupole je nekaj nad petino premera kupole.

Krožna kompozicija rimskih vodnih koles in Pantheonove kupole je racionalna in modularna ter nima zveze z geometrično delitvijo krožnice. Teoretično je zasnovana na racionalizaciji razmerja premer : obod, ki je zelo blizu razmerja 7 : 22. To razmerje (oziroma 7 : 11) je prisotno v členih drugega Fibonaccijevega zaporedja in v obliki števila 7 in njegovega gnomona 11

Illustr. 1. Graphical and arithmetical presentation of the modular composition of Roman water-wheels in mines of San Domingo and Rio Tinto, and of the Pantheons dome.

Diameter of the wheels is 49 trientes or 7 modules of 7 trientes.

Circumference of the wheels is 154 trientes, which equals 22 modules of 7 trientes (San Domingo), or 28 modules of 22 unciae (Rio Tinto).

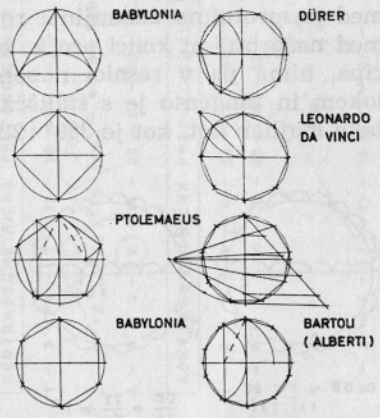
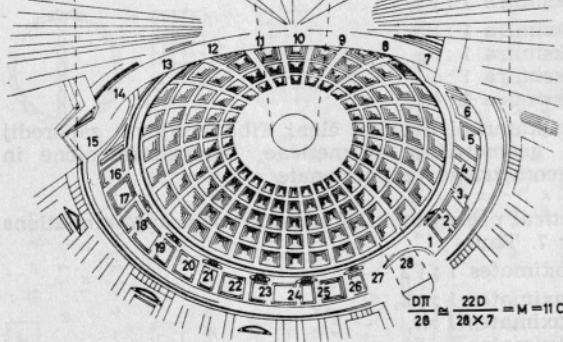
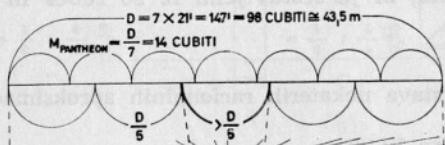
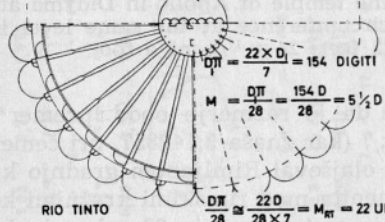
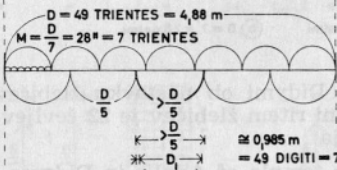
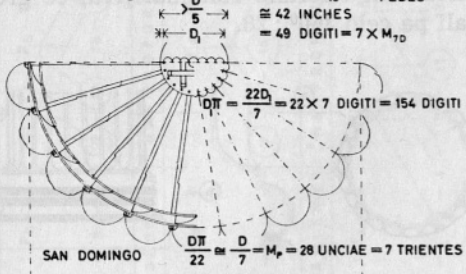
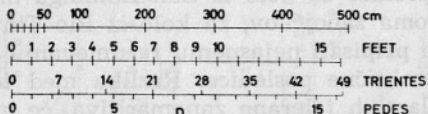
Diameter of the wooden centre of the wheels is modularly $7 M_7$ digiti, or slightly over $\frac{1}{5}$ of the wheels diameter. The pertaining circumference is 154 digiti. The distance between spokes at this circumference is accordingly 7 digiti (in San Domingo) or $5 \frac{1}{2}$ digiti (in Rio Tinto).

Diameter of Pantheons dome is 98 cubiti or 7 modules of 14 cubiti each.

Circumference of Pantheons dome is 308 cubiti, or 28 modules of 11 cubiti each.

The diameter of the opening at the top of Pantheons dome is slightly over $\frac{1}{5}$ of the domes diameter.

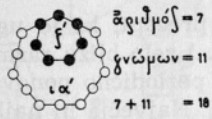
The circular composition of water-wheels and Pantheons dome is rational and modular. It has nothing to do with geometrical division of the circumference. Theoretically it is based on the rationalisation of the ratio diameter : circumference, which is very closely approximated by the ratio 7 : 22. This ratio (or rather 7 : 11) is present in the terms of the second Fibonacci series, and in the shape of number 7 and its gnomon



FIBONACCI

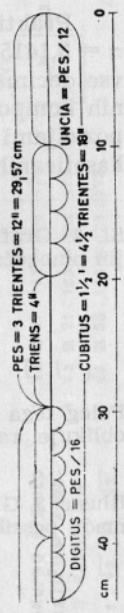
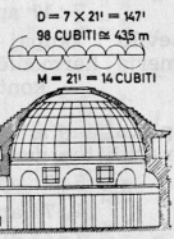
D	Dπ	≈	7	: 22
1	3	4	7	11
1 + 3 = 4				
3 + 4 = 7				
4 + 7 = 11				
7 + 11 = 18				

1 × ↑ 2 ×
 360°/28

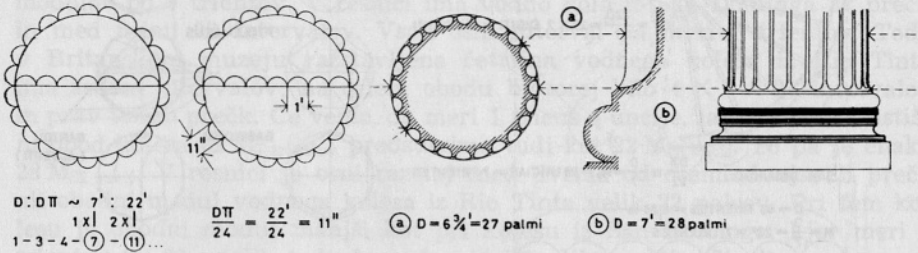


NUMERUS PERFECTUS SECUNDUM EUCLIDEM

28 = 1 × 28
2 × 14
4 × 7
7 × 4
14 × 2
28 × 1
28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14



Razlika, da je karakteristični premer za kolo iz San Dominga merjen med nasprotnima zunanjima robovoma zaboječkov, za kolo iz Rio Tinta pa med nasprotnimi konci prečk, se da pripisati nejasnemu razumevanju principa, nima pa v resnici nobene praktične posledice. Razlika med tetivo, lokom in tangento je s stališča kolarskih toleranc zanemarljiva, če gre za tako majhen kot, kot je $360^{\circ} : 22$, ali pa celo $360^{\circ} : 28$.



Sl. 2. Premer stebra Apolonovega templja v Didymi ob nastavku žlebičev meri 7 čevljev. Obod na isti višini je 22 čevljev. Osni ritem žlebičev je 22 čevljev : 24 = $\frac{11}{12}$ čevlja

Illustr. 2. The diameter of the columns at the temple of Apollo in Didyma at the beginning of flutes is 7 Greek feet. The circumference at the same level is 22 feet. The rhythm of flutes is 22 feet: 24 = $\frac{11}{12}$ of a foot

Praktični precept, ki je ugotavljal, da je razmerje obod : premer (ali $\pi = 3,141592 \dots$) zelo blizu razmerju 22 : 7 (kar znaša 3,142857, pri čemer se vse decimalke periodično ponavljajo), je olajševal Rimljanom gradnjo krožnih kompozicij. Največja in najbolj plemenita med rimskimi krožnimi kompozicijami pa je kupola Pantheona, ki je sestavljena iz 28 reber in iz 28 kasetiranih intervalov med njimi.

Sl. 3. Grafična in aritmetična predstava nekaterih racionalnih aproksimacij, ki jih omogoča število 7.

$$\begin{aligned}
 5 : 7 & \text{ aproksimira } 1 : \sqrt{2}, \\
 4 : 7 & \text{ aproksimira } 1 : \sqrt{3}, \\
 7 : 22 & \text{ aproksimira } 1 : \pi, \\
 7 : 11 & \text{ aproksimira } 1 : \varphi, \\
 7 : 17 & \text{ aproksimira } 1 : \theta.
 \end{aligned}$$

Poleg tega število 7 skupaj z nekaterimi drugimi členi Fibonaccijevih zaporedij oblikuje razmerja harmonične, geometrične, aritmetične, kontraharmonične in kontrageometrične proporcionalne

Illustr. 3. Graphical and arithmetical presentation of some rational approximations made possible with the number 7. Thus

$$\begin{aligned}
 5 : 7 & \text{ approximates } 1 : \sqrt{2}, \\
 4 : 7 & \text{ approximates } 1 : \sqrt{3}, \\
 7 : 22 & \text{ approximates } 1 : \pi, \\
 7 : 11 & \text{ approximates } 1 : \varphi, \\
 7 : 17 & \text{ approximates } 1 : \theta.
 \end{aligned}$$

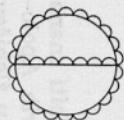
Additionally number 7 forms together with some other terms in Fibonacci series ratios containing harmonical, geometrical, arithmetical, contraharmonical, and contrageometrical means between two extremes

$$1 : \pi \quad \pi = 3,141\dots$$

$$1 : \pi \cong 7 : 22$$

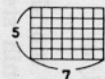
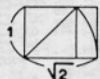
$$1 \times \quad | \quad 2 \times$$

$$1 - 3 - 4 - (7) - (11) - \dots$$



$$1 : \sqrt{2}$$

$$1 : \sqrt{2} \cong 5 : 7$$

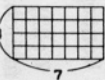


$$1 : \sqrt{3}$$

$$1 : \sqrt{3} \cong 4 : 7$$

$$1 \times \quad | \quad 1 \times$$

$$1 - 3 - (4) - (7) - 11 - \dots$$



$$1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} \quad 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} = 70 : 99 : 121$$

$$1 : \sqrt{2} \cong 70 : 99$$

$$10 \times \quad | \quad 9 \times$$

$$1 - 3 - 4 - (7) - (11) - \dots$$

$$1 : \sqrt{3} \cong 70 : 121$$

$$10 \times \quad | \quad 11 \times$$

$$1 : \sqrt{2}, 1 : \sqrt{3}, 1 : \sqrt{5}$$

$$\sqrt{2} = 1,41\dots \quad \sqrt{3} = 1,732\dots \quad \sqrt{5} = 2,236\dots$$

ŠTEVILO 123 JE ČLEN V DRUGEM FIBONACCIJEVEM ADITIVNEM ZAPOREDJU S KLJUČNIM ŠTEVILOM 7

$$87 = 6 \times 11 + 3 \times 7$$

$$71 = 2 \times 11 + 7 \times 7$$

$$55 = 5 \times 11$$

$$1 - 3 - 4 - 7 - 11 - 18 - 29 - 47 - 76 - 123 - \dots$$

123 JE SKUPNO ŠTEVILO V ARITMETIČNIH APROKSIMACIJAH RAZMERJEM :

$$1 : \sqrt{2}, 1 : \sqrt{3}, 1 : \sqrt{5}$$

$$1 : \sqrt{2} \cong 87 : 123 = 123 : 174$$

$$1 : \sqrt{3} \cong 71 : 123 = 123 : 213$$

$$1 : \sqrt{5} \cong 55 : 123 = 123 : 275$$

$$1 : \varphi \quad \varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,618\dots$$

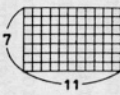
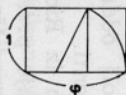
$$3 \quad 1,33 \quad 1,75 \quad 1,571\dots$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{8}{5} \quad \lim \rightarrow \varphi$$

$$1 - 3 - 4 - 7 - 11 - \dots$$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \lim \rightarrow \frac{1}{\varphi}$$

$$0,33 \quad 0,75 \quad 0,571\dots \quad 0,63$$



$$1 : \theta \quad \theta = 1 + \sqrt{2} = 2,414\dots$$

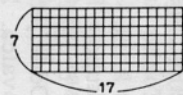
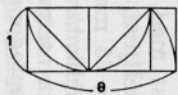
$$3 \quad 2,3 \quad 2,428\dots \quad 2,411\dots$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{8}{5} \quad \lim \rightarrow \theta$$

$$1 - 3 - 7 - 17 - 41 - \dots$$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \lim \rightarrow \frac{1}{\theta}$$

$$0,33 \quad 0,428\dots \quad 0,411\dots \quad 0,414\dots$$



HARMONIČNA PROPORCIONALNA

$$a : P_h : b$$

$$P_h = \frac{2ab}{a+b}$$

$$1 - 3 - 4 - (7) - (11) - 18 - (29) - 47 - \dots$$

GEOMETRIČNA PROPORCIONALNA

$$a : P_g : b$$

$$P_g = \sqrt{ab}$$

$$1 - 3 - 4 - (7) - (11) - 18 - (29) - 47 - \dots$$

ARITMETIČNA PROPORCIONALNA

$$a : P_a : b$$

$$P_a = \frac{a+b}{2}$$

$$1 - (3) - 4 - (7) - (11) - 18 - 29 - \dots$$

KONTRAGEOMETRIČNA PROPORCIONALNA

$$1 - 3 - (4) - (7) - 11 - 18 - 29 - 47 - \dots$$

$$P_{cg} = a + b - \sqrt{ab}$$

$$1 - 4 - 5 - (9) - 14 - 23 - 37 - 60 - \dots$$

KONTRAHARMONIČNA PROPORCIONALNA

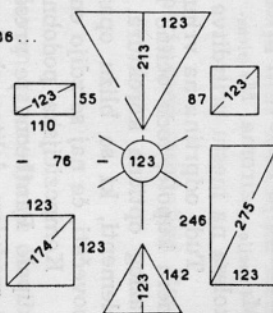
$$1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - 34 - \dots$$

$$2 - 4 - 6 - 10 - 16 - 26 - (42) - 68 - \dots$$

$$a : P_{ch} : b$$

$$P_{ch} = \frac{a^2 + b^2}{a+b}$$

$$1 - 3 - 4 - (7) - 11 - 18 - 29 - (47) - \dots$$



Premer kupole pri Pantheonu meri 43,5 m oziroma v rimskih merah 98 rimskih komolcev ali $7 M_{14}$ kubitov (1 kubitus je $1\frac{1}{2}$ čevlja).

Modul Pantheonovega premera je M_{14} kubitov. Obod Pantheonove kupole torej meri $22 M_{14}$ kubitov oziroma 308 rimskih komolcev. Ker pa je med rebri kupole 28 intervalov, meri modul na obodu kupole $308 \text{ kubitov} : 28 = 11$ kubitov.

Kompozicijski princip je torej pri kupoli Pantheona isti kot pri vodnem kolesu iz Rio Tinta.

Toda kompozicijska podobnost med Pantheonom in vodnimi kolesi ni omejena samo na delitev oboda. Odprtina na vrhu Pantheonove kupole in lesena središčna plošča pri kolesu sta v isti proporciji do celote.

Premer središčne lesene plošče pri kolesu iz Rio Tinta meri 0,985 m; premer podobne plošče iz San Dominga pa, če je risba v merilu, $3' 6''$. V obeh primerih je to za malenkost več, kot znaša $\frac{1}{5}$ karakterističnega premera vodnega kolesa. Toda premer krožnice, ki jo oblikujejo leseni klini na središčni leseni plošči pri kolesu iz Rio Tinta, meri teoretično $35\frac{1}{2}$ palca, pripadajoči obod krožnice pa 112 palcev ali $28 M_4$ uncije. Modul na obodu krožnice iz klinov, ki pritrjujejo središčno leseno ploščo na prečke, je torej M_4 uncije oziroma M_1 triens. Toliko tudi meri osna razdalja med prečkami kolesa na mestu pritrditve s klini.

Tudi odprtina na vrhu kupole Pantheona je nekoliko večja kot $\frac{1}{5}$ premera kupole, toda očitno iz drugačnih razlogov. V tem primeru je glavni razlog optična korektura. Oddaljeni elementi se vedno zdijo manjši kot elementi, ki so blizu opazovalca. Zato je treba bolj oddaljene elemente povečati, če naj se zdijo enako veliki kot bližji elementi.

Kompozicijska podobnost med vodnim kolesom iz Rio Tinta in med kupolo Pantheona je presenetljiva. Obakrat dovoljuje premer, ki je velik 7 modulov, delitev oboda na 28 manjših modulov, središčni element pa je v obeh primerih teoretično velik $\frac{1}{5}$ premera.

Racionalna aproksimacija razmerja med premerom in polovičnim obodom, $7 : 11$, je prikazana v heptagonalni obliki števila 7 in njegovega gnomona, 11 (grška koncepcija), in pa predstavljena v razmerju med četrtim in petim členom drugega Fibonaccijevega zaporedja:

$$1 - 3 - 4 - 7 - 11 - \dots \text{ (rimska koncepcija).}$$

Praktična vrednost razmerja $7 : 11$ (oziroma $7 : 22$) je morala biti znana že pred Rimljani. To razmerje sem zasledil pri našlebljenih stebrih Apolonovega templja v Didymi. Premer stebrov Didymaiona ob nastavku žlebičev meri 7 čevljev, kakor je to ugotovil že Armin von Gerkan. Pripadajoči obod na tistem mestu torej meri 22 čevljev. Žlebičev pa je 24. Na vsak žlebič torej odpade $\frac{22}{24}$ čevlja, ali 11 palcev. V tem primeru je prehod z modula, ki je dvaindvajseti del oboda, na modul, ki je obodova štiriindvajsetinka, precej enostaven, ker je čevelj deljiv z 12.

Podobno je tudi prehod z dvaindvajsetega dela oboda na osemindvajseti del pri vodnem kolesu iz Rio Tinta ali pri kupoli Pantheona enostaven, ker je modul na premeru v obeh primerih deljiv z 28. Modul na premeru vodnega kolesa je namreč M_{28} uncij; modul na premeru kupole pa M_{14} kubiti.

Po Evklidu je 28 popolno število. Njegova praktična (ali boljše kompozicijska) vrednost pa je ne le v lastnosti, da je enako vsoti svojih lastnih fak-

torjev ($28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 11$), ampak tudi v deljivosti s sedem, ki je značilni mnogokratnik za definiranje premerov.

22 in 28, ki nastopata kot mnogokratnika modula na obodu, sta veliki števili. Geometrično je lahko razdeliti 360^0 (ali krožnico) na 3 oz. 6 oz. 12 delov; na 4 oz. 8 oz. 16 delov; na 5 oz. 10 delov. Toda ni lahko razdeliti polnega kota na 7 oz. 14 oz. 28 delov. Tako geometrično delitev je prvi v naši civilizaciji izvedel šele Dürer. Še bolj nerodno je razdeliti krožnico na 11 oz. 22 delov. 11 je še večji prafaktor kot 7. Toda modularni način delitve oboda na 22 ali 28 delov je enostaven in logičen.

V razmerju $7:22$, ki racionalno aproksimira razmerje $D:D\pi$, se kaže le ena od lastnosti števila 7. To število v razmerju z nekaterimi drugimi celimi števili racionalno aproksimira nekatera najbolj pogosta iracionalna razmerja, kot so:

$$1 : \sqrt{2} = 5 : 7;$$

$$1 : \sqrt{3} = 4 : 7;$$

$1 : \varphi$ je razmerje, ki se mu približujejo razmerja med sosednjimi členi Fibonaccijevih zaporedij; zlati rez $\varphi = \frac{5 + 1}{2}$.

$1 : \theta$ je razmerje, ki se mu približujejo razmerja med sosednjimi členi Pellovih zaporedij. Faktor Pellovih zaporedij

$$\theta = 1 + \sqrt{2}.$$

V drugem Fibonaccijevem in v drugem Pellovem zaporedju je število 7 ključni člen.

Število 7 ima pomembno vlogo v razmerjih harmonične, geometrične, aritmetične, kontraharmonične in kontrageometrične proporcionalne.

Lastnost, da omogoča racionalne aproksimacije nekaterih iracionalnih vrednosti, je verjetno med glavnimi razlogi, da je število 7 postalo »sveto« ali »čudežno« število v mnogih religijah, pravljičah in rekih.

Bibliografija — Bibliography

Vitruvii De Architectura Granger; Loeb Classical Library, London (1962).
Metallurgia, vol. 35, No. 207.

M. Detoni, T. Kurent, Modularna rekonstrukcija Emone — The modular reconstruction of Emona. Situla 1, 1963.

T. Kurent, The basic law of Modular composition. The Modular Quarterly, winter 1964-65, London.

T. Kurent, Modularno oblikovanje lesenih koles vprežnih in ročnih vozil v Sloveniji. Slovenski entnograf 16-17, 1963-64 (1964).

T. Kurent, Vloga števila 7 v modularni kompoziciji — The role of the number 7 in the modular composition. Arheološki vestnik 13-14, 1962-63 (1963).

SUMMARY

The Modular composition of Roman Water-Wheels

The metrical analysis of the Roman water-wheel from the mine in Rio Tinto, now exhibited in British Museum, and of the drawing of a similar wheel from San Domingo offers the explanation of the Roman approximation of irrational values. The ratio circumference : diameter, which is the irrational π , can be approximated with the ratio 22 : 7, the half of which (11 : 7) appears in the sequence of terms in the second Fibonacci series (1—3—4—7—11—...) and in the ratio between the heptagonal number (7) and its gnomon (11).

The diameter of the first wheel is 7 modules of 7 trientes, and the corresponding circumference is 22 modules of the same size. In fact this wheel has 22 spokes. It would be very complicated to devise 360° in 22 parts geometrically; the arithmetical calculation of a circumference, implying irrational π , and its division into equal parts is also too demanding for a simple craftsman. But modular composition simplifies the problem.

The diameter of the second wheel is again 7 modules of 7 trientes, but its circumference is not divided in 22 intervals of 7 trientes (7 trientes = 28 unciae), but in 28 modules of 22 unciae. Equation $22 M_{28} = 28 M_{22}$ is obvious.

The same compositional principle has been adopted for the Pantheons dome. The Domes diameter equals 7 modules of 14 cubiti, but the corresponding circumference ($22 M_{14 \text{ cubiti}}$) is divided in 28 intervals of 11 cubiti. The equation $22 M_{14 \text{ cubiti}} = 28 M_{11 \text{ cubiti}}$ is analogous to the previous one and differs only in extent.

The practical value of the described principle for the composition of a circumference is its simplicity, facilitating the wheelmakers or builders task. This and other compositional properties probably made number 7 exceptionally famous and 28 a perfect number.